ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGEGNORAT

3ème Année préparatoire **Année Scolaire : 2001/2002**

Partiel n° 1

Module : Analyse III **Semestre :** 5 **Date :** 28/11/2001 **Durée :** 02 heures

BAREME	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Observation

Exercice 1 :

[I]-a) Montrer que :

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{converge} \\ u_n \geqslant 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2 \quad \text{converge} \right)$$

b) Le résultat subsiste-t-il si on enlève la condition $u_n \geqslant 0$?

[II]-Discuter suivant la valeur du ou des paramètres la nature des séries numériques :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n . \left(n^{\frac{1}{n}} - 1 \right) . n^{\alpha} \quad , \alpha \in \mathbb{R} \quad , \alpha < 1$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{\sqrt{n}} + n . \log n}{b^n + (\log n)^{\sqrt{n}}} \quad , (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2 :

En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 n . \sin(t^n) . dt = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

Exercice 3 :

On pose : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, où $x \in \mathbb{R}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de F.

2) On note par $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^x}$.
Calculer alors $\lim_{x \to +\infty} R_n(x)$ et en déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

3) Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur son ensemble de définition.

4) calculer $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} F(x)$.

Corrigé du partiel n° 1.

Exercice n° 1 :

I) a) $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_n u_n = 0 \Rightarrow \exists N \mid \forall n \geq N,\ u_n \leq 1$

donc $u_n^2 \leq u_n \quad \forall n \geq N$

(1,5) pts : or $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge d'après le critère de comparaison.

b) Le résultat est faux si u_n change de signe.

Contre-exemple :

- $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$; $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ série alternée convergente d'après la règle de Leibnitz.

(1,5) pts

- $u_n^2 = \frac{1}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ série harmonique de Riemann divergente.

II)

a) $u_n = (-1)^n \left(n^{1/n} - 1\right) n^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha < 1$

(2,75) pts $u_n = (-1)^n \frac{\log n}{n^{1-\alpha}} + (-1)^n \frac{\log^2 n}{n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{(-1)^n \log^2 n}{n^{2-\alpha}}\right)$

(1,25) pts • $(-1)^n \frac{\log n}{n^{1-\alpha}}$ série alternée convergente d'après la règle de Leibnitz. $(1-\alpha > 0,\ \alpha < 1)$

(1,25) pts • $(-1)^n \frac{\log^2 n}{n^{2-\alpha}}$ absolument convergente, car $\left|\frac{(-1)^n \log^2 n}{n^{2-\alpha}}\right| = \frac{\log^2 n}{n^{2-\alpha}}$

qui est série de Bertrand convergente car $2-\alpha > 1$.

(1,25) pts • $\left|o\left(\frac{(-1)^n \log^2 n}{n^{2-\alpha}}\right)\right| \leq \frac{C \log^2 n}{n^{2-\alpha}}$ tqs série de Bertrand convergente $(2-\alpha > 1)$.

donc $o\left(\frac{(-1)^n \log^2 n}{n^{2-\alpha}}\right)$ absolument convergente.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a^{\sqrt{n}} + n\log n}{b^n + (\log n)^{\sqrt{n}}} \; ; \text{ on pose } u_n = \frac{a^{\sqrt{n}} + n\log n}{b^n + (\log n)^{\sqrt{n}}} \quad \forall n \geq 1.$$

1er cas :

$a, b \in]0,1]$ ou $a \in]0,1]$ et $b > 1$

$$u_n \sim \frac{n\log n}{(\log n)^{\sqrt{n}}} = v_n \text{ , donc } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ et } \sum_{n\geq 2} v_n \text{ sont de même nature}$$

On a $\lim_n n^2 v_n = \lim_n \frac{n^3 \log n}{(\log n)^{\sqrt{n}}} = 0$

1)pt

Or $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ série de Reimann convergente $\Rightarrow \sum v_n$ est convergente

par suite $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2e cas :

$a > 1$ et $b > 1$

$$u_n \sim \frac{a^{\sqrt{n}}}{b^n} = v_n$$

$$\sqrt[n]{v_n} = \frac{a^{1/\sqrt{n}}}{b} = \frac{1}{b} e^{\frac{\log a}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{b} < 1$$

5)pt

donc d'après la règle de cauchy $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente

par suite $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente

3e cas : $a > 1$ et $b \in]0,1]$

$$u_n \sim \frac{a^{\sqrt{n}}}{(\log n)^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{a}{\log n}\right)^{\sqrt{n}} = v_n$$

15)pt

On vérifie facilement que $\lim_n n^2 v_n = 0$, or $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ est convergente

$\Rightarrow \sum v_n$ est convergente $\Rightarrow \sum u_n$ est convergente.

$\Leftarrow$ " est convergente $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT.

3ème Année préparatoire **Année Scolaire : 2001/2002**

PARTIEL N°2.

Module : Analyse III **Semestre : 5** **Date : 02/02/2002** **Durée : 2H00**

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}
Barème											

Exercice n°1 :

Soit la série entière

$$s(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}.$$

a) Calculer le rayon de convergence R de cette série.

b) Calculer la série entière $(xs(x))' - 1$ pour $x \in]-R, R[$.

c) En déduire la somme $s(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

d) Trouver une série numérique dont la somme est égale à $\log 2$.

Exercice n°2 :

Soit

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Former une équation différentielle qui est vérifiée par f.

b) Calculer le développement en série entière en $x_0 = 0$ de la fonction f.

c) Calculer son rayon de convergence.

d) En déduire le développement en série entière de la fonction $g(x) = (\arcsin x)^2$.

Problème :

I) 1°) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\pi \text{ ou } x = 0 \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) vérifier que f est impaire et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan euclidien pour $x \in [-4\pi, 4\pi]$.

b) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.

c) La série de Fourier f :

i) converge-t-elle simplement vers f sur $\mathbb{R}$?

ii) converge-t-elle uniformement vers f sur $\mathbb{R}$?

(On justifiera, avec soin, les réponses données en c.i,ii).

2^0)

a) Etudier la convergence de la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

c)Etudier la convergence de la série de terme général :

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

d) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

II)

Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha},$$

avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ n'est pas une série de $\mathcal{F}$ourier.

(Les parties **I** et **II** sont indépendantes).

*B*onne chance.

ÉCOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGENIORAT

3ème **Année Préparatoire** **Année Scolaire** : 2002/2003

PARTIEL II

Module : **Analyse III** **Semestre** : 5ème **Date** : 05/01/2003 **Durée** :02 heures...

Exercice 1. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}x^n; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2^2+\ldots+n^2}x^n; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2^2+\ldots+n^2}x^n. \qquad (3pts)$$

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme des séries entières suivantes:

$$1)\ \sum_{n\geq 0} \sin(n\frac{\pi}{2})x^n; \qquad (2,5\ pts) \qquad 2)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-n+1}{n!}x^n\ . \qquad (2,5)\ pts.$$

Exercice 3. On considère la série entière:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n+1}}{n+1}.$$

1. Donner le rayon de convergence R. (1 *pt*)
2. Etudier la convergence aux points $x = \pm R$. (1 *pt*)
3. Etudier la convergence normale et uniforme sur le domaine de convergence. ((1 + 2) *pts*)
4. Calculer la somme de la série. (2*pts*)

   Indication: utiliser le changement $t = x^3$.

Exercice 4

1. On considère la série de fonctions:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}.$$

   - Etudier la convergence simple. (1 *pt*)
   - Déterminer tous les ensembles sur lesquels on a une convergence uniforme. (2 *pts*).

2. Montrer par ailleurs que la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin x \sin nx}{n}$$

est uniformément convergente sur **IR**. (2 *pts*)

ENPEF

Samedi 17/05/03

3e année préparatoire

Analyse III

Examen de rattrapage

Durée : 02 Heures

Exercice 1 : Soit f la fonction 2π périodique définie par :

$$f(x) = x^2 + |x| \quad \text{pour } x \in [0, 2\pi[$$

1) Construire le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi[$ (1 pt)

2) Developper f en série de Fourier (2 pts)

3) calculer

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (2 \text{ pts})$$

en utilisant la question 2°

Exercice 2 : On considère la fonction $g(z) = \dfrac{\cos z}{(z+1)^2}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

1) Developper en série de Laurent la fonction g au voisinage de -1. (3 pts)

2) Calculer le résidu de g au point $z_0 = -1$ (1 pt)

3) Evaluer l'intégrale $\displaystyle\oint_{|z|=2} g(z)\, dz$ (1 pt)

Exercice 3 En utilisant le théorème des résidus, déterminer

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\, dx \qquad (2 \text{ pts})$$

2) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx \qquad (4 \text{ pts})$$

3) $$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx \qquad (4 \text{ pts})$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

3° année prépartoire — année scolaire: 2002/2003

Partiel N°2

Module: analyse III — **Semestre: 6** — **Date: 16/04/2003** — **Durée: 02 Heures**

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Observation
Barême											

Exercice 1

Soit f la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = x^2 + x$ pour $x \in [0, \pi]$.

a)- Construire le graphe sur $[-3\pi, 3\pi[$. **(1pt)**

b)- Déterminer un développement en série de Fourier de f. **(2 pts)**

c)- En déduire la somme des séries numériques

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$ **(2pts)**

Exercice 2

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \exp(2z) / (z-1)^3$.

1)- Développer en série de Laurent, la fonction g au voisinage de $z = 1$. **(3pts)**

2)- En déduire le résidu de g au point $z = 1$. **(1pt)**

3)- Trouver alors la valeur de l'intégrale $\oint\limits_{|z|=2} g(z)dz$. **(1pt)**

Exercice 3

1)-Déterminer les pôles de la fonction complexe

$$h(z) = 1/(z^2+4)\left(z^2+4z+5\right)^2$$

situés dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$. **(2 pts)**

2)- Pour chaque pôle, calculer le résidu correspondant. **(2 pts)**

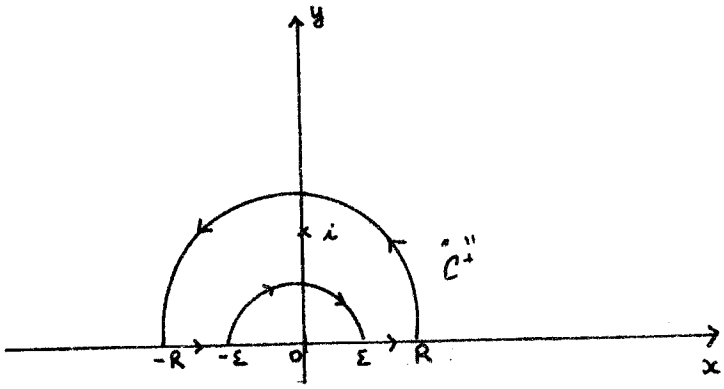
3)- En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)\left(x^2+4x+5\right)^2} dx$$ **(1pt)**

Exercice 4

Soit $u(z) = \exp(iz)/z(z^2+1)$. En intégrant u sur le contour C ci-dessous, calculer l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)} dx$$ **(5 pts)**



ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

3ème Année Préparatoire **Année Scolaire 2003/2004**

PARTIEL I

Module : Analyse III **Semestre : 5ème** **Date 18/11/2003** **Durée : 02 Heures**

Exercice 1 On considère l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \qquad (1)$$

où α est un réel quelconque.

1. Montrer que l'intégrale (1) est absolument convergente pour $\alpha \in]1, 2[$. (1 *pt*)
2. Montrer que l'intégrale (1) est semi-convergente pour $\alpha \in]0, 1]$. (2, 5 *pts*)
   Indication : $|\sin x| \geq \sin^2 x$.
3. Montrer que l'intégrale (1) est divergente pour $\alpha \geq 2$. (1 *pt*)
4. On suppose que $\alpha \leq 0$.Montrer que l'intégrale

$$\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

est minorée par un nombre réel positif indépendent de k. En déduire que l'intégrale (1) est divergente pour$\alpha \leq 0$. (2, 5 *pts*)

Exercice 2 Calculer la somme partielle de la série dont le terme général est

$$u_n = \text{Log}\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) . \qquad (2\ pts)$$

En déduire la nature de cette série et dans le cas où il y a convergence calculer sa somme (*1 pt*).

Même questions avec $v_n = \text{Arctg}\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ (*3 pts*)

Indication : Remarquer que $\frac{1}{2n^2} = \dfrac{\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1}}{1 + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1}}$

Exercice 3 Etudier la nature des séries numériques suivantes

$\sum \frac{\text{Log}(n+1)}{\text{Log}n}$; $\sum \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$; $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$; $\sum \frac{n \sin n}{3^n}$. (1+2+2+2 *pts*)

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D' INGENIORAT

3 ème Année Préparatoire **Année Scolaire 2003/2004**

PARTIEL II

Date : 12 Février 2004 **Semestre : 5** **Durée : 02 Heures**

Note: Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation de la copie.

EXERCICE 1 : Etudier la nature da la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}} \exp(-\frac{1}{n^2+1})$ (2 pts)

EXERCICE 2 : Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x| & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^*$. (1 pt)
2) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$, $a>0$. (2 pts)
A-t-on convergence uniforme sur $[-a,a]\setminus\{0\}$? (1 pt)
3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$. (1 pt)
4) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,g(x)dx = g(0).$$ (3 pts)

EXERCICE 3 : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \exp(-nx^2)$.

1) Montrer qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
2) a) On note par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+1}\exp(-nx^2)$ le terme général de cette série de fonctions. On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n'(x)$. Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}'(x)|$. (1 pt)
b) Déterminer $\sup\{x\exp(-nx^2),\ x\in\mathbb{R}^+\}$. (1 pt)
c) En déduire que

$$|R_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{e\,(n+1)}}\,\frac{1}{(n+1)},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$ (1 pt)

d) Conclure. (1 pt)

EXERCICE 4 : Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

1) Déterminer le rayon de convergence. (1 pt)
2) En décomposant $\frac{1}{4n^2-1}$ en éléments simples, calculer la somme de cette série entière. (1 pt+3 pts)

E.N.P.E.I. **3 ème année préparatoire** **Année Scolaire 2003/2004.**

ANALYSE III **Durée 02 Heures** **Date 07 Avril 2004**

Partiel III.

EXERCICE 1 : Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire les sommes suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n>1} \frac{1}{n^4}. \qquad (2\,pts + 1\,pt + 1\,pt + 2\,pts)$$

EXERCICE 2 :

I)- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$\exp(z) = -2; \qquad \cos z = 2. \qquad (1,5\,pt + 1,5\,pt)$$

II)- Soit $v(x,y) = 2y(x-2)$. Trouver toutes les fonctions u telle que la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$. Vérifier que dans tous les cas f est un polynôme. $(2\,pts + 1\,pt)$

EXERCICE 3. Développer la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^2 - z - 12}$ en série de Laurent sur la couronne

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C},\ 3 < |z| < 4\}$$

en envisageant tous les cas possibles. $(4\,pts)$

EXERCICE 4 Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$.

a)- Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est une fonction constante. $(2\,pts)$

b)- Plus généralement, montrer que si $|f(z)| \leq P(|z|)$ où P est un polynôme alors f est un polynôme. $(2\,pts)$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D' INGENIORAT

3 ème Année Préparatoire **Année Scolaire 2003/2004**

SYNTHESE

Date : 27 Mai 2004 **Semestre : 6** **Durée : 02 Heures**

Note: Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation de la copie.

EXERCICE 1 : (7 pts)

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx, \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+16)^2}dx, \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\cos x}dx.$$

EXERCICE 2 : (3 pts)

Soit $f : \mathcal{D} \to \Omega$ une application bijective et analytique sur $\mathcal{D}$. On admet que f^{-1} est analytique sur Ω.

1)- Vérifier que $\forall w \in \Omega \ (f^{-1})'(w) = \left(f'\left(f^{-1}\right)(w)\right)^{-1}$.

2)- Montrer la formule de Cauchy suivante :

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$$

où C est un cercle de centre $f^{-1}(w)$ et de rayon R de sorte que C est contenu strictement dans $\mathcal{D}$.

EXERCICE 3 : (6 pts)

1)- Vérifier que $\mathcal{L}\left(\sqrt{t}\right)(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{z^{3/2}}$, $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

2)- Ecrire une équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction $\sin\left(\sqrt{t}\right)$.

3)- En déduire $\mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{t}\right)\right)(z)$.

Indication: utiliser $\sin\left(\sqrt{t}\right) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$ et la question 1°.

4)- Calculer $\mathcal{L}\left(\frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\right)(z)$.

EXERCICE 4 : (4 pts)

On considère la suite de fonctions $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1 - n^2x^2 & \text{si } x \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1)- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, δ_n est une fonction paire et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

2)- Déterminer la transformée de fourier $\mathcal{F}(\delta_n)$ de δ_n.

3)- Calculer $\lim_{n\to+\infty}\mathcal{F}(\delta_n)$ et $\mathcal{F}\left(\lim_{n\to+\infty}\delta_n\right)$. Conclure.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D' INGENIORAT

3 ème Année Préparatoire **Année Scolaire 2003/2004**

CORRIGE DE LA SYNTHESE ANALYSE III

Date : 27 Mai 2004 **Semestre : 6** **Durée : 02 Heures**

.

EXERCICE 1 : (7 pts)

1°) On a $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \pi i(\text{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4}\right) + \text{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i3\pi/4}\right)) = \frac{\pi i}{4}\left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. $(2pts)$

2°) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+16)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+16)^2} = \pi i \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+16)^2}, 4i\right) = \pi i \frac{-2}{(z+4i)^3}|_{z=4i} = \frac{\pi}{256}$ $(2pts)$.

3°) $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3+\cos x}dx = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{z+1/z}{2}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+6z+1}\frac{dz}{i} = \pi(\text{Res}(\frac{1}{z^2+6z+1}, -3+2\sqrt{2})) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ $(3pts)$.

EXERCICE 2 : (3 pts)

Soit $f : \mathcal{D} \to \Omega$ une application bijective et analytique sur $\mathcal{D}$. On admet que f^{-1} est analytique sur Ω.
1)- On a que $\forall w \in \Omega \quad f\left(f^{-1}\right)(w) = w$ alors en dérivant on obtient $\left(f^{-1}\right)'(w)\left(f'\left(f^{-1}\right)(w)\right) = 1$. D'où $\left(f^{-1}\right)'(w) = \left(f'\left(f^{-1}\right)(w)\right)^{-1}$. $(1pt)$
2)- D'après la formule de Cauchy appliquée à f^{-1} on a :

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} \frac{f^{-1}(u)}{u-w}du$$

où C' est un cercle de centre w, et de rayon R' de sorte que C' est contenu strictement dans Ω. En faisant le changement de variable $z = f^{-1}(u)$ il vient que $f'(z)dz = du$ et comme f^{-1} est analytique sur Ω et que Ω est un ouvert il s'ensuit que l'on peut toujours trouver une boule fermée de centre $f^{-1}(w)$ et de rayon R de sorte que cette boule est contenu strictement dans $\mathcal{D}$ et en notant par C la frontière de cette boule il en découle que $f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} \frac{f^{-1}(u)}{u-w}du = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$. (2pts)

EXERCICE 3 :(6 pts)

1)- On a $\mathcal{L}\left(\sqrt{t}\right)(z) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-zt}dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-zt^2}dt = 1/z\int_0^{+\infty} e^{-zt^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{z^{3/2}}$, $\mathfrak{Re}(z) > 0$. (2pts)
2)- On a $\sin'\left(\sqrt{t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}$ et $\sin''\left(\sqrt{t}\right) = \frac{-1}{4}\left(\frac{\cos\sqrt{t}}{t\sqrt{t}} + \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\right)$ e et si on note $y = \sin\sqrt{t}$ il s'ensuit que $y" = \frac{-1}{4}\left(\frac{2y'}{t} + \frac{y}{t}\right)$d'où l'équation $4ty" + 2y' + y = 0$. (1.5pts)

3)- On a $\mathcal{L}(4ty" + 2y' + y) = 0$ et en utilisant les propriétés de la transformation de Laplace on obtient $-4z\Psi' + (1-6z)\Psi = 0$ où $\Psi = \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin\left(\sqrt{t}\right)$. On obtient alors $\Psi(z) = K\frac{1}{z\sqrt{z}}e^{-1/4z}$ avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$. Comme $f(t) = \sin\left(\sqrt{t}\right) - \sqrt{t} \underset{t\overset{>}{\to}0}{\to} 0$ et $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\sin\sqrt{t} - \sqrt{t})(z) = \frac{1}{z\sqrt{z}}\left(Ke^{-1/4z} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ et d'après la formule de la valeur initiale on trouve necéssairement $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en passant à la limite sur $z \to \infty$. (2pts)

4)- on a $\mathcal{L}\left(\frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\right)(z) = 2.\mathcal{L}\left(\sin'\sqrt{t}\right) = \sqrt{\pi}e^{-1/4z}\frac{1}{\sqrt{z}}$ $\mathfrak{Re}\,(z) > 0$ (0.5 pt).

EXERCICE 4 : (4 pts)

On considère la suite de fonctions $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1 - n^2x^2 \text{ si } x \in [-1/n, 1/n] \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

1)- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, δ_n est une fonction paire car

$$\delta_n(-x) = \begin{cases} 1 - n^2\left(-x\right)^2 \text{ si -}x \in [-1/n, 1/n] \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 - n^2x^2 \text{ si } x \in [-1/n, 1/n] \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases} = \delta_n(x)$$

et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ car δ_n est continue (sur $\mathbb{R}$) et à support compact $[-1/n, 1/n]$. (1pt)

2)- La transformée de fourier de δ_n notée $\mathcal{F}\left(\delta_n\right)(\lambda)$ est égale à

$$2\int_0^{1/n}\left(1 - n^2x^2\right)\cos\lambda x dx = \begin{cases} \frac{4}{3n}\left(-\lambda\cos\lambda/n + n\sin\lambda/n\right) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \frac{4}{3n} & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \quad (1.5\text{pts})$$

3)- on a $\lim_{n\to+\infty}\mathcal{F}\left(\delta_n\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\delta_n\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et par suite $\mathcal{F}\left(\lim_{n\to+\infty}\delta_n\right) = 0$. on a donc $\lim_{n\to+\infty}\mathcal{F}\left(\delta_n\right) = \mathcal{F}\left(\lim_{n\to+\infty}\delta_n\right)$. (1.5pts)

Ecole Nationale Préparatoire
aux
Etudes d'Ingéniorat

Analyse III
Partiel 1

Année 2004–2005
$3^{éme}$ année préparatoire
08 Décembre 2004

Exercice 1 (4 points) *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que la série suivante est absolument convergente* *(1.5 pts)*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(nx)}{2^n}.$$

2. *Calculer sa somme en utilisant* $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$. *(2.5 pts)*

Exercice 2 (9 points) *Etudier la nature des séries numériques suivantes :*

$$1)\ \sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n-2}{n^2+1};\quad 2)\ \sum_{n\geq 1}(e^{\frac{1}{n^2}}-1);\quad 3)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{1+n^3};$$

$$4)\ \sum_{n\geq 1}(\cos n!)^n e^{-n};\quad 5)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2n+1}{3n}\right)^n;\quad 6)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1.5.9...(4n+1)}{2.6.10....(4n+2)}.\frac{1}{n}\right).$$

(1 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 2 pts)

Exercice 3 (3 points)

1. *Ecrire en fonction de cosinus l'expression* $\sin n \sin(n^2)$. *(1 pt)*

2. *Calculer en fonction de n la somme* $\sum_{k=1}^{n} \sin k \sin(k^2)$. *(1 pt)*

3. *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n \sin(n^2)}{n^\alpha}$ *pour* $\alpha > 0$. *(1 pt)*

Exercice 4 (4 points) *Soit $\alpha > 1$. On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x(n-x)}{n^\alpha} & si \quad x \in [0,n] \\ 0 & si \quad x > n. \end{cases};$$

1. *Montrer que f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.* *(1 pt)*

2. *Etudier suivant les valeurs de α, la convergence uniforme de f_n .* *(3 pts)*

(Bon courage)

Examen pour Mlle Kassoussi Karima

Exercice 1 : Déterminer la nature des séries numériques suivantes

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ (1pt) (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-1}{n+1}$ (1pt) (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(e^n)}{n\sqrt{n}}$ (1

(d) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n^2}$ (2pt) (e) $\sum_{n\geq 0} \frac{1.3.5\cdots(2n+1)}{2.5.11\cdots(3n+2)} \cdot \frac{3^n+1}{2^n+1}$ (2,

(f) $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n + n^a}{n^2+2^n}$ avec $a>0$ (1,5)

(g) $\sum_{n\geq 2} \frac{\left[(-1)^n \log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right]}{n+(-1)^n}$ (1,5) (h) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left\{n^2 \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right\}$ (1)

Exercice 2 : on considère la série numérique suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}}$$

(1) (1) Exprimer $\cos\left(k^2+k+\frac{1}{2}\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)$ en fonction de sinus

(1) (2) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(k^2+k+\frac{1}{2}\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)$

(1) (3) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)\sin(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{n}}$

Exercice 3 : Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions f_n définie par :

(5)

$$f_n(x) = x^n(1-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

E.N.P.E.I. Date: 12 Avril 2005 Durée 02 Heures
3ème année préparatoire

PARTIEL II ANALYSE III

Exercice 1. Soit la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1} x^{2n+1}$.

1- Déterminer son rayon de convergence R. 1 *pt*

2- Etudier la convergence aux points $x = \pm R$. 1 *pt*

3- Déterminer sa somme. On pourra s'aider de la relation

$$\frac{n}{n+1} x^{2n+1} = x^{2n+1} - \frac{1}{x}\frac{1}{n+1} x^{2n+2}, \ \forall x \neq 0.$$

2 *pts*

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{C}^*$ la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z = x+iy$, $i^2 = -1$.

1- Montrer que f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}^*$. 2 *pts*

2- Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z. 1 *pt*

3- Montrer que pour tout $r > 0$ $\oint_{C(0,r)} f(z)dz = 0$ où $C(0,r)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon r. Interpréter ce résultat. 2 *pts*

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & \text{si } -\pi \leq x < -\pi/2 \\ x & \text{si } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ -x+\pi & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

On prolonge f par 2π périodicité à $\mathbb{R}$ et on veut développer f en série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

1- Tracer f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. 0.5 *pt*

2- f est-elle paire ? est-elle impaire ? Justifier votre réponse. 1 *pt*

3- Vérifier que

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)(\cos nt)\,dt, \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)(\sin nt)\,dt.$$

et en déduire les valeurs des coefficients a_n et b_n. 2 *pts*

4- Développer f en série de Fourier (Il s'agit d'appliquer le théorème de Dirichlet). 2 *pts*

5- Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et en déduire $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$. 1.5 *pt*

Exercice 4. Soit la série de fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-n} \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$.

1- En utilisant le théorème de la dérivation pour les séries de fonctions montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ i.e. de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. 2 *pts*

2- Déterminer f. On remarquera que $\sin nx = \mathrm{Im}(e^{inx})$, $i^2 = -1$. 2 *pts*

Examen de rattrapage :

Exercice 1 : Soit la série $\sum_{n\geq 0} \sin\frac{n\pi}{2}\, x^n$

1) Donner le rayon de convergence et le domaine de convergence
2) Calculer la somme

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-t+1)}$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t \, dt}{(1+\sin^2 t)}$

Exercice 3 : Développer en série de Laurent :

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$$

autour de l'origine

Exercice 4 : Développer $f(x) = x^2 - \pi^2$ 2π-périodique en série de Fourier (sur $[-\pi, \pi[$)
En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$$

Ecole Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingéniorat

Analyse III

Synthèse

Année 2004–2005

$3^{éme}$ année préparatoire

Exercice 1 (5points) *Donner les différents développements en série de puissances de z de la fonction $f(z) = \dfrac{z^2+z-4}{(z-3)(z^2-1)}$, en précisant leurs domaines de validité.*

Exercice 2 (2+2+3 points) *Calculer, par la méthode des résidus, les intégrales suivantes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4}\, dx,$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2},$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2}\, dx \ ; \ a > 0.$$

Exercice 3 (4 points) *Calculer la tronsformée de Fourier de la fonction suivante*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-1,1], \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

Exercice 4 (4 points) *Montrer que :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n} = -\log(2\sin\frac{x}{2}).$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$

Bon Courage

Ecole Nationale Préparatoire
aux
Etudes d'Ingéniorat

Analyse III

Rattrapage

Année 2004–2005

$3^{éme}$ année préparatoire

Exercice 1 (4points) *On considère la fonction* $Q(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y$. *Déterminer les fonctions réelles* $P(x,y)$ *telles que* $P(x,y) + iQ(x,y)$ *soit holomorphe dans* $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (6 points) *Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes*

$$f(x) = e^{-|x|} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \quad ;$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5} \quad .$$

Exercice 3 (10 points) *On cherche à calculer l'intégrale*

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}, a > 0.$$

1. *Montrer que cette intégrale est absolument convergente.*
2. *Montrer que* $I(k)$ *est une fonction paire de* k.
3. *On se place désormais dans le cas où* $k \geq 0$, *et on considère la fonction*
$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}.$$
Soit Γ *le contour fermé, orienté dans le sens positif, constitué par le segment d'axe réel* γ_1 $(-R < x < +R)$ *et le demi-cercle supérieur* γ_R *de centre* O *et de rayon* R, *avec* $R >> a$. *Montrer que* $\lim\limits_{R \longrightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz = I(k)$.
4. *Donner une majoration de* $|f|$*sur* γ_R. *En déduire la valeur de* $\lim\limits_{R \longrightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz$. *Le résultat est-il le même pour* $k < 0$?
5. *En écrivant* $f(z)$ *sous la forme* $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-ia}$, *et en appliquant une des relations intégrales de Cauchy, calculer* $\oint_\Gamma f(z)dz$.
6. *Déduire des résultats ci-dessus la valeur de* $I(k)$ *pour* $k \geq 0$. *Donner une expression de* $I(k)$ *valable pour* k *quelconque.*

Bon Courage

Ecole Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingéniorat	Analyse III Partiel II, Durée 02 heures	Année 2004–2005 $3^{éme}$ année préparatoire 26 mars 2006

Exercice 1 (2+2+2)

i) *Pour chacune des séries entières dont le terme général est donné ci-dessous, déterminer le domaine de convergence :*

$$u_n = \frac{3^n}{n!}x^n; \quad v_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2} x^n.$$

ii) *Calculer la somme de la série numérique* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}$.

iii) *iii) Développer en série entière la fonction* $x \mapsto \sin^3 x$ *et préciser le domaine de validité.*

Exercice 2 (0.5 +1 +2 +3.5) *Soit la fonction périodique de période* 2π *définie par* $f(x) = x^2 - \pi^2$ *pour* $x \in [-\pi, \pi[$.

1. *Donner le graphe de* f *sur* $[-3\pi, 3\pi[$.
2. *Montrer que* f *est développable en série de Fourier et préciser la nature de la convergence de cette série.*
3. *Vérifier que* f *est paire et donner le développement.*
4. *En déduire les sommes suivantes*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2},$$
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}, \ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 3 (2.5+2)

1. *Soit* f *une fonction holomorphe dont la partie réelle (ou la partie imaginaire) est constante. Démontrer que* f *est constante. En déduire que les fonctions* g, h, k *définies pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *par*
$$g(z) = \mathrm{Re}(z), \ h(z) = \mathrm{Im}(z), \ k(z) = |z|$$
ne sont pas holomorphes.
2. *Donner les différents développements en série de puissances de* z *de la fonction* $u(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)(z-3)}$, *en précisant leurs domaines de validité.*

Exercice 4 (2.5) *Etudier la convergence uniforme de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(1+x)\cdots(1+x^n)}$ *sur* $[1, +\infty[$.

Ecole Nationale Préparatoire
aux
Etudes d'Ingéniorat

Analyse III
Synthèse, Durée 02 heures

Année 2005-2006
$3^{éme}$ année préparatoire
21 mai 2006

Exercice 1 (2+3 points)

1. *Montrer que pour toute fonction f, continue sur $[0, \pi]$*

$$\int_0^{\pi} f(\sin\theta)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)d\theta.$$

2. *Caluler par la méthode des résidus l'intégrale :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + \sin^2(x)}, a > 0.$$

Exercice 2 (5 points) *En utilisant comme contour le rectangle défini par les points $(-R, 0), (R, 0), (R, 2\pi), (-R, 2\pi)$; Prouver que si $\cancel{0 > a > 1}$, alors :* $0 < a < 1$

$$\int_{\cancel{0}\,-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Exercice 3 (1+2+2 points) *Soit $F(p)$ l'image par la transformation de Laplace de $f(t)$. On note $f(t) \doteqdot F(p)$.*

1. *Montrer que si $\theta > 0$, $f(t - \theta) \doteqdot e^{-p\theta}F(p)$.*

2. *Soit*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que $\eta(t) + t.\eta(t-3) \doteqdot \frac{1}{p} + (\frac{1}{p^2} + \frac{3}{p})e^{-3p}$

3. *Résoudre l'équation :*

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) & = \eta(t) + t.\eta(t-3) \\ y(0) = y'(0) = 0 & \end{cases}$$

Exercice 4 ((1+1)+(1+2) points) *Soit $a > 0$, on pose*

$$f(x) = e^{-a|x|}$$
$$g(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si\ x \geq 0 \\ -e^{ax} & si\ x < 0 \end{cases}$$

1. *Trouver les transformées de Fourier de f et g.*

2. *En déduire les valeurs des intégrales :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{a^2 + t^2}dt \quad et \quad \int_0^{+\infty} \frac{t\sin tx}{a^2 + t^2}dt$$

Bon Courage

Ecole Nationale Préparatoire
aux
Etudes d'Ingéniorat

Analyse III
Rattrapage, Durée 02 heures

Année 2005-2006
$3^{éme}$ année préparatoire
Juin 2006

Exercice 1 (0.5 +1 +2 +2.5) *Soit la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2 - \pi^2$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.*

1. *Donner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi[$.*
2. *Montrer que f est développable en série de Fourier et préciser la nature de la convergence de cette série.*
3. *Donner le développement de Fourier de f.*
4. *En déduire les sommes suivantes*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2 (4 points) *Donner les différents développements en série de puissances de z de la fonction $f(z) = \dfrac{4 - z - z^2}{(3-z)(1-z^2)}$, en précisant leurs domaines de validité.*

Exercice 3 (4 points) *En utilisant comme contour le rectangle défini par les points $(-R, 0), (R, 0), (R, \pi), (-R, \pi)$ et en justifiant tous vos calculs. Prouver que si $0 < a < 1$, alors :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{chx} dx = \frac{\pi}{\sin\left[(a+1)\frac{\pi}{2}\right]}.$$

Indication : *Cet exercice ressemble à celui de la synthèse.*

Exercice 4 (1.5 +1.5 +1)

1. *Calculer*

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

2. *Calculer*

$$J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

3. *Calculer $\lim\limits_{b \to a} J(a, b)$. Conclure*

Exercice 5 (1+1 points) *Soit $a > 0$, et la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-a, a] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Trouver la transformées de Fourier de f.*
2. *En déduire la valeur de l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Bon Courage