

Ecole préparatoire science et techniques Oran

Corrigé d'Analyse

Exercice n°01 :

- 1) V avec un exemple
- 2) F avec un contre exemple
- 3) V avec la démonstration ou bien un exemple

Exercice n°02 :

- 1) $\sum \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ converge serie alternée avec

$$A_n = \frac{1}{2n+(-1)^n} \text{ positive et décroissante et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$2) \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n \log(n+1)} = \frac{1}{n \log(n+1)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{n \log(n+1)\sqrt{n+1}} \cong \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Donc $\sum_n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n \log(n+1)}$ converge

Positive

$$3) \text{ D'après d'Alembert } \frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow 4 \text{ Diverge}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ Converge car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ décroissante}$$

$$\text{On a } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \text{ on fait D.L d'ordre 2 de } \frac{1}{1+x} \text{ avec } x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \text{ n'est pas définie pour } n \geq 1$$

$$\text{Si on a } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \text{ diverge car } \sum 1/n \text{ diverge}$$

Exercice n°03 :

$$1) \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$
$$= \sum_{n \geq 2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right]$$
$$\text{Soit } S_n = \sum_{k=2}^n \left[\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \right]$$

$$= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) - (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

$$\text{donc } \sum_{n \geq 2} (\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{-a}{n(n+1)} = -a \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= -a \sum_{k=1}^n (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= -a (1 - \frac{1}{n+1})$$

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 1} \frac{-a}{n(n+1)} = \lim S_n = -a \quad / a \in \mathbb{R}$$

Exercice n°05 :

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{c_{2n}^n}{n^n}$$

$$\text{On a } c_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\text{Et } c_{2n+2}^{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2-(n+1))!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2 / (n+1)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{[n!]^2 / n^n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n+1} \times \frac{4n+2}{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \cong \frac{4}{ne}$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \rightarrow R = +\infty \text{ donc}$$

$$D =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$2) \sum_{n \geq 2} \sqrt{n} Z^n$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \rightarrow R = 1$$

$$\text{Donc le domaine de convergence } D = \{Z \in \mathbb{Q} / |Z| < 1\}$$

$$\text{Pour } |Z|=1 \rightarrow \sum_{n \geq 0} \sqrt{n} \text{ diverge } \rightarrow D: \text{disque ouvert de centre 0 et de rayon } R=1$$

$$3) \text{ On a } \left| \frac{(-1)^n \times 2n}{4^n n! (n+a)!} \right| \leq \frac{|x^2|^n}{n!}$$

$$\text{Avec } e^{x^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{|x^2|^n}{n!} \text{ converge } \forall x \in \mathbb{R} \text{ donc le rayon de convergence } R = +\infty$$

$$\text{Le domaine de convergence } =]-\infty, +\infty[$$

Exercice n°04 :

Pour $x > 0$ on a

$$1) \quad 0 < f_n(x) < \frac{1}{x} \frac{1}{n^2}$$

Et puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente alors d'après le théorème de comparaison on a $\sum_n f_n(x)$ est convergente

$$2) \quad \text{Pour } x \in [a, +\infty[, \text{ on a } |f_n(x)| < \frac{1}{a} \frac{1}{n^2}$$

3) Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

4) Puisque on a $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ Donc on a la convergence uniforme $\rightarrow f$ est continue en tout point d'intervalle $]0, +\infty[$

La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{-n^2}{(1+xn^2)^2} \quad \forall x \geq 0$$

Pour $a > 0$ on a :

$$|\hat{f}_n(x)| \leq \frac{1}{a^2} \frac{1}{n^2} \quad \forall x \geq a$$

Donc $\sum_n \hat{f}_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

Donc d'après le théorème de convergence uniforme, on a f est dérivable en tout point de l'intervalle $]0, +\infty[$

5) On a g_n est une fonction positive continue sur $[0, +\infty[$, dérivable $[0, +\infty[$

$$\hat{g}_n(x) = \frac{x^{\alpha-1}(\alpha + (\alpha-1)n^2x)}{(1+xn^2)^2} \quad \forall x > 0$$

$$\sup_{x \geq 0} |g_n(x)| = g_n\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{n^2}\right) = \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Puisque $2\alpha > 1 \rightarrow \sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ convergente et puisque on a $\|g_n(x)\|_\infty \cong$ série converge $\rightarrow \sum g_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$

6) Posons $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad x \geq 0$

D'après 5) on a $x^\alpha f(x) = g(x) \quad x > 0$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0$$

$$f(x) = 0 \quad (x^{-\alpha}) \quad x \rightarrow 0^+$$