Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire
Ouarzazate, Maroc

جامعة ابن زهر
الكلية متعددة التخصصات
ورزازات، المغرب

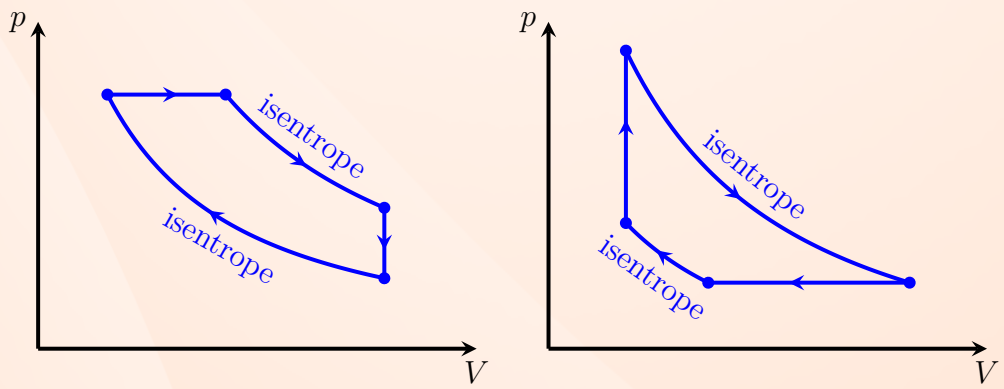
Correction de l'Épreuve de Thermodynamique II *
Responsable : H. Chaib
Filière : SMP, **Semestre** : 3, **Année** : 2015/2016
Date : 03-03-2016 à 10:15, **Durée** : 90 min

Questions de Cours

1. La condition impérative pour liquéfier un gaz est qu'il faut à la fois :
   - le refroidir à une température inférieure à sa température critique T_c (c.-à-d. $T < T_c$) ;
   - puis le comprimer.
2. Une pompe à chaleur est un dispositif permettant de transférer une quantité de chaleur d'une source froide vers une source chaude.

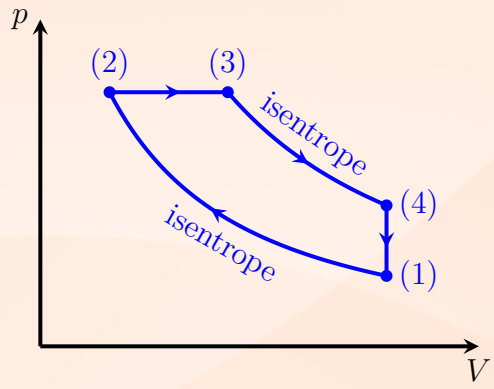
Problème 1

1. Avec deux transformations isentropes, une transformation isobare et une transformation isochore, il y a seulement deux configurations possibles pour former un cycle thermodynamique (figure ci-dessous).



Parmi ces deux configurations, c'est la première configuration qui possède un état dont le volume est strictement inférieur aux volumes des autres états. Par contre la deuxième configuration ne satisfait pas à ce critère car il possède deux états dont le volume est minimal. Cependant, en tenant en considération que l'état (2) possède le plus petit volume et qu'il s'agit d'un cycle moteur, dont le sens d'évolution est celui de rotation des aiguilles d'une montre, on aboutit au cycle de la machine en question (figure ci-dessous).

*. La version électronique de l'énoncé et celle de la correction de cette épreuve seront publiés en ligne, quelques heures après la date affichée ci-dessus, sur le site Web : http://www.fpo.ma/chaib/teaching/.



2. Les quantités de chaleur mises en jeu au cours de ce cycle sont celles échangées lors des transformations isobare (2)-(3) et isochore (4)-(1) car les deux autres transformations sont isentropes ($Q_{12} = Q_{34} = 0$). Alors, pour la transformation isobare (2)-(3) :

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = C_{\mathrm{p}}(T_3 - T_2) \tag{1}$$

et pour la transformation isochore (4)-(1) :

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = C_{\mathrm{V}}(T_1 - T_4) \tag{2}$$

3. (a) En considérant la transformation isobare (2)-(3), on a $T_3 > T_2$ car $\frac{T_3}{V_3} = \frac{T_2}{V_2}$ et $V_3 > V_2$. Alors, la quantité de chaleur Q_{23} est positive. En considérant la transformation isochore (4)-(1), on a $T_1 < T_4$ car $\frac{T_1}{p_1} = \frac{T_4}{p_4}$ et $p_1 < p_4$. Alors, la quantité de chaleur Q_{41} est négative. Cependant, la quantité de chaleur fournie au système est :

$$Q_{\mathrm{f}} = Q_{23} \tag{3}$$

(b) Le travail utile du cycle est donné par :

$$W_{\mathrm{u}} = \sum_i W_i = -\sum_i Q_i \tag{4}$$

soit :

$$W_{\mathrm{u}} = -(Q_{23} + Q_{41}) \tag{5}$$

(c) L'efficacité thermique η du cycle s'écrit :

$$\eta = \left|\frac{W_{\mathrm{u}}}{Q_{\mathrm{f}}}\right| \tag{6}$$

Le travail utile W_{u} est négatif car il s'agit d'un cycle moteur. Alors :

$$\eta = \frac{-W_{\mathrm{u}}}{Q_{\mathrm{f}}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} \tag{7}$$

soit :

$$\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} \tag{8}$$

4. En remplaçant, dans la dernière expression, les quantités de chaleur Q_{23} et Q_{41} par leurs expressions, il vient :

$$\eta = 1 + \frac{C_{\mathrm{V}}(T_1 - T_4)}{C_{\mathrm{p}}(T_3 - T_2)} \tag{9}$$

soit :

$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{\gamma(T_3 - T_2)} \tag{10}$$

5. En divisant le dénominateur et numérateur de la fraction du membre de droite de l'expression précédente par T_2, il vient :

$$\eta = 1 + \frac{\frac{T_1}{T_2} - \frac{T_4}{T_2}}{\gamma(\frac{T_3}{T_2} - 1)} \tag{11}$$

En prenant en considération que la transformation (1)-(2) est isentrope, alors :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \tau_{12}^{1-\gamma} \tag{12}$$

En prenant en considération que la transformation (3)-(4) est isentrope et que $V_4 = V_1$, alors :

$$\frac{T_4}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \tag{13}$$

soit :

$$\frac{T_4}{T_2} = \tau_{13}^{1-\gamma}\tau_{13}^{-1}\tau_{12} = \tau_{13}^{-\gamma}\tau_{12} \tag{14}$$

En prenant en considération que la transformation (2)-(3) est isobare, alors :

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \tau_{13}^{-1}\tau_{12} \tag{15}$$

L'expression de η s'écrit alors :

$$\eta = 1 + \frac{\tau_{12}^{1-\gamma} - \tau_{13}^{-\gamma}\tau_{12}}{\gamma(\tau_{13}^{-1}\tau_{12} - 1)} \tag{16}$$

ou encore, en divisant le dénominateur et numérateur de la fraction du membre de droite de cette expression par τ_{12} :

$$\eta = 1 - \frac{\tau_{12}^{-\gamma} - \tau_{13}^{-\gamma}}{\gamma(\tau_{12}^{-1} - \tau_{13}^{-1})} \tag{17}$$

d'où :

$$\eta = 1 - \frac{\tau_{12}^{-\alpha} - \tau_{13}^{-\alpha}}{\gamma(\tau_{12}^{-\beta} - \tau_{13}^{-\beta})} \tag{18}$$

avec $\alpha = \gamma$ et $\beta = 1$.

Problème 2

1. La différentiation de l'équation d'état de Van der Waals $\left(p + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ s'écrit :

$$(V - nb)\,\mathrm{d}\left(p + \frac{n^2a}{V^2}\right) + \left(p + \frac{n^2a}{V^2}\right)\mathrm{d}\,(V - nb) = nR\mathrm{d}T \tag{19}$$

soit :

$$(V - nb)\,\mathrm{d}p + \left(-\frac{2n^2a}{V^3}(V - nb) + p + \frac{n^2a}{V^2}\right)\mathrm{d}V - nR\mathrm{d}T = 0 \tag{20}$$

Alors :

$$A = V - nb \tag{21}$$

$$B = -\frac{2n^2a}{V^3}(V - nb) + p + \frac{n^2a}{V^2} \tag{22}$$

$$C = -nR \tag{23}$$

2. En se plaçant dans le cas de pression constante (c.-à-d. $\mathrm{d}p = 0$), l'équation $A\mathrm{d}p + B\mathrm{d}V + C\mathrm{d}T = 0$ devient :
$$B\mathrm{d}V + C\mathrm{d}T = 0 \tag{24}$$
soit :
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{C}{B} \tag{25}$$
En se plaçant dans le cas de volume constant (c.-à-d. $\mathrm{d}V = 0$), l'équation $A\mathrm{d}p + B\mathrm{d}V + C\mathrm{d}T = 0$ devient :
$$A\mathrm{d}p + C\mathrm{d}T = 0 \tag{26}$$
soit :
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{C}{A} \tag{27}$$
En se plaçant dans le cas de température constante (c.-à-d. $\mathrm{d}T = 0$), l'équation $A\mathrm{d}p + B\mathrm{d}V + C\mathrm{d}T = 0$ devient :
$$A\mathrm{d}p + B\mathrm{d}V = 0 \tag{28}$$
soit :
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{A}{B} \tag{29}$$

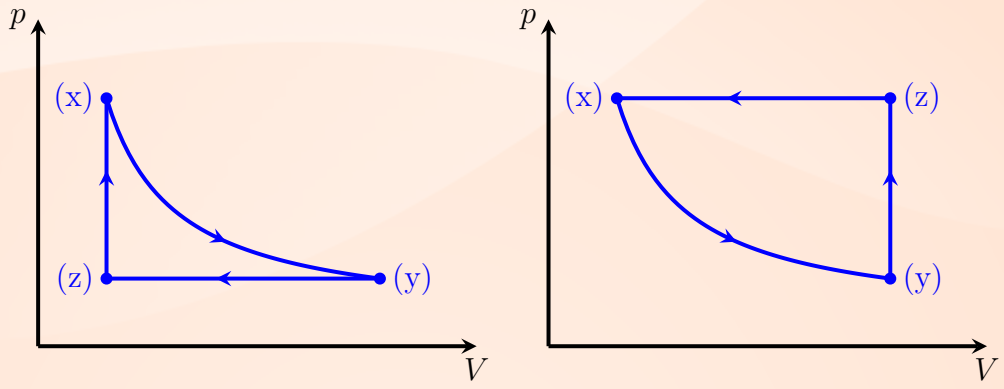
3. Les coefficients thermoélastiques sont définis par $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, $\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ et $\chi_{\mathrm{T}} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$. Alors, de ce qui précède, il vient :
$$\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{nR}{-\frac{2n^2a}{V^3}(V - nb) + p + \frac{n^2a}{V^2}} \tag{30}$$
$$\beta = \frac{1}{p} \cdot \frac{nR}{V - nb} \tag{31}$$
$$\chi_{\mathrm{T}} = \frac{1}{V} \cdot \frac{V - nb}{-\frac{2n^2a}{V^3}(V - nb) + p + \frac{n^2a}{V^2}} \tag{32}$$

4. Dans le cas où $a = 0$ et $b = 0$, l'équation d'état du gaz de Van der Waals devient identique à celle d'un gaz parfait (c.-à-d. $pV = nRT$). Dans ce cas, les expressions des coefficients thermoélastiques d'un gaz parfait se déduisent de celles obtenues dans la question précédente :
$$\alpha = \frac{nR}{Vp} = \frac{1}{T} \tag{33}$$
$$\beta = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T} \tag{34}$$
$$\chi_{\mathrm{T}} = \frac{V}{Vp} = \frac{1}{p} \tag{35}$$

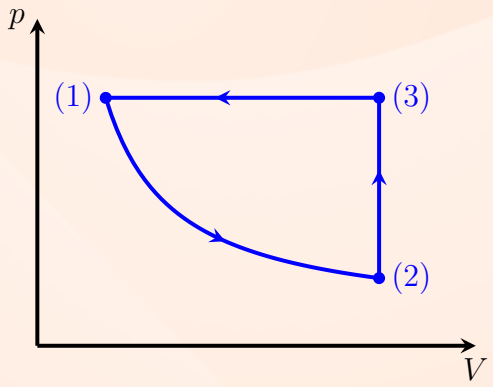
5. Les coefficients thermoélastiques sont liés par la fameuse relation $\frac{\alpha}{\beta\chi_{\mathrm{T}}} = p$. Cette relation est bien vérifiée par les expressions obtenues dans les deux questions précédentes.

Problème 3

1. Avec une détente isotherme, une compression isobare et une compression isochore, il y a seulement deux configurations possibles pour former un cycle thermodynamique[†] (figure ci-dessous).



Parmi ces deux configurations, c'est la deuxième configuration qui possède une compression isochore suivie d'une compression isobare. Par contre la première configuration ne satisfait pas à ce critère car il possède une compression isobare suivie d'une compression isochore.
Dans la deuxième configuration, l'état le plus comprimé est l'état (x) car il est caractérisé par la plus grande pression et le plus petit volume. Donc l'état (x) représente l'état (1) du cycle en question. Il s'ensuit que l'état (y) représente l'état (2) et l'état (z) représente l'état (3). Cependant, le cycle de la machine en question est representé sur la figure ci-dessous.



On constate que la machine en question est une machine dynamo-thermique car son cycle évolue dans le sens trigonométrique.
Le présent cycle est caractérisé par les pressions extrêmes $p_{\text{min}} = 2\,\text{bar}$ et $p_{\text{max}} = 20\,\text{bar}$, et les volumes extrêmes $V_{\text{min}} = 1\,\text{dm}^3$ et $V_{\text{max}} = 9{,}5\,\text{dm}^3$. Cependant, d'après la figure ci-dessus, il s'avère que :

- pour l'état (1) : $p_1 = p_{\text{max}}$ et $V_1 = V_{\text{min}}$;

†. On désigne par cycle thermodynamique le cycle d'une machine thermique qui peut être une machine thermo-dynamique ou bien une machine dynamo-thermique. Il est important de noter que :

- le mot thermodynamique (sans -) est général ; par contre
- le mot thermo-dynamique (avec -) est spécifique aux machines motrices ; et
- le mot dynamo-thermique (avec -) est spécifique aux pompes à chaleurs y compris les machines frigorifiques.

- pour l'état (2) : $p_2 = p_{\text{min}}$ et $V_2 = V_{\text{max}}$;
- pour l'état (3) : $p_3 = p_{\text{max}}$ et $V_3 = V_{\text{max}}$.

2. Pour calculer l'efficacité thermique de ce cycle, on doit passer par le calcul des travaux et de quantités de chaleur échangés au cours de ses différentes transformations. Pour ce faire nous allons tout d'abord déterminer l'équation d'état de ce gaz qui est un gaz réel.
La variable d'état T est une fonction des variables indépendantes p et V. Alors, sa différentielle $\mathrm{d}T$ peut s'écrire :

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \mathrm{d}V \tag{36}$$

Or, d'après les définitions des coefficients thermoélastiques α et β, à savoir :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{37}$$

on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{1}{\alpha V} = \frac{p}{nR} \tag{38}$$

et

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{1}{\beta p} = \frac{V - nb}{nR} \tag{39}$$

alors, en remplaçant $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$ dans l'équation (36) par leurs expressions, on obtient :

$$\mathrm{d}T = \frac{V - nb}{nR}\mathrm{d}p + \frac{p}{nR}\mathrm{d}V \tag{40}$$

- Pour $V = Cte$, l'équation (40) s'écrit :

$$\mathrm{d}T = \frac{V - nb}{nR}\mathrm{d}p \tag{41}$$

Son intégration permet d'écrire :

$$T = \frac{V - nb}{nR}p + f(V) \tag{42}$$

où la constante d'intégration $f(V)$ est une fonction qui dépend éventuellement de V mais elle est indépendante de p.

- Pour $p = Cte$, l'équation (40) s'écrit :

$$\mathrm{d}T = \frac{p}{nR}\mathrm{d}V \tag{43}$$

Son intégration permet d'écrire :

$$T = \frac{p}{nR}V + g(p) \tag{44}$$

où la constante d'intégration $g(p)$ est une fonction qui dépend éventuellement de p mais elle est indépendante de V.

Cependant, pour p et V quelconques, on peut écrire :

$$\frac{V-nb}{nR}p + f(V) = \frac{p}{nR}V + g(p) \tag{45}$$

soit :

$$-\frac{nbp}{nR} + f(V) = g(p) \tag{46}$$

ou encore :

$$f(V) = g(p) + \frac{nbp}{nR} = Cte \tag{47}$$

On pose $Cte = T_0$, alors :

$$g(p) = -\frac{nbp}{nR} + T_0 \qquad \text{et} \qquad f(V) = T_0 \tag{48}$$

d'où l'équation d'état du gaz en question :

$$T = \frac{p(V-nb)}{nR} + T_0 \tag{49}$$

ou aussi :

$$p(V-nb) = nR(T-T_0) \tag{50}$$

Déterminons maintenant les travaux et les quantités de chaleur mis en jeu au cours des différentes transformations :

- Pour la transformation isotherme (1)-(2), on a :

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = -nR(T_1-T_0)\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V-nb} \tag{51}$$

  soit :

$$W_{12} = -p_1(V_1-nb)\ln\frac{V_2-nb}{V_1-nb} \tag{52}$$

  On a aussi :

$$Q_{12} = -W_{12} \tag{53}$$

  car pour cette transformation, qui est isotherme :

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{6}{2}nR(T_2-T_1) = 0 \tag{54}$$

- Pour la transformation isochore (2)-(3) :

$$W_{23} = 0 \tag{55}$$

  On a aussi :

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \Delta U_{23} = U_3 - U_2 = \frac{6}{2}nR(T_3-T_2) \\ &= \frac{6}{2}nR(T_3-T_0) - \frac{6}{2}nR(T_2-T_0) \end{aligned} \tag{56}$$

  soit :

$$Q_{23} = \frac{6}{2}\left(p_3(V_3-nb) - p_2(V_2-nb)\right) \tag{57}$$

- Pour la transformation isobare (3)-(1) :

$$W_{31} = -p_1 \int_{V_3}^{V_1} \mathrm{d}V = -p_1(V_1 - V_3) \tag{58}$$

On a aussi :

$$Q_{31} = \Delta U_{31} - W_{31} \tag{59}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta U_{31} &= U_1 - U_3 = \frac{6}{2} nR(T_1 - T_3) \\ &= \frac{6}{2} nR(T_1 - T_0) - \frac{6}{2} nR(T_3 - T_0)) \\ &= \frac{6}{2} \left(p_1(V_1 - nb) - p_3(V_3 - nb)\right) \\ &= \frac{6}{2} p_1(V_1 - V_3) \end{aligned} \tag{60}$$

c.-à-d. :

$$Q_{31} = \frac{6}{2} p_1(V_1 - V_3) - W_{31} \tag{61}$$

Pour pouvoir effectuer ces calculs, on besoin de connaitre la valeur de la quantité nb. Cependant, d'après la transformation isotherme (1)-(2), il vient :

$$p_1(V_1 - nb) = p_2(V_2 - nb) \tag{62}$$

soit :

$$nb = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{p_1 - p_2} \tag{63}$$

A.N. : $nb = 5{,}556 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$, $W_{12} = -4{,}349\,\mathrm{kJ}$, $Q_{12} = 4{,}349\,\mathrm{kJ}$, $W_{23} = 0\,\mathrm{kJ}$, $Q_{23} = 51\,\mathrm{kJ}$, $W_{31} = 17\,\mathrm{kJ}$ et $Q_{31} = -68\,\mathrm{kJ}$

La machine thermique en question est une machine dynamo-thermique, c.-à-d. une pompe à chaleur. Cette machine peut donc être utilisée soit comme système de refroidissement soit comme système de chauffage. Cependant, son efficacité thermique dépend de son mode d'utilisation :

- En cas d'utilisation comme système de refroidissement :

$$\eta = \left|\frac{Q_\mathrm{f}}{W_\mathrm{f}}\right| = \left|\frac{Q_{12} + Q_{23}}{W_{31}}\right| \tag{64}$$

car la quantité de chaleur fournie $Q_\mathrm{f} = Q_{12} + Q_{23}$ et le travail fourni $W_\mathrm{f} = W_{31}$.
A.N. : $\eta = 3{,}256$.

- En cas d'utilisation comme système de chauffage :

$$\eta' = \left|\frac{Q_\mathrm{c}}{W_\mathrm{f}}\right| = \left|\frac{Q_{31}}{W_{31}}\right| \tag{65}$$

car la quantité de chaleur cédée $Q_\mathrm{c} = Q_{31}$ et le travail fourni $W_\mathrm{f} = W_{31}$.
A.N. : $\eta' = 4$.