Corrigé de l'examen d'analyse complexe du Jeudi 11 juin 2015

Exercice 1. (3 pts)
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\sin(z) = 4$.
b) Calculer les déterminations principales des logarithmes suivants : $\log(-1+i)$ et $\log((-1+i)^2)$. Que remarque t-on ?

Corrigé :
a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\sin(z) = 4 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i} = 4 \Leftrightarrow \left(e^{iz}\right)^2 - 8ie^{iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 8iX - 1 = 0 \text{ où } X = \mathrm{e}^{iz}$$

Cette équation du second degré a pour solutions $X_1 = i(4-\sqrt{15})$ et $X_2 = i(4+\sqrt{15})$. Comme $4-\sqrt{15} > 0$, on a $X_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}+\ln(4-\sqrt{15})}$ et de même, $X_2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}+\ln(4+\sqrt{15})}$. En utilisant que $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z' = z + 2ik\pi$, la résolution complète donne alors pour ensemble de solutions de l'équation $\sin(z) = 4$, l'ensemble :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} - i\ln(4-\sqrt{15}) + 2ik\pi\,;\, \frac{\pi}{2} - i\ln(4+\sqrt{15}) + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) On a $-1+i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}$. Comme $\frac{3i\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$, l'argument principal de $-1+i$ est donc $\frac{3\pi}{4}$. On obtient donc :

$$\log(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + \frac{3i\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4}$$

Puis, $(-1+i)^2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}-2i\pi} = 2\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{2}}$ avec $-\frac{i\pi}{2} \in]-\pi;\pi]$. On obtient donc :

$$\log\left((-1+i)^2\right) = \ln(2) - \frac{i\pi}{2}$$

On remarque alors que $\log((-1+i)^2) \neq 2\log(-1+i)$ puisque leur différence vaut $-2i\pi$.

Exercice 2. (4 pts)
Montrer que : $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin(t)}\mathrm{d}t = 2\pi\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Corrigé :
On utilise le paramétrage $z = \mathrm{e}^{it}$, où $t \in [0;2\pi]$, du cercle unité $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0;1)$. On a $\mathrm{d}z = i\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$ et $\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. Donc on a :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin(t)}\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{iz\left(3 + \frac{2}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)} = \int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z$$

où $f(z) = \frac{1}{z^2+3iz-1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des racines du dénominateur $z_1 = -i\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = -i\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Notons que seul z_2 est contenu dans le domaine intérieur à $\mathcal{C}$. f est holomorphe sur un ouvert contenant $\mathcal{C}$ privé de z_2 qui est un pôle de f d'ordre 1. D'après le théorème des résidus appliqué à f, on en déduit que $I = 2i\pi Res(f, z_2)$. Ce résidu étant d'ordre 1, on a :

$$Res(f, z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{i\sqrt{5}} = -i\frac{\sqrt{5}}{5}$$

On obtient bien $I = 2i\pi\left(-i\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 2\pi\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Remarquons que nous aurions pu aussi décomposer f en éléments simples et utiliser les formules de Cauchy.

<u>Exercice 3.</u> (3 pts)
Calculer $I = \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\mathrm{d}z$ où $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre 2 et de rayon $\frac{1}{2}$.

Corrigé :
La fonction $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{1;2\} \mapsto \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} \in \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1;2\}$. 1 est pôle d'ordre 1 et 2 est pôle d'ordre 2. Seul 2 est intérieur à $\mathcal{C}$, donc d'après la formule des résidus, on a $I = 2i\pi Res(f;2)$. 2 étant un pôle d'ordre 2, on a $Res(f;2) = \frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-2)^2 f(z)\right)$. Soit $g(z) = (z-2)^2 f(z) = \frac{z}{z-1}$. On a $g'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2} \underset{z\to 2}{\longrightarrow} -1$. Donc, on obtient $I = -2i\pi$.

<u>Exercice 4.</u> (4 pts)
Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $0 < |a| < |b| - 1$. Développer (en justifiant brièvement chaque convergence) $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ en série de Laurent sur les domaines suivants :
a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |a| < |z| < |b|\}$.
b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z-a| < 1\}$.

Corrigé :
a) D_1 est centré en 0, donc on développe selon les puissances de z. La décomposition en éléments simples de f donne :

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right)$$

Pour tout $z \in D_1$, on a : $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ et $\left|\frac{z}{b}\right| < 1$. On en déduit (séries géométriques) que :

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n} \text{ et } \frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}$$

On en déduit le développement en série de Laurent de f sur D_1 :

$$\forall z \in D_1\,,\ f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^p}{b^{p+1}}\right)$$

b) D_2 est une couronne centrée en a, donc on développe cette fois-ci selon les puissances de $z-a$. Le terme $\frac{1}{z-a} = (z-a)^{-1}$ est déjà développé en série de Laurent ! Puis, on écrit :

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a+a-b} = \frac{1}{a-b} \times \frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

car $|z-a| < 1 < |b| - |a| < |b-a|$ de sorte que $\left|\frac{z-a}{b-a}\right| < 1$. Finalement, f admet pour développement en série de Laurent sur D_2 :

$$\forall z \in D_2\,,\ f(z) = \frac{1}{z-a} \times \frac{1}{z-b} = -\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}$$

Exercice 5. (6 pts)
Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux réels tels que $0 < a < b$ tous trois fixés. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{\mathrm{e}^{-am}}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-bm}}{b}\right)$$

Corrigé :

Posons $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{imz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$. Comme a et b sont strictement positifs et distincts, f admet quatre pôles d'ordre 1, ia, $-ia$, ib et $-ib$. Posons également $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$ et $J_R = \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z$ où $\gamma_R = [-R;R] \cup \mathcal{C}_R^+$ est la courbe fermée simple parcourue dans le sens direct, union du segment $[-R;R]$ et du demi-cercle de centre O et de rayon $R > 0$ contenu dans le demi-plan supérieur. Pour tout $R > b$, f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de l'ensemble de ses 4 pôles, et les deux pôles ia et ib sont intérieurs à la courbe γ_R. Donc, d'après le théorème des résidus, on a $J_R = 2i\pi(Res(f;ia) + Res(f;ib))$. ia est un pôle d'ordre 1 donc, on a :

$$Res(f,ia) = \lim_{z\to ia}(z-ia)f(z) = \frac{\mathrm{e}^{imia}}{(ia+ia)((ia)^2+b^2)} = \frac{\mathrm{e}^{-am}}{2ia(b^2-a^2)}$$

De même, on obtient $Res(f;ib) = \frac{\mathrm{e}^{-bm}}{2ib(a^2-b^2)}$. Donc, on a $\forall R > b$,

$$J_R = 2i\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{-am}}{2ia(b^2-a^2)} + \frac{\mathrm{e}^{-bm}}{2ib(a^2-b^2)}\right) = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-am}}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-bm}}{b}\right)$$

D'autre part, on a $J_R = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{C}_R^+} f(z)\mathrm{d}z$.

La fonction $g : z \mapsto \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ est continue sur Ext_R dès que $R > b$ et $\lim\limits_{|z|\to+\infty} g(z) = 0$. Donc, d'après le second lemme de Jordan, puisque $m > 0$, on a $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\mathcal{C}_R^+} g(z)\mathrm{e}^{imz}\mathrm{d}z = 0$. On obtient donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{imx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{imx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} J_R = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-am}}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-bm}}{b}\right)$$

Enfin, par linéarité de l'intégrale et parité de f, on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{imx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{\mathrm{e}^{-am}}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-bm}}{b}\right)$$

Fin