

Correction de l'Épreuve de Thermodynamique II *

Responsable : H. Chaib

Filière : SMP, Semestre : 3, Année : 2016/2017

Date : 19-01-2017 à 10:15, Durée : 90 min

Problème 1

1. Un cycle thermodynamique est dit ditherme quand il fait intervenir des échanges d'énergie avec deux sources de chaleur : une source chaude et une source froide.
2. Sachant que le cycle de Carnot est constitué de deux transformations isothermes et deux transformations isentropes et que la pente d'une transformation isotherme est moins abrupte que celle d'une transformation isentrope, alors les transformations (1)-(2) et (3)-(4) sont des isothermes car elles ont des pentes moins abruptes que celles des transformations (2)-(3) et (4)-(1) qui sont des isentropes.
3. (a) Pour les transformations isothermes (1)-(2) et (3)-(4), la variation de l'énergie interne est nulle et par conséquent :

$$Q_{12} = -W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \quad (1)$$

soit :

$$Q_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2)$$

et

$$Q_{34} = -W_{34} = \int_{V_3}^{V_4} p dV = nRT_3 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} \quad (3)$$

soit :

$$Q_{34} = nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (4)$$

- (b) Les variations d'entropie des deux transformations isothermes sont données par :

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T_1} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (5)$$

et

$$\Delta S_{34} = \frac{Q_{34}}{T_3} = nR \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (6)$$

*. La version électronique de l'énoncé et celle de la correction de cette épreuve seront publiés en ligne, quelques heures après la date affichée ci-dessus, sur le site Web : <http://www.fpo.ma/chaib/teaching/>.

- (c) Puisque les variations d'entropie au cours des transformations isentropes sont nulles, alors la variation d'entropie sur tout le cycle s'écrit :

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{34} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} + nR \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (7)$$

soit :

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} \quad (8)$$

4. L'entropie est une fonction d'état et par conséquent sa variation sur un cycle fermé est nulle. Alors :

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} = 0 \quad (9)$$

soit :

$$\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} = 1 \quad (10)$$

d'où :

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{-1} \quad (11)$$

5. L'efficacité thermique du cycle est donnée par :

$$\eta = \left| \frac{W_{\text{utile}}}{Q_{\text{fournie}}} \right| = \left| \frac{W_u}{Q_f} \right| \quad (12)$$

Le travail utile de ce cycle, qui est un cycle moteur, est donné par :

$$W_u = -(Q_{12} + Q_{34}) < 0 \quad (13)$$

Puisque $V_2 < V_1$ et $V_4 > V_3$, alors, d'après les expressions établies ci-dessus, on a $Q_{12} < 0$ et $Q_{34} > 0$ et par suite :

$$Q_f = Q_{34} \quad (14)$$

Ainsi :

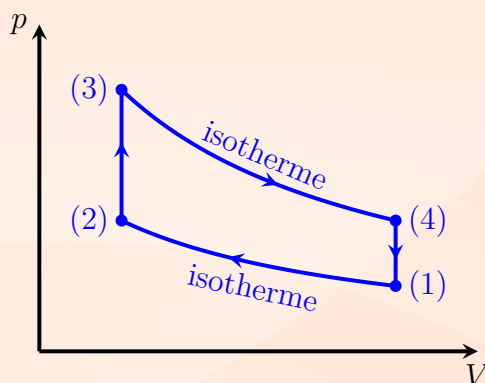
$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{34}} = 1 + \frac{Q_{12}}{Q_{34}} \quad (15)$$

soit, en remplaçant Q_{12} et Q_{34} par leurs expressions et en tenant compte de la relation établie dans la question précédente :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad (16)$$

Problème 2

1. Le cycle en question est un cycle moteur qui contient deux isothermes et deux isochores et pour lequel l'état (1) possède la plus basse pression et l'état (3) possède la plus haute pression. La figure ci-dessous montre la représentation de ce cycle sur le diagramme de Clapeyron.



2. Puisqu'il s'agit d'un gaz parfait diatomique, alors :

$$C_V = \frac{5}{2}nR, \quad V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{nRT_3}{p_3} \quad (17)$$

A.N. : $C_V = 5,196 \text{ J K}^{-1}$, $V_1 = 6,236 \text{ l}$ et $V_3 = 0,877 \text{ l}$.

3. Les transformations (1)-(2) et (3)-(4) sont des transformations isothermes, alors les variations des énergies internes ΔU_{12} et ΔU_{34} sont nulles et par conséquent :

$$Q_{12} = -W_{12} = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (18)$$

Or $V_2 = V_3$, alors :

$$Q_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_3}{V_1} \quad (19)$$

De même :

$$Q_{34} = -W_{34} = nRT_3 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (20)$$

Or $V_4 = V_1$, alors :

$$Q_{34} = nRT_3 \ln \frac{V_1}{V_3} \quad (21)$$

Pour les transformations (2)-(3) et (4)-(1), qui sont des transformations isochores, les travaux volumétriques W_{23} et W_{41} sont nuls et par conséquent :

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \int_{T_2}^{T_3} C_V dT = C_V(T_3 - T_2) \quad (22)$$

et

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = \int_{T_4}^{T_1} C_V dT = C_V(T_1 - T_4) \quad (23)$$

avec :

$$T_2 = T_1 \quad \text{et} \quad T_4 = T_3 \quad (24)$$

A.N. : $Q_{12} = -1,223 \text{ kJ}$, $Q_{34} = 2,752 \text{ kJ}$, $Q_{23} = 1,949 \text{ kJ}$ et $Q_{41} = -1,949 \text{ kJ}$.

4. D'après la définition du travail utile d'un cycle, on peut écrire :

$$W_u = -(Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}) \quad (25)$$

A.N. : $W_u = -1,529 \text{ kJ}$.

5. L'efficacité thermique est donnée par :

$$\eta = \left| \frac{W_{\text{utile}}}{Q_{\text{fournie}}} \right| = \left| \frac{W_u}{Q_{34} + Q_{23}} \right| \quad (26)$$

A.N. : $\eta = 0,325$.

Problème 3

1. La différentielle $dU = C_V dT + (l - p)dV$ est une différentielle totale exacte, alors :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial(l - p)}{\partial T}\right)_V \quad (27)$$

De même, $dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{l}{T}dV$ est une différentielle totale exacte, alors :

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{C_V}{T}\right)}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial\left(\frac{l}{T}\right)}{\partial T}\right)_V \quad (28)$$

2. Ces équations peuvent s'écrire aussi :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (29)$$

et

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \frac{l}{T} \quad (30)$$

En comparant les membres de droite de ces deux dernières équations, on obtient :

$$l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (31)$$

En reportant cette dernière relation dans l'une ou l'autre des équations (29) et (30), il vient :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V \quad (32)$$

3. Dans le cas d'un gaz parfait, la pression p peut s'écrire :

$$p = \frac{nRT}{V} \quad (33)$$

alors :

$$l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nRT}{V} = p \quad (34)$$

4. On a aussi :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0 \quad (35)$$

Donc la capacité calorifique à volume constant C_V est indépendante du volume V .

5. Les différentielles dU et dS , dans le présent cas, s'écrivent :

$$dU = C_V dT + (l - p)dV = C_V dT \quad (36)$$

et

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{l}{T}dV = \frac{C_V}{T}dT + \frac{nR}{V}dV \quad (37)$$

Sachant que C_V ne dépend pas de T , alors l'intégration de ces deux équations permet d'écrire :

$$U = C_V T + U_0 \quad (38)$$

et

$$S = C_V \ln T + nR \ln V + S_0 \quad (39)$$

6. Dans le cas du gaz de Van der Waals, on a :

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (40)$$

soit :

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2} \quad (41)$$

alors :

$$l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nRT}{V - nb} = p + \frac{n^2 a}{V^2} \quad (42)$$

7. On a également :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0 \quad (43)$$

Donc la capacité calorifique C_V de ce gaz est indépendante du volume V .

8. En remplaçant l par son expression dans les expressions de dU et dS , on obtient :

$$dU = C_V dT + (l - p)dV = C_V dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV \quad (44)$$

et

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{l}{T} dV = \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V - nb} dV \quad (45)$$

Étant donné que C_V ne dépend pas de T , alors en intégrant ces deux équations, il vient :

$$U = C_V T - \frac{n^2 a}{V} + U_0 \quad (46)$$

et

$$S = C_V \ln T + nR \ln(V - nb) + S_0 \quad (47)$$