

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

2 ème AnnéeEcole Préparatoire en Sciences et Techniquesd'Oran

Module : Analyse
06\02\2012

Durée : 3h

EXAMEN N° 01

Exercice 01 (03PTS)

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses avec la justification

- 1) Si $u_n > 0$, et si la série $\sum_n u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- 2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, positive et décroissante, telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Soit $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{i=1}^{+\infty} u_n$$

- 3) Si une suite de fonctions $f_n(x)$ intégrable, convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$ alors f est intégrable sur $[a; b]$ et

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Exercice 02 (05PTS)

- 1- Pour chacune des séries numériques suivantes dire si elle est absolument convergente, convergente ou divergente:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}; \quad \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n \log(n+1)}; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

- 2- • Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge.}$$

•Démontrer que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ avec } o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

- Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

TOURNER LA PAGE

Exercice 03 (03PTS)

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

$$\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right); \sum_{n \geq 1} \frac{-a}{n(n+1)}; \quad a \in \mathbb{R}$$

Exercice 04 (05PTS)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \geq 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + xn^2}$$

1- Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
On posera

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x), \quad \forall x > 0$$

- 2- Soit un réel $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
- 3- Montrer que f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
- 4- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- 5- Soit un réel $\alpha \in]1/2, 1[$ et soit $g_n(x) = x^\alpha f_n(x)$. Montrer que la série de fonctions $\sum_n g_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
- 6- En déduire que

$$f(x) = o(x^{-\alpha}), \text{ quand } x \rightarrow 0^+.$$

Exercice 05 (04PTS)

Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_n \frac{C_{2n}^n}{n^n} x^n, x \in \mathbb{R}; \sum_n \sqrt{n} z^n, z \in \mathbb{C}; \sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n! (n+a)!}, x \in \mathbb{R}.$$

BONNE CHANCE