Fiche résumée du cours d'analyse complexe et harmonique

1 Formule de Cauchy, intégration complexe

1.1 Etude des fonctions holomorphes

Définition 1.1.1 (Fonction holomorphe) *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes, et continument différentiable (au sens de $\mathbb{R}^2$). f est holomorphe si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

i) $J_f(df)$ *est une matrice de similitude.*

ii) $\forall z_0 \in U$, $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$ *est définie*

iii) En notant u et v les parties réelles et imaginaires de f, et en posant $z = x + iy$, $\forall z_0 = x_0, y_0)$ on a les relations de Cauchy Riemann : accolade

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Définition 1.1.2 (opérateurs de dérivation complexe) *On pose*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

On a alors

$$f \text{ holomorphe} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

Exemples : Les polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Les fractions rationnelles sont holomorphes là où elles sont définies

1.2 Théorème de Cauchy

Définition 1.2.1 (Chemin, lacet) *Un **chemin** est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Un **lacet** est un chemin vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$. Deux chemins γ_1 et γ_2 sont **C^1-équivalents** si il existe un C^1-difféomorphisme ϕ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Ils sont C^1-équivalents **de même orientation** si cette fonction est croissante. Soit f une fonction continue sur U, γ un chemin C^1 par morceaux de U. On définit :*

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

où les t_i sont les points de discontinuité de γ'

Proposition 1.2.1 *Soit f continue sur U, γ in chemin C^1 par morceaux de U. Alors :*

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \sup_U |f| \,.longueur(\gamma).$$

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins C^1 par morceaux sur U, C^1-équivalents de même orientation. Alors :

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Théorème 1.2.1 (Goursat) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, T triangle plein fermé inclus dans U, f holomorphe sur U (ou f holomorphe sur $U - \{z_0\}$ continue sur U). Alors :*

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Corollaire 1.2.1 (Formule de Cauchy sur les ouverts connexes) *Soit U un ouvert convexe, γ un lacet C^1 par morceaux de U, f une fonction holomorphe sur U (ou continue sur U et holomorphe sur $U - \{z_0\}$. Alors :*

$$\int_\gamma f = 0.$$

1.3 Formule de Cauchy homotope

Définition 1.3.1 (Homotopie) *Soit U un ouvert, γ_1 et γ_2 deux chemins définis sur $[a,b]$ de U. On dit que γ_1 et γ_2 sont **homotopes** s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [a,b] \to U$ telle que $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$ et :*

$$\text{Soit } H(s,a) = H(s,b) \quad \forall s \quad \text{(homotopie de lacet)} .$$

$$\text{Soit } \begin{cases} H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \\ H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \end{cases} \text{(homotopie stricte de chemins)}$$

Théorème 1.3.1 (De Cauchy) *U ouvert, f holomorphe sur U (ou continue sur U, holomorphe sur $U - \{z_0\}$), γ_0 et γ_1 deux chemins C^1 par morceaux homotopes sur U, alors :*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

En particulier, si γ_0 est un lacet C^1 par morceaux homotope à un point, $\int_{\gamma_0} f = 0$

Remarque : sur les convexes, tous les lacets sont homotopes à un point.

1.4 Formule de la moyenne

Définition 1.4.1 (Indice) *U ouvert, γ un lacet C^1 par morceaux, $z_0 \notin Im(\gamma)$. L'indice de γ par rapport à z_0, noté*

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

C'est le "nombre de tours que fait γ autour de z_0.

Proposition 1.4.1 *L'indice est un nombre entier de $\mathbb{Z}$. Quand $z \to \infty$, $Ind_\gamma(z) \to 0$*

Théorème 1.4.1 (Formule de la moyenne) *Soit f une fonction holomorphe sur U, $z_0 \in U$, γ un lacet C^1 par morceaux homotope à un point tel que $z_0 \notin Im(\gamma)$. Alors :*

$$Ind_\gamma(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Théorème 1.4.2 (Principe du maximum) *U ouvert connexe, f holomorphe sur U, atteignant son maximum en $z_0 \in U$, i.e. $\forall z \in U, |f| \leq |f(z_0)|$. Alors, f est constante.*

1.5 Analyticité des fonctions holomorphes

1.5.1 Développement en série entière

Théorème 1.5.1 (Weierstrass) *U ouvert, f holomorphe sur U, $z_0 \in U$, alors f est développable en sérien entière au voisinage de z_0 :*

$$f(z) = \sum a_n(z_0)(z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, r), \text{ où } r = d(z_0, \partial U).$$

En particulier, toutes les dérivées de f sont holomorphes sur U.

Proposition 1.5.1 *Soit f une fonction holomorphe sur U, $z_0 \in U$, alors*

$$Ind_\gamma(z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz .$$

Corollaire 1.5.1 (principe de prolongement analytique) *f holomorphe sur $U - \{z_0\}$, bornée au voisinage de z_0. Alors, f admet un prolongement analytique sur U*

Cf chapitre 3 : f n'a pas de singularités si elle est bornée.

1.5.2 Théorème de Liouville

Théorème 1.5.2 (Liouville) *f holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Alors, si f est bornée, f est constante.*

Corollaire 1.5.2 *Tout polynôme sur $\mathbb{C}$ se factorise en produit de polynomes de degré 1, i.e. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

1.5.3 Formule de Cauchy homologique

Théorème 1.5.3 (Formule de Cauchy) *U un ouvert, γ lacet C^1 par morceaux sur U tel que $\forall z \notin U$, $Ind_z(\gamma) = 0$, f holomorphe sur U. Alors, $\forall z_0 \in U - Im(\gamma)$, on a*

$$Ind_\gamma(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

1.5.4 Principe des zéros isolés

Théorème 1.5.4 (Principe des zéros isolés) *U ouvert connexe, f fonction holomorphe non identiquement nulle. Alors, les zéros de f sont isolés.*

Théorème 1.5.5 (De l'argument) *γ un lacet C^1 par morceaux qui partage le plan en deux composantes connexes, $\{z, Ind_z(\gamma) = 1\}$ et $\{z, Ind_z(\gamma) = 0\}$. Posons $K = \{z, Ind_z(\gamma) = 1\} \cup Im(\gamma)$. f holomorphe au voisinage de K qui ne s'annule pas sur $Im(\gamma)$. Alors, le nombre de zéros de f à l'intérieur de K comptés avec multiplicité est :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

1.6 Fonctions holomorphes et $\mathbb{C}$-dérivabilité

Théorème 1.6.1 (De Morera) *U un ouvert de $\mathbb{C}$, f continue sur U, alors :*

$$f \text{ holomorphe sur } U \Leftrightarrow \forall T \subset U \text{ triangle plein fermé, on a } \int_{\partial T} f = 0.$$

En particulier, les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables sont holomorphes.

Théorème 1.6.2 (De Rouché) *Soit U un ouvert contenant $\overline{B(z_0, R)}$, f, g deux fonctions holomorphes sur U. Supposons que, $\forall z \in C(z_0, R)$, on aie $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, alors f et g ont même nombre de zéros comptés avec multiplicité dans $B(z_0, R)$.*

2 Théorème de représentation conforme (géométrie de $\mathbb{C}$)

Définition 2.0.1 (Equivalence conforme) *Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit que U est conformément équivalent à V si il existe une bijection holomorphe de U sur V. C'est une relation d'équivalence.*

2.1 Lemme de Schwarz et automorphisme conforme du disque

Définition 2.1.1 (Transformation conforme) *On appelle **transformation conforme** une transformation qui conserve les angles.*

2.1.1 Lemme de Schwarz

Théorème 2.1.1 (De Schwarz) *$f : B \to B$ holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors, $\forall z \in B$, $|f(z)| = |z|$, et $|f'(0)| \leq 1$. De plus, si l'on a un cas d'égalité, f est une rotation.*

2.1.2 Automorphisme conforme du disque

On notera $\varphi_a : z \to \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Proposition 2.1.1 *σ automorphisme conforme, alors $\exists a \in B$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma = \varphi_a \circ \rho_\theta$, où $\rho_\theta : z \to e^{i\theta}z$, et $\exists b \in B, \exists \widetilde{\theta} \in \mathbb{R}$, tels que $\sigma = \rho_{\widetilde{\theta}} \circ \varphi_b$*

Lemme 2.1.1 (Schwarz-Tick) *Soit f holomorphe $B \to B$, $z_1 \neq z_2$, $\omega_1 = f(z_1)$, $\omega_2 = f(z_2)$. Alors*

$$\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{1 - \omega_1\overline{\omega_2}}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right| \text{ et } f'(z_1) \leq \frac{1 - |\omega_1|^2}{1 - |z_1|^2}$$

Dans les cas d'égalité, f est une rotation.

2.2 Théorème de representation de Riemann

2.2.1 Notion de compacité

Théorème 2.2.1 (De Montel) *U ouvert, $\mathscr{F}$ une famille de fonctions holomorphes telles que, $\forall K$ compact de U, $\exists M_k$, $\forall f \in \mathscr{F}, \forall z \in K, |f(z)| \leq M_K$. Alors, $\mathscr{F}$ est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur U pour la topologie de la convergence compacte.*

2.2.2 Théorème de représentation conforme

Définition 2.2.1 (Simple connexité) *un ouvert U est **simplement connexe** s'il est connexe et si tout lacet est homotope à un point.*

Théorème 2.2.2 (Riemann) *$U \neq \emptyset, \neq \mathbb{C}$ ouvert simplement connexe alors U est conformément équivalent à B.*

Lemme 2.2.1 *$U \neq \mathbb{C}$ non vide simplement connexe, alors U est conformément équivalent à un ouvert non vide borné simplement connexe.*

Lemme 2.2.2 *U ouvert non vide simplement connexe inclus dans B contenant 0.*

$$\chi = \{\psi : U \to B,\ \psi \text{ holomorphe injective, et } \psi(0) = 0\}$$

Alors, $\forall \psi \in \chi$, on a

$$\psi(U) = B \Leftrightarrow |\psi'(0)| = \max_{\varphi \in \chi} |\varphi'(0)|$$

Corollaire 2.2.1 (carac. de la simple connexité) *U un ouvert de $\mathbb{C}$, alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) U est simplement connexe

ii) Pour toute fonction f holomorphe $U \to \mathbb{C}^*$, il existe une détermination holomorphe de $\log f$ sur U

iii) Pour toute fonction f holomorphe $U \to \mathbb{C}^*$, il existe une détermination holomorphe de $\sqrt{f}$ sur U

iv) U est conformément équivalent au disque unité

v) Pour toute fonction f holomorphe, pour tout lacet γC^1 par morceaux, on a $\int_\gamma f = 0$

vi) La sphère de Riemann privée de U est connexe.

vii) Toute fonction holomorphe peut être approchée uniformément par des polynômes sur les compacts.

3 Singularités isolées

3.1 Développement de Laurent

3.1.1 Foncions holomorphes sur une couronne

Définition 3.1.1 (Série de laurent) *Soit f une fonction holomorphe sur $C(a, r_1, r_2)$, on appelle **n-ième coefficient de Laurent** de f en a, pour $n \in \mathbb{Z}$ la quantité*

$$C_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad r \in]r_1, r_2[$$

*On appelle **série de Laurent** de f en a la quantité*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n (z-a)^n$$

La définition est intrinsèque (ne dépend pas de r)

Théorème 3.1.1 *Soit f holomorphe sur $C(0, r_1, r_2)$, on note $\sum C_n z^n$ sa série de Laurent. On a alors :*

i) $\sum_{n \geq 0} C_n z^n$ converge normalement sur les compacts de $B(0, r_2)$.

ii) $\sum_{n < 0} C_n z^n$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C} - \overline{B}(0, r_1)$

iii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n z^n$ converge normalement sur tous les compacts de la couronne, et $f(z) = \sum C_n z^n, \forall z \in C(0, r_1, r_2)$

3.1.2 Classification des singularités

Définition 3.1.2 (Singularités en 0) *Soit f une fonction holomorphe sur $B(0,1) - \{0\}$.*

1. *On dit que f a une **singularité éliminable en** 0 si elle est bornée au voisinage de 0 (principe de prolongement analytique, f se prolonge en une fonction holomorphe sur B) On a alors $C_n = 0 \, \forall n < 0$*
2. *On dit que f a un **pôle de multiplicité d'ordre** k **en** 0 si k est le plus petit entier positif tel que $z \mapsto z^k f(z)$ est bornée au voisinage de 0. Alors, $C_n = 0$, $\forall n < -k$.*
3. *On dit que f a une **singularité essentielle en** 0 si $\forall k$, $z \mapsto z^k f(z)$ n'est pas bornée au voisinage de 0. ($C_{-n} \neq 0$ pour une infinité de n positifs.)*

Théorème 3.1.2 (Casorati-Weierstrass) *f holomorphe sur B^* avec une singularité essentielle an 0. Alors, $\forall s \in]0, 1[$, l'image de $B(0, s) - \{0\}$ par f est dense dans $\mathbb{C}$*

3.1.3 Singularité à l'infini

Définition 3.1.3 (Singularités à l'infini) *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (ou sur $\mathbb{C} - \overline{B}(0, R)$.*

1. *On dit que f a une **singularité éliminable à l'infini** si $z \mapsto f(1/z)$ admet une singularité éliminable en 0. (Si f est entière et a une singularité éliminable à l'infini, alors f est constante)*
2. *On dit que f a un **pôle de multiplicité d'ordre** k **à l'infini** si $z \mapsto f(1/z)$ admet un pôle d'ordre k en 0. Si f est entière et a un pôle d'ordre k en à l'infini, $(z \mapsto f(z) - P_k(z))z^{-k}$ est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$, et bornée, donc constante. (prolongement analytique en 0) f est donc un polynôme d'ordre k.*
3. *On dit que f a une **singularité essentielle à l'infini** si $z \mapsto f(1/z)$ admet une singularité essentielle en 0.*

3.2 Fonctions méromorphes et théorème des résidus

Définition 3.2.1 (Fonction méromorphe) *Soit U un ouvert. On dit que f est méromorphe sur U s'il existe un ensemble $S \subset U$ discret tel que :*

i) f est holomorphe sur $U - S$

ii) f admet des pôles aux points de S

Proposition 3.2.1 *Soit U connexe, l'ensemble des fonctions méromorphes sur U a une structure de corps.*

Théorème 3.2.1 *Soit U connexe, et γ un lacet C^1 par morceaux homotope à un point sur U, f une fonction holomorphe sur $U - S$ telle que f n'a pas de pôle sur $Im(\gamma)$; alors :*

$$\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{a\in S} Res(f,a) Ind_\gamma(a) ,$$

*où $Res(f,a)$, appellé **résidu de f en** a est le coefficient de $1/(z-a)$ dans le développement en série de laurent de f en a.*

3.2.1 Exemples de calculs d'intégrales

3.3 Singularités essentielles et théorème de Picard

Au voisinage d'une singularité essentielle, l'image d'une fonction holomorphe est dense dans $\mathbb{C}$. C'est $\mathbb{C}$ privé d'au plus un point.

3.3.1 Version géométrique du lemme de Schwarz

Définition 3.3.1 (Métrique, courbure) *U ouvert de $\mathbb{C}$, on appelle **métrique** sur U toute application $\rho \in \mathscr{C}(U, \mathbb{R}^+)$ telle que ρ est de classe C^2 sur le domaine U_ρ où elle est non nulle. Soit ρ une métrique sur U, on définit la **courbure** de ρ sur U_ρ par*

$$\kappa_\rho(z) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho^2(z)} ,$$

où

$$\Delta = 4\partial z \partial \overline{z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Définition 3.3.2 (Métrique de Poincarré) *Elle est définie sur B, de courbure négative et constante,*

$$\rho_0(z) = \frac{2}{1-|z|^2} \text{ , et } \kappa_{\rho_0}(z) = -\frac{\partial z \partial \overline{z} \log \rho_0}{\rho_0^2}(z) = -1, \ \forall z \in B$$

Définition 3.3.3 (Image réciproque d'une métrique) *Soient U_1, U_2 deux ouverts dde $\mathbb{C}$, ρ une métrique sur U_2, et f une fonction holomorphe de U_1 sur U_2, on appelle image réciproque de ρ par f , et on note $f^*\rho$ la métrique sur U_1, définie par :*

$$\forall z \in U_1, \ f^*\rho(z) = |f'(z)| \, \rho(f(z))$$

Proposition 3.3.1 *Soit $f : U_1 \to U_2$ holomorphe et ρ une métrique sur U_2 , alors*

$$\kappa_{f^*\rho}(z) = \kappa_\rho(f(z)), \ \forall z \in U_1$$

Lemme 3.3.1 (De Schwarz) *Soit ρ une métrique strictement positive sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $\kappa_\rho \le -1$, f fonction holomorphe de B dans U. Alors,*

$$f^*\rho(z) \le \rho_0(z), \ \forall z \in B$$

3.3.2 Théorème de Liouville et Théorème de Picard

Théorème 3.3.1 (Liouville) *Soit U_2 un ouvert tel qu'il existe une métrique ρ strictement positive sur U_2, avec*

$$\kappa_\rho(z) \le -A < 0, \ \forall z \in U_2$$

Alors, les fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans U_2 sont constantes. En particulier, les fonctions entières bornées sont constantes.

Corollaire 3.3.1 *f entière et bornée, alors$f$ est constante.*

Corollaire 3.3.2 (Petit théorème de Picard) *Soit f entière telle que $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} - \{0,1\}$, alors f est constante.*

3.3.3 Théorème de Picard

Définition 3.3.4 (Famille normale) *Soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctions holomorphes définies sur un ouvert U. On dit que $\mathscr{F}$ est **normale** si de toute suite $(f_n)_n$ on peut extraire une suite $(g_n)_n$ telle que :*

- *Soit $(g_n)_n$ converge uniformément sur tout compact $K \subset U$.*
- *Soit $(g_n)_n$ diverge uniformément sur tout compact $K \subset U$. (i.e. g_n^{-1} CVU)*

Proposition 3.3.2 (Théorème de Marly) *Soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur un ouvert U, $\mathscr{F}$ est normale si et seulement si $\{f^*\rho_0,\ f \in \mathscr{F}\}$ est équibornée qur tout compact $K \subset U$*

4 Approximation rationnelle

4.1 Approximation polynômiale et rationnelle

Proposition 4.1.1 *Soit U un ouvert borné, $a \in U$, $z \mapsto 1/(z-a)$ holomorphe sur $U - \{a\}$ ne peut pas être approchée uniformément par des polynômes sur ∂U.*

Théorème 4.1.1 (Runge) *Soit K un compact, S un ensemble qui intersecte toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} - K$, et posons $A = \{$fonctions rationnelles à pôles dans $S\}$. Alors, A est dense dans l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de K pour la topologie de la convergence compacte.*

4.1.1 Formule de Cauchy "Uniforme"

Théorème 4.1.2 *Soit U un ouvert, K un compact de U. Alors, il existe un ensemble de segments orientés $(\gamma_i)_{i=1..n}$, tel que $\forall f$ holomorphe sur U, $\forall z \in K$, on aie*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \frac{f(z')}{z - z'} dz' \ .$$

4.1.2 Théorème de Runge

4.1.3 Approximations polynômiales

Corollaire 4.1.1 *Soit K compact, si $\mathbb{C} - K$ n'a pas de composantes connexes bornées, les fonctions holomorphes au voisinage de K sont approchables uniformément par des polynômes.*

Théorème 4.1.3 (Margelyan) *Soit K compact, si $\mathbb{C} - K$ n'a pas de composantes connexes bornées, les fonctions holomorphes à l'intérieur de K continues sur K, sont approchables uniformément par des polynômes.*

4.2 localisation des zéros d'une fonction holomorphe

Théorème 4.2.1 (Weierstrass) *Soit U un ouvert, S discret dans U, $\forall a \in S$, on se donne $m_a \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une fonction holomorphe sur U dont les zéros sont exactement les points de S et, $\forall a \in S$, a est un zéro de multiplicité m_a*

4.2.1 Produits finis

Rappel : Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions sur X, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que $\sum(1-f_n)$ est normalement convergente sur X, alors $\prod f_n$ est bien définie, et l'ensemble de ses zéros est l'ensemble des zéros des f_n. par ailleurs, si, $\forall n$, $\|f_n - 1\| \leq c < 1$, alors $\prod f_n = \exp(\sum \log(f_n))$.

Proposition 4.2.1 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U telle que $\sum(1-f_n)$ est normalement convergente sur tout compact de U. Alors :*

i) $F = \prod\limits_0^\infty f_n$ est holomorphe sur U

ii) a est un zéro de F si et seulement si il existe n, $f_n(a) = 0$, et $m_a(F) = \sum\limits_0^\infty m_a(f_n)$.

iii) $F'/F = \sum\limits_0^\infty f'n/f_n$ si f_n n'a pas de zéro, $\forall n \geq N$

4.2.2 preuve du théorème de Weierstrass

On pose

$$W_p(z) = (1-z)\exp\left(\sum_0^p \frac{z^k}{k}\right) .$$

Théorème 4.2.2 (Factorisation d'Hadamard) *Soit F une fonction holomorphe dont les zéros répétés non nuls sont (α_p), alors, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ est une fonction holomorphe g telle que $\forall z \in \mathbb{C}$*

$$F(z) = z_0^m \prod_0^\infty W_p\left(\frac{z}{\alpha_p}\right) e^{g(z)}$$

4.2.3 Corps des fonctions méromorphes

Théorème 4.2.3 *Soit U connexe ; l'ensemble des fonctions méromorphes sur U est le corps des fractions de l'anneau intègre des fonctions holomorphes sur U*

4.3 Localisation des pôles d'une fonction méromorphe

4.3.1 Théorème de Mittag-Leffer

Théorème 4.3.1 *Soit U un ouvert, S discret dans U, $\forall a \in S$, on se donne $m_a \in \mathbb{N}^*$ et $C_{a,n}$ pour $1 \leq n \leq m_a$*

$$P_a(z) = \sum_{n=1}^{m_a} Ca, n(z-a)^{-n} .$$

Alors, il existe une fonction F méromorphe sur U dont les pôles sont exactement les points de S et telle que le développement de Laurent de F au voisinage de $a \in S$ admet P_a comme partie singulière.

4.3.2 Un problème d'interpolation

Théorème 4.3.2 *Soit U un ouvert, S un fermé discret de U. $\forall a \in S$, on se donne $m_a \in \mathbb{N}$ et $c_{a,0}, \ldots c_{a,m_a} \in \mathbb{C}$, alors, il eciste une fonction F holomorphe sur U et telle que, $\forall a \in S$, $\forall n \leq m_a$,*

$$\frac{F^{(n)}(a)}{n!} = c_{a,n} .$$

5 Fonctions harmoniques

Définition 5.0.1 (Fonction harmonique) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que U est harmonique sur U si elle vérifie*

i) u est C^2 sur U

ii) $\Delta u = 0$

Proposition 5.0.1 *L'ensemble des fonctions harmoniques est stable par conjuguaison, mais pas par multiplication. Si u est harmnique sur U et f holomorphe de V dans U, alors $u \circ f$ est harmonique sur V. Ceci est faux en général si f n'est que harmonique.*

5.1 Harmonicité et holomorphie

5.1.1 Régularité C^∞ des fonctions harmoniques

Théorème 5.1.1 *Soit U un ouvert simplement connexe. u une fonction harmonique réelle sur U, alors il existe une fonction holomorphe sur U telle que $u = Re(f)$. De plus, f est unique à addition d'une constante imaginaire pure près.*

Corollaire 5.1.1 *Soit U un ouvert quelconque, u une fonction harmonique sur U. Alors U est de classe C^∞, et toutes ses dérivées partielles sont harmoniques.*

5.1.2 Analyticité des fonctions harmoniques

Définition 5.1.1 (Fonction $\mathbb{R}-$analyticité) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f est dite $\mathbb{R}-$analytique sur U, si au voisinage de chaque point $z_0 = x_0 + iy_0$,*

$$f(x+iy) = \sum_{p,q} C_{p,q}(x-x_0)^p(y-y_0)^q \ .$$

Théorème 5.1.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, u une fonction harmonique sur U, alors u est dite $\mathbb{R}-$analytique sur U.*

Corollaire 5.1.2 (Prolongement analytique) *Une fonction harmonique non nulle sur un ouvert connexe a des zéros de multiplicité finie.*

5.1.3 Formule de la moyenne

Théorème 5.1.3 *Soit u une fonction harmonique sur un ouvert U, $z_0 \in U$, soit r tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$, alors*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta \ .$$

Proposition 5.1.1 (Principe du maximum) *Soit u une fonction harmonique sur un ouvert connexe U. Si $\exists z_0 \in U,\ \forall z \in U,\ |u(z)| \leq |u(z_0)|$, alors u est constante. Variante : u harmonique sur U ouvert borné, continue sur $\overline{U}$, alors u atteint son maximum sur ∂U.*

5.2 Formule de Poisson

5.2.1 Noyau de Poisson

Définition 5.2.1 (Noyau de Poisson) *Soit D le disque de centre z_0 et de rayon r. On appelle* ***noyau de poisson*** *sur D la fonction positive*

$$P_D \ : \ \begin{array}{ccc} \partial D \times D & \to & \mathbb{R}_+^* \\ (\zeta, z) & \mapsto & P_D(\zeta, z) \end{array} \ , \text{ avec } P_D(\zeta, z) = \frac{|\zeta - z_0|^2 - |z - z_0|^2}{(\zeta - z)^2} \ .$$

Proposition 5.2.1 *Soit $D = B(0,1)$, on a les identités suivantes :*

i) $P_a(\zeta) = P(\zeta, a) = |\Phi'_a(\zeta)|$

ii) $P_r(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}$

La seconde formulation sert à ecrire des développements en série entière.

Théorème 5.2.1 (Poisson) *Soit D un disque, u harmonique au voisinage de D, alors*

$$\forall z \in D,\ u(z) = \int_{\partial D} P_D(\zeta, z) u(\zeta) \frac{d\zeta}{|\partial D|} .$$

5.2.2 Inégalités de Cauchy

Théorème 5.2.2 (Inégalités de Cauchy) *Soit K un compact d'un ouvert U, u une fonction harmonique sur U. Alors, $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$, $\forall \delta > 0$, $\exists c > 0$,*

$$\sup_K \left|\partial^k u\right| \le c \sup_{K_\delta} u ,$$

et ce indépendamment de la fonction harmonique u choisie, où K_δ est le $\delta-$voisinage de K.

Corollaire 5.2.1 *Soit U un ouvert, (u_n) une famille de fonctions harmoniques équibornées sur tout compact de U. Alors, à extraction près, (u_n) converge vers une fonction harmonique u pour la topologie de la convergence compacte.*

Théorème 5.2.3 (Harnack) *Soit u une fonction harmonique réelle positive sur $B(z_0, r)$. Alors, $\forall r' < r$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, on a*

$$\frac{r - r'}{r + r'} u(z_0) \le u(z_0 + r' e^{it}) \le \frac{r + r'}{r - r'} u(z_0) .$$

Corollaire 5.2.2 (Théorème d'harnack) *Soit U un ouvert connexe, (u_n) une suite croissante de fonctions harmoniques réelles, alors :*

- *Soit (u_n) converge uniformément sur tout compact de U vers u harmonique.*
- *Soit (u_n) diverge uniformément sur tout compact de U.*

5.3 Problème de Dirichlet

Définition 5.3.1 (Problème de Dirichlet) *On considère la résolution du problème suivant, appellé* ***problème de Dirichlet*** *:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u \text{ continue sur } \overline{U},\ u = \omega \text{ sur le bord } \partial U \end{cases}$$

5.3.1 Intégrales de Poisson sur $B = B(0,1)$

Définition 5.3.2 (Intégrale de Poisson) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, si ω est une fonction intégrable sur ∂U, on appelle* ***intégrale de Poisson****, pour $z \in U$,*

$$P_\omega(z) = \int_{\partial D} P(z, \zeta) \omega(z) \frac{d\zeta}{2\pi} .$$

Si μ est une mesure bornée sur ∂U, on définit

$$P_\mu(z) = \int_{\partial D} P(z, \zeta) d\mu(\zeta) .$$

L'intégrale de Poisson d'une mesure bornée est une fonction harmonique sur B.

Proposition 5.3.1 *Si $\zeta_0 \in B$ est un point de continuité de ωalors*

$$\lim_{z\to\zeta_0} P_\omega(z) = \omega(\zeta_0)$$

Théorème 5.3.1 *Soit ω une fonction continue sur ∂B. Alors, il existe une unique solution au problème de Dirichlet.*

5.3.2 Cas des domaines de Jordan

Définition 5.3.3 (Lacet de Jordan) *On appelle **lacet de Jordan** tout lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_{|[a,b[}$ est injectif. On appelle **courbe de jordan** fermée l'image Γ d'un lacet de Jordan.*

Théorème 5.3.2 (Jordan) *Soit γ une courbe de Jordan, $\mathbb{C} - \Gamma$ a deux composantes connexes exactement, dont une est bornée, et l'autre non bornée.*

Définition 5.3.4 (Domaine de Jordan) *On appelle **Domaine de Jordan** la composante connexe bornée de $\mathbb{C} - \Gamma$, où Γ est une courbe de Jordan.*

Théorème 5.3.3 (Caractérisations de la simple connexité) *Soit U un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$.*

- *i) $\mathbb{S} - U$ est connexe.*
- *ii) $\forall \gamma$ lacet C^1 par morceaux sur U, $\forall f$ holomorphe sur U, on a $\int_\gamma f = 0$*
- *iii) Ona une détermination holomorphe de $ln(f)$ ou de $\sqrt{f}$ pour toute fonction $f : U \to \mathbb{C}^*$ holomorphe.*
- *iv) On peut approcher toute les fonctions holomorphes uniformément par des polynômes. (Runge)*
- *v) U est conformément équivalent à B (Riemann)*

Théorème 5.3.4 (Carathéodory) *Soit D un domaine de Jordan, et f un biholomorphisme $D \to B$. Alors f se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{D} \to \overline{B}$*

Théorème 5.3.5 *Soit D un domaine de Jordan, ω continue sur ∂D, alors il existe une unique solution au problème de Dirichlet.*

5.3.3 Harmonicité et formule de la moyenne

Proposition 5.3.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, u une fonction continue sur U telle que $\forall z_0 \in U$, $\exists n_0 > 0$, $\forall r < r_0$,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \, .$$

Alors, u est harmonique sur U.

6 Fonctions sous-harmoniques

Définition 6.0.5 (Fonction sous harmonique) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u : U \to [-\infty, +\infty[$, on dit que μ est sous harmonique sur U si*

- *u est semi continue supérieurement : $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{z \mid u(z) < c\}$ est ouvert.*
- *u vérifie la propriété locale de la sous moyenne :*

$$\forall z_0 \in U,\ \exists r_0 > 0,\ \forall r < r_0,\ u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \, .$$

Proposition 6.0.3 *Soient u, v deux fonctions sous-harmoniques sur un ouvert U, alors*

- *$\max u, v$ est sous-harmonique.*
- *$\forall lambda \geq 0$, $\lambda u + v$ est sous harmonique.*
- *Pour φ fonction croissante convexe définie sur $[-\infty; +\infty[$, $\varphi \circ u$ est sous-harmonique.*

6.1 Principe du maximum, propriété du majorant harmonique

6.1.1 Principe du maximum

Proposition 6.1.1 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, u une fonction sous-harmonique sur U. Si $\exists z_0 \in U, \forall z \in U, u(z) \leq u(z_0)$, alors u est constante.*

Proposition 6.1.2 *Soit U un ouvert borné, et u une fonction sous-harmonique sur U, semi-continue supérieurement sur $\overline{U}$, alors*

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \, .$$

6.1.2 Propriété du majorant harmonique

Proposition 6.1.3 (Du majorant harmonique) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, u une fonction semi-continue supérieurement sur U. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *u est sous-harmonique.*

ii) *$\forall V$ relativement compact dans U, $\forall h$ continue sur $\overline{V}$, harmonique sur V, vérifiant $u \leq h$ sur ∂V, on a $u \leq h$ sur V.*

iii) *Pour tout disque $\overline{D} \subset U$, $\forall z \in D$,*

$$u(z) \leq \int_{\partial D} P_D(z,\zeta) u(\zeta) \frac{d\zeta}{|\partial D|}$$

6.1.3 Théorème de Hadamard

Théorème 6.1.1 *Soit u une fonction sous-harmonique sur $B(z_0, R)$. Soit $r < R$, on définit $I_r(u) = \frac{1}{2\pi} \int u(z + re^{i\theta} d\theta$.*