Résume du cours d'Analyse III-IV

jean-eloi.lombard@epfl.ch

14 juin 2009

Table des matières

Chapitre 1

Analyse Vectorielle

1.1 Intégrales Curvilignes

1.1.1 Courbes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1 (Homéomorphisme) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ et $\alpha : A \to B$. α est un *homéomorphisme* entre A et B si :

1. α est continue
2. α est bijective
3. $\alpha^{-1} : B \to A$ est continue

Définition 1.2 (Arc régulier, représentation paramétrique régulière) Un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est un *arc régulier* s'il existe une fonction $\alpha : J \to C$ vérifiant :

1. J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
2. $\alpha : J \to C$ est un homéomorphisme
3. $\alpha \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ et $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$.

α est une *représentation paramétrique régulière.*

Définition 1.3 (Tangente à C) La droite tangente à C au point $\alpha(t)$ est donnée par :

$$\alpha(t) + \lambda\alpha'(t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition 1.4 (Intégrale Curviligne) Soit C un arc régulier de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur C. *L'intégrale curviligne* de f sur C est :

$$\int_C f ds = \int_J f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\mathrm{d}t$$

où $\alpha : J \to C$ est une représentation paramétrique régulière de C.

Remarque 1.1 L'intégrale $\int_C f ds$ existe lorsque $\int_J f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt$ converge

Remarque 1.2 La longueur de C est donnée par $\int_C f ds$ avec $f = 1$, soit $\int_C \|\alpha'(t)\|dt$.

1.1.2 Changement de représentation paramétrique

Théorème 1.1 Soit C un arc régulier de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha : J \to C$ une représentation paramétrique régulière de C. Alors une fonction $\beta : K \to C$ est une représentation paramétrique régulière de C si et seulement si :

1. K est un intervalle ouvert
2. il existe un homéomorphisme $\phi : K \to J$ tel que $\phi \in C^1(K)$ et $\phi' \neq 0$
3. $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$.

Corollaire 1.1 Soit $\alpha : J \to C$, $\beta : K \to C$ deux représentations paramétriques régulières de l'arc régulier C et $f : C \to \mathbb{R}$. Alors l'intégrales sur C de f ne dépends pas de la représentation paramétrique choisie :

$$\int_C f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\mathrm{d}t = \int_C f(\beta(s))\|\beta'(s)\|\mathrm{d}s$$

1.1.3 Arc orienté

Définition 1.5 (Champs continu de tangentes unitaires) Soit C un arc orienté de $\mathbb{R}^n$. Un *champs continu de tangentes unitaires* sur C est une fonction $T : C \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

1. T est continue
2. $\|T(P)\| = 1$ pour tout $P \in C$
3. $P + \lambda T(P)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est une équation de la tangente à C en P.

Remarque 1.3 Soit $\alpha : J \to C$ une représentation paramétrique régulière de C, alors un champ continu de tangentes unitaires à C en P est défini par :

$$T(P) = T_\alpha(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \qquad \forall t \in J$$

Remarque 1.4 On en déduit qu'il n'y a que deux champs continu de tangentes unitaires pour un arc C "dépendant du sens dans lequel C est parcouru", d'où la définition 1.6.

Définition 1.6 (Arc régulier orienté) Un arc régulier C avec un choix de champs continu de tangentes unitaires T est un *arc régulier orienté* noté (C, T) ou $\vec{C}$.

Définition 1.7 (Intégrale curviligne) Soit (C, T) un arc régulier orienté de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}^n$ un champs vectoriel continu sur C. *L'intégrale curviligne* de f sur C est :

$$\int_{(C,T)} f \cdot \mathrm{d}s = \int_C \langle f, T \rangle \mathrm{d}s$$

Remarque 1.5 Si α est une représentation paramétrique régulière de (C, T) alors :

$$\int_{(C,T)} f \cdot \mathrm{d}s = \int_J \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \mathrm{d}t$$

1.1.4 Chemins orientés

Définition 1.8 (Chemin régulier) Soit $P \neq Q \in \mathbb{R}^n$. $D \subset \mathbb{R}^n$ est un *chemin régulier* de P vers Q si il existe un intervalle compact $[a, b]$ et $\alpha \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ représentation paramétrique de D vérifiant les propriétés suivantes :

1. $Im(\alpha) = D$
2. $\alpha|_{(a,b)}$ est une représentation paramétrique de $C = D \backslash \{P, Q\}$.
3. $\alpha(a) = P$ et $\alpha(b) = Q$
4. $\alpha'(a) \neq 0$ et $\alpha'(b) \neq 0$

Définition 1.9 (Chemin) $D \subset \mathbb{R}^n$ est un *chemin* entre P et Q lorsqu'il peut-être exprimé comme $\cup_{i=1}^n D_i$ avec les D_i vérifiant :

1. D_i est un chemin régulier entre P_i et P_{i+1}
2. $P_1 = P$ et $P_{n+1} = Q$
3. $D_i \cap D_{i+1} = \{P_{i+1}\}$
4. $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $|i - j| \geq 2$

Définition 1.10 (Chemin fermé) $D \subset \mathbb{R}^n$ est un *chemin fermé* lorsqu'il peut être exprimé comme $D = D_1 \cup D_2$ avec

1. D_1 et D_2 deux chemins d'extremités P et Q.
2. $D_1 \cap D_2 = \{P, Q\}$

Définition 1.11 (Chemin fermé orienté) Un *chemin fermé D est orienté* si le chemin orienté (D_1, T_1) va de P vers Q et (D_2, T_2) va de Q vers P.

1.1.5 Chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$

Théorème 1.2 (de Jordan) Soit D un chemin fermé de $\mathbb{R}^2$. Le complémentaire de D, $\mathbb{R}^2\backslash D$, est l'union de deux parties connexes disjointes dont l'une est bornée (l'intérieur) et l'autre non (l'extérieur).

Définition 1.12 (Orientation positive/négative) Soit (D, T) une orientation de D et (C_i, T_i) un arc régulier orienté tel que $C_i \subset D$ et $T_i(P) = T(P) = (p, q)$ pour tout P de C_i. Cette orientation est dite positive si le repère $(N(P), T(P))$ est direct, négative sinon.

Remarque 1.6 Sur une représentation graphique usuelle de $\mathbb{R}^2$ cette convention correspond à :

1. l'orientation de D est positive dans les sens contraire aux aiguilles d'une montre
2. en se "promenant la tête vers le haut suivant l'orientation positive de D" l'intérieur se trouve à gauche

Définition 1.13 (Champs de normales unitaires extérieurs) Soit D un chemin fermé de $\mathbb{R}^2$, $N : D \to \mathbb{R}^2$ est un *champs de normales unitaires extérieurs* à D si $N(P)$ est une normale unitaire extérieur à D en P.

Définition 1.14 (Flux) Soit D un chemin fermé de $\mathbb{R}^2$, $N : D \to \mathbb{R}^2$ un champs de normales unitaires extérieurs sur D. *Le flux d'un champs vectoriel continu* $f : D \to \mathbb{R}^2$ *à travers* D *vers l'extérieur* est :

$$\phi_f = \int_D \langle f, N \rangle \mathrm{d}s$$

1.2 Intégrales de surface

1.2.1 Surface de $\mathbb{R}^3$

Définition 1.15 (Nappe régulière) $S \subset \mathbb{R}^3$ est une *nappe régulière* lorsqu'il existe une fonction $\alpha : \Omega \to S$ vérifiant :

1. Ω est ouvert et connexe [1] dans $\mathbb{R}^2$
2. $\alpha : \Omega \to S$ est un homéomorphisme
3. $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\partial_1\alpha(s, t)$, $\partial_2\alpha(s, t)$ sont linéairement indépendants[2] pour tout $(s, t) \in \Omega$.

α est une représentation paramétrique régulière de S.

[1] Un ensemble Ω est dit connexe par arc si pour tout deux éléments a et b de Ω il peuvent être joint par un chemin de Ω d'extrémité a et b.

[2] dans $\mathbb{R}^3$ $\partial_1\alpha(s, t)$, $\partial_2\alpha(s, t)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\partial_1\alpha(s, t) \wedge \partial_2\alpha(s, t) \neq 0$

Définition 1.16 (Plan tangent et normale) Clairement $\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)$ est normal au plan et $\partial_1\alpha(s,t)$, $\partial_2\alpha(s,t)$ sont tangents au plan.

Définition 1.17 (Champs de normales unitaires à une surface) Soit S une nappe régulière de $\mathbb{R}^3$. *Un champs continu de normales unitaires sur* S est une fonction $N : S \to \mathbb{R}^3$ vérifiant :

1. N continue
2. $\|N(P)\| = 1$ pour tout $P \in S$
3. $P + N(P)^\perp$ est le plan tangent à S en P pour tout $P \in S$.

Si $\alpha : \Omega \to S$ est une representation paramétrique régulière de S alors le champs continu de normales unitaires engendré par α est :

$$N_\alpha(P) = \frac{\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)}{\|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\|} \qquad P = \alpha(s,t)$$

Définition 1.18 (Intégrale de surface) Soit S une nappe régulière de $\mathbb{R}^3$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction continue. *L'intégrale de f sur S* est :

$$\int_S f d\sigma = \int_\Omega f(\alpha(s,t)) \|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\| \mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

Remarque 1.7 (Aire de S) *L'aire de S* est donnée par l'Eq. 1.1 lorsque $f = 1$

1.2.2 Changement de représentation paramétrique

Théorème 1.3 Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une nappe et $\alpha : \Omega \to S$ une représentation paramétrique régulière de S. ALors $\beta : \Delta \to S$ est une représentation paramétrique régulière de S si et seulement si

1. Δ est un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{R}^2$
2. il existe un homéomorphisme $\phi : \Delta \to \Omega$ tel que :
   (a) $\phi \in C^1(\Delta)$
   (b) $\det \nabla\phi(u,v) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \Delta$
   (c) $\beta(u,v) = \alpha(\phi(u,v))$ pour tout $(u,v) \in \Delta$

Corollaire 1.2 "L'intégrale de surface ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie". Soit $\alpha : \Omega \to S$ et $\beta : \Delta \to S$ deux représentation paramétriques régulières. Alors pour toute fonction continue $f : S \to \mathbb{R}$

$$\int_\Omega f(\alpha(s,t)) \|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\| \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_\Delta f(\beta(u,v)) \|\partial_1\beta(u,v) \wedge \partial_2\beta(u,v)\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

1.2.3 Nappes orientées

Définition 1.19 (Nappe orientée) Une nappe régulière S avec un champs continu de normales unitaires N est appelé *nappe orientée*, notée (S, N). Une représentation paramétrique de (S, N) est une représentation paramétrique régulière de S telle que $N_\alpha = N$.

Définition 1.20 (Flux à travers une surface) Soit (S, N) et $f : S \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel continu sur S. *Le flux de f à travers S dans le sens de N* est :

$$\int_{(S,N)} f \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_S \langle f, N \rangle \mathrm{d}\sigma$$

Si $\alpha(s,t) : \Omega \to S$ est une représentation paramétrique régulière avec $N_\alpha = \frac{\partial_1\alpha \wedge \partial_2\alpha}{\|\partial_1\alpha \wedge \partial_2\alpha\|}$ orienté positivement alors :

$$\begin{aligned}
\int_{(S,N)} f \cdot \mathrm{d}\sigma &= \int_S \langle f, N \rangle d\sigma \\
&= \int_\Omega \langle f(\alpha), N_\alpha \rangle \|\partial_1\alpha \wedge \partial_2\alpha\| \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_\Omega \langle f(\alpha), \partial_1\alpha \wedge \partial_2\alpha \rangle \mathrm{d}s\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

1.2.4 Nappe avec un bord

Définition 1.21 (Nappe avec un bord et bord géométrique) $A \subset \mathbb{R}^3$ est appelé *nappe avec bord* lorsqu'il existe un ouvert Ω borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ tel que son bord $\partial\Omega$[3] est un chemin fermé et $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vérifie :

1. $\alpha|_\Omega$ est une représentation paramétrique régulière d'une nappe S.
2. $\alpha : \bar{\Omega} \to A$ un homéomorphisme [4].
3. $\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t) \neq 0$ pour tout $(s,t) \in \partial\Omega$.

L'ensemble $A \backslash S = \alpha(\partial\Omega)$ est appelé *bord géométrique* de A, noté ∂A.

Lemme 1.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné. Considérons une fonction $g : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ vérifiant :

1. $g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$
2. $g|_\Omega$ est injectif
3. $g(\Omega) \cap g(\partial\Omega) = \emptyset$

Alors $\alpha = g|_\Omega : \Omega \to S$ est un homéomorphisme avec $S = \alpha(\Omega) = g(\Omega)$.

[3] x est *un point frontière* de Ω si pour tout $\delta > 0$ $B(x,\delta) \cap \Omega \neq \emptyset$ et $B(x,\delta) \cap \Omega^c \neq \emptyset$. On note $\partial\Omega$ l'ensemble des points frontière de Ω et on dit que $\partial\Omega$ est la frontière ou le bord de Ω.

[4] $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ est l'adhérence de Ω. L'adhérence $\bar{\Omega}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartiennent pas à l'intérieur du complémentaire de Ω

1.3 Intégrales par partie et théorème de Green

1.3.1 Opérateurs différentiels

Définition 1.22 (Gradient) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Le *gradient* de $u \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ est :

$$\nabla(u) = grad(u) = \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_n u \end{pmatrix}$$

$\nabla(u) : V \to \mathbb{R}^n$ est un champs vectoriel.

Définition 1.23 (Matrice Jacobienne) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel. La *matrice jacobienne* de f est la matrice :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n & \dots & \partial_n f_n \end{bmatrix}$$

Définition 1.24 (Divergence) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel. La *divergence* de f est la fonction $\nabla \cdot f : V \to \mathbb{R}$:

$$\nabla \cdot f = div(f) = \sum_i^n \partial_i f_i$$

Définition 1.25 (Rotationnel) Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ et $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel. Le *rotationnel* de f est le champs vectoriel $\nabla \wedge f : V \to \mathbb{R}^3$:

$$\nabla \wedge f = rot(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.26 (Matrice hessienne) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $u \in C^2(V \to \mathbb{R})$ une fonction. La *matrice hessienne* de la fonction u est donnée par la matrice jacobienne de son gradient, soit $H(u) = \nabla(\nabla u)$:

$$H(u) = \nabla(\nabla u) = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 u_1 & \dots & \partial_n\partial_1 u_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1\partial_n u_1 & \dots & \partial_n\partial_n u_n \end{bmatrix}$$

Remarque 1.8 Le théorème de Schwarz[5] implique que la matrice hessienne est symétrique.

[5] Soit $f : V \to \mathbb{R}$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et sont continues en $a \in \mathbb{R}$, alors : $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$ pour tout a.

Définition 1.27 (Laplacien) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et une fonction $u \in C^2(V, \mathbb{R})$. Le *laplacien* de u est la fonction $\Delta u : V \to \mathbb{R}$:

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \sum_i \partial_i^2 u$$

1.3.2 Intégration par parties

Lemme 1.2 Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $\phi < \psi \in C^1([a,b], \mathbb{R})$,

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi(x) < y < \psi(x)\}$$

et $f \in C^1(\bar{\Omega})$ alors pour $i = 1, 2$:

$$\int_\Omega \partial_i f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f N_i \mathrm{d}s$$

avec $N : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ le champ de normales unitaires extérieurs sur le chemin fermé $\partial\Omega$.

Définition 1.28 (Domaine régulier) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un *domaine régulier* lorsqu'il y a un nombre fini de chemins fermés $C_1, \ldots, C_k$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\Omega = intC_1$ si $k = 1$, sinon $\Omega = (intC_1) \setminus \cup_{i=1}^k (intC_i \cup C_i)$.

Théorème 1.4 (formule d'intégration par parties) Soient Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ et $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Alors pour $i = 1, 2$

$$\int_\Omega u \partial_i v \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} uvN_i \mathrm{d}s - \int_\Omega v \partial_i u \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

avec N le champ de normales unitaires extérieurs sur $\partial\Omega$. En particulier :

$$\int_\Omega \partial_i u \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} uN_i \mathrm{d}s$$

1.3.3 Théorème de Green

Le théorème de Green relie l'intégrale de surface d'une fonction sur un domaine régulier à une intégrale curviligne du bords de cette surface.

Théorème 1.5 (de Green) Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ et $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_{\partial\Omega} (vN_1 - uN_2) \mathrm{d}s = \int_{\vec{\partial\Omega}} u \mathrm{d}x + v \mathrm{d}y \\ &= \sum_i \int_{\partial\Omega} f(\alpha^i(t)) \partial_t \alpha_1^i(t) + g(\alpha^i(t)) \partial_t \alpha_2^i(t) \end{aligned}$$

avec N le champ de normales unitaires sur $\partial\Omega$ et $\vec{\partial\Omega}$ dans sens positif.

Corollaire 1.3 Soit $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel avec $f_1, f_2 \in C^1(\bar{\Omega})$. Alors :

$$\int_\Omega (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\partial\vec{\Omega}} f \cdot dl = \int_{\partial\Omega} \langle f, N \rangle \mathrm{d}s$$

avec N le champ de normales unitaires sur $\partial\Omega$ et $\partial\vec{\Omega}$ dans sens positif.

1.4 Théorème de Stokes

1.4.1 Nappes avec un bord

Définition 1.29 $A \subset \mathbb{R}^3$ est une *nappe avec un bord* lorsqu'il existe une fonction $\alpha : \bar{\Omega} \to A$ vérifiant :

1. $\Omega = intC$ avec C un chemin fermé de $\mathbb{R}^2$
2. $\alpha : \bar{\Omega} \to A$ est un homéomorphisme.
3. $\alpha \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ et $\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t) \neq 0$ pour tout $(s,t) \in \bar{\Omega} = \Omega \cup C$.

Définition 1.30 (Bord géométrique) En posant $S = \alpha(\Omega)$ on a S une nappe régulière. L'ensemble $A \backslash S = \alpha(C)$ est le *bord géométrique* de A, noté ∂A.

Remarque 1.9 Le bord géométrique $A \backslash S$ est un chemin fermé de $\mathbb{R}^3$ alors que le bord topologique est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 1.10 Intuitivement la notion d'orientation sur le bord de A est : "lorsqu'on se déplace sur le bord de A dans le sens positif avec la tête dans la direction de N la nappe se trouve sur la gauche".

1.4.2 Intégration par parties, théorème de Stokes

Théorème 1.6 Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, $u \in C^1(V)$, (S, N) une nappe orientée avec bord tel que $S \subset V$. Soit $T : \partial S \to \mathbb{R}^3$ le champs de tangentes unitaires sur le chemin fermé ∂S dans le sens de l'orientation positive de S par rapport à N. Alors :

$$\int_S \langle A \wedge N, \nabla u \rangle \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S} u \langle A, T \rangle \mathrm{d}s \qquad \forall A \in \mathbb{R}^3$$

Remarque 1.11 Donc pour $i = 1, 2, 3$:

$$\int_S (N \wedge \nabla u)_i \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S} u T_i \mathrm{d}s$$

Théorème 1.7 (de Stokes) Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ ouvert et $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$. Soit (S, N) une nappe régulière orientée avec bord, tel que $S \subset V$. Soit $T : \partial S \to \mathbb{R}^3$ le champ de tangentes unitaires sur le chemin fermé ∂S dans le sens de l'orientation positive de (S, N), alors :

$$\int_S \langle \nabla \wedge f, \partial_1 \alpha \wedge \partial_2 \alpha \rangle \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S} \langle f(\beta(t)), \beta'(t) \rangle \mathrm{d}t$$

avec α la representation paramétrique régulière de la nappe et β celle de son bord. On peut aussi réécrire le théorème comme :

$$\int_{(S,N)} \nabla \wedge f \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_{(\partial S,T)} f \cdot \mathrm{d}l$$

Physiquement, le théorème de Stokes stipule “le flux du rotationnel de f à travers S dans le sens de N est égal à la circulation de f sur le bord de S dans le sens positif par rapport à N”.

Remarque 1.12 La surface sur laquelle est appliquée le théorème de Stokes doit être orien$\widehat{\ }$ee ! Les surface fermées (sphère ou cylindre) ne sont pas orientée donc il faut les subdiviser (en séparant la sphère en deux hemisphères et en séparant le cylindre en deux parrallèlement à son axe).

Corollaire 1.4 Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Soit (S, N) une nappe orientée avec bord tel que $S \subset V$. Soit $T : \partial S \to \mathbb{R}^3$ le champ de tangentes unitaires sur le chemin fermé ∂S dans le sens de l'orientation positive par rapport à N. Alors :

1. pour $u, v \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ et $A \in \mathbb{R}^3$:

$$\int_S \langle A \wedge N, \nabla u \rangle \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S} uv \langle A, T \rangle \mathrm{d}s - \int_S u \langle A \wedge N, \nabla v \rangle \mathrm{d}\sigma$$

2. pour $u \in C^1(V)$ et $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$

$$\int_S \langle f \wedge N, u \rangle \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S} u \langle f, T \rangle \mathrm{d}s - \int_S u \langle \nabla \wedge f, N \rangle \mathrm{d}\sigma$$

1.5 Théorème de la divergence

Définition 1.31 (Domaine régulier) $V \subset \mathbb{R}^3$ est un *domaine régulier* lorsqu'il est ouvert, borné connexe et que ∂V vérifie :

1. il existe un nombre fini de nappes $S_1, \dots, S_n$ tels que :

$$\partial V = \cup_{i=1}^n \partial S_i \qquad S_i \cap S_j \subset \partial S_i \cap \partial S_j \quad \forall i \neq j = 1, \dots, n$$

2. "la nappe se trouve toujours du même côté du bord" soit : pour chaque $i = 1, \ldots, n$ il y a une orientation (S_i, N^i) tel que pour tout $x \in S_i \backslash \partial S_i$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$x - tN^i(x) \in V \text{ et } x + tN^i(x) \notin V \quad \forall t \in (0, \varepsilon(x))$$

Définition 1.32 (Champs de normales unitaires extérieurs) Soit V un domaine régulier de $\mathbb{R}^3$. Un champs vectoriel $N : \partial V \to \mathbb{R}^3$ tel que $N(x) = N^i(x)$ pour tout $x \in \cup_{i=1}^n (S_i \backslash \partial S_i)$ est *un champs de normales unitaires extérieurs sur* ∂V.

Théorème 1.8 (de la divergence (Gauss-Ostrogradsky)) Intuitivement le théorème de la divergence stipule que "la somme des sources moins la sommes des puits à l'intérieur d'une surface est le flux à travers cette surface."

Soit V un domaine régulier de $\mathbb{R}^3$, $N : \partial V \to \mathbb{R}^3$ le champs de normales unitaires extérieurs à V alors :

$$\begin{aligned} \int_V div(f) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z &= \int_{\partial V} f \cdot N \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Omega \langle f(\alpha), \partial_1 \alpha \wedge \partial_2 \alpha \rangle \mathrm{d}s \mathrm{d}t \end{aligned}$$

avec $f \in C^1(\bar{V}, \mathbb{R}^3)$ et $\alpha(s,t) : \Omega \to S$ une représentation paramétrique régulière.

1.6 Champs qui dérivent d'un potentiel

1.6.1 Potentiel scalaire

Lemme 1.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel qui découle d'un potentiel ϕ sur Ω.

1. pour un chemin orienté $\vec{C}$ allant de P vers Q tel que $C \in \Omega$

$$\int_{\vec{C}} f dl = \phi(Q) - \phi(P)$$

2. si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ alors ∇f est symétrique pour tout $x \in \Omega$. C'est-à-dire :

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x) \qquad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Définition 1.33 (Irrotationnel) Pour $n = 3$ la matrice de ∇f est symétrique si et seulement si $\nabla \wedge f = 0$. Un champ vectoriel dont le rotationnel est nul en tout point est dit *irrotationnel.*

Théorème 1.9 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ alors :

1. f dérive d'un potentiel sur Ω si et seulement si :

$$\int_{\vec{C}} f \cdot dl = \int_{\vec{D}} f \cdot dl \tag{1.2}$$

avec $\vec{C}$ et $\vec{D}$ deux chemin de Ω allant de P vers Q tel que $C \cup D \subset \Omega$ et ceci quels que soient $P \neq Q$ de Ω.

2. Soit a un point de Ω. Si f dérive d'un potentiel sur Ω alors un potentiel est donné par :

$$\phi(x) = \int_{\vec{C}} f \cdot dl \quad x \neq a \qquad\qquad \phi(a) = 0$$

avec $\vec{C}(x)$ un chemin de a vers x tel que $C(x) \in \Omega$.

3. si ϕ et ψ deux potentiels sur Ω, alors il existe une constante $K \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \psi(x) + K \qquad \forall x \in \Omega$$

Remarque 1.13 Un champ vectoriel vérifiant l'Éq. 1.2 est dit *conservatif.*

Définition 1.34 (Ensemble étoilé) Intuitivement un ensemble Ω est dit étoilé par rapport à $A \in \Omega$ si le segment $[AM] \subset \Omega$ pour tout $M \in \Omega$. Formellement : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe. S'il existe $a \in \Omega$ tel que :

$$[a, x] = \{tx + (1-t)a : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega \qquad \forall x \in \Omega$$

On dit alors que Ω est un *ensemble étoilé* par rapport à a et un potentiel sur Ω pour f est donné par :

$$\phi(x) = \int_0^1 \langle f(tx + (1-t)a), x - a \rangle \mathrm{d}t \tag{1.3}$$

Définition 1.35 (Ensemble simplement connexe) Un sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit *simplement connexe* lorsque :

1. Ω est connexe
2. "tout chemin fermé dans Ω peut-être contracté en un point sans quitter Ω". Formellement, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est une représentation paramétrique régulière d'un chemin fermé de Ω alors il existe une fonction $H : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :
   (a) $H(0, s) = \gamma(s)$ pour tout $s \in [a, b]$
   (b) $H(1, s) = H(1, a)$ pour tout $s \in [a, b]$.
   (c) $H(t, s) \in \Omega$ pour tout $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$
   (d) $H(t, a) = H(t, b)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.14 Tout ouvert étoile de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe.

Théorème 1.10 [6] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et simplement connexe. Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ, alors f dérive d'un potentiel sur Ω si et seulement si $\nabla f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \Omega$.

Remarque 1.15 Dans $\mathbb{R}^3$ f dérive d'un potentiel si et seulement si f est irrotationnel.

1.6.2 Potentiels vecteur

Définition 1.36 (Incompressible, Solénoïdal) Un champs vectoriel $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $x \in \Omega$ $\nabla \cdot f = 0$ est dit *solenoidal* ou *incompressible.*

Théorème 1.11 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel dérivant d'un potentiel vecteur ϕ.

1. Soit (S_1, N_1) et (S_2, N_2) deux nappes avec bord tels que $S_1 \cup S_2 \subset \Omega$ et $\partial S_1 = \partial S_2 = C$. Si N_1 et N_2 engendrent la même orientation $\vec{C}$ alors :
$$\int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle d\sigma = \int_{S_2} \langle f, N_2 \rangle d\sigma$$
2. si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors $\nabla \cdot f = 0$ pour tout $x \in \Omega$.
3. si $g, G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sont deux potentiels vecteur sur Ω alors il existe une fonction $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ telle que :
$$G(x) = g(x) + \nabla\phi(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Remarque 1.16 Même si Ω est simplement connexe, $\nabla \cdot f = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que f découle d'un potentiel vecteur.

Remarque 1.17 Si f découle d'un potentiel vecteur g sur Ω alors d'après le théorème de Stokes :

$$\int_S \langle f, N \rangle d\sigma = \int_{\vec{C}} g \cdot dl$$

donc le flux de f à travers le chemin orienté $\vec{C}$ est égal à la circulation du potentiel g sur $\vec{C}$.

Théorème 1.12 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert étoilé par rapport à $a \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Si $\nabla \cdot f = 0$ sur Ω alors $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$g(x) = \int_0^1 f(tx + (1-t)a) \wedge t(x-a)dt$$

[6] Important : pour trouver un potentiel scalaire, on commence par vérifier cette condition. Si de plus Ω est étoilé on utilise l'Eq. 1.3 pour trouver une expression du potentiel. Si Ω n'est pas étoilé il faut intégrer en utilisant la définition du potentiel scalaire : $\nabla\phi = f$

est un potentiel vecteur pour f sur Ω, ce qui revient à dire que :

f dérive d'un potentiel vecteur sur Ω étoilé par rapport à $a \in \Omega$ si et seulement si $\nabla \cdot f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Remarque 1.18 La condition que Ω soit étoilé est restrictive. En pratique il est préferable d'exploiter la liberté du choix du potentiel pour considérer par exemple $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tel que :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x, y, z) \in \Omega\}$
2. il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in A$ l'intervalle $\{(x, y, z) \in \Omega / z \in \mathbb{R}\}$ contient c.

alors on peut chercher un potentiel vecteur de la forme $g = (g_1, g_2, 0)$ et la condition[7] $f = \nabla \wedge g$ équivaut à :

$$\begin{aligned} -\partial_3 g_2 &= f_1 \\ \partial_3 g_1 &= f_2 \\ \partial_1 h - \partial_2 k &= f_3 \end{aligned}$$

avec h, k les fonctions “constantes” obtenues en integrant $-\partial_3 g_2 = f_1$ et $\partial_3 g_1 = f_2$.

1.6.3 Fonction harmonique

Définition 1.37 (Fonction harmonique) Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que

1. $f = \nabla \phi$ sur Ω avec $\phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.
2. $f = \nabla \wedge g$ sur Ω avec $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$

alors $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $0 = \nabla \cdot f = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \Delta \phi$. Une fonction dont le laplacien ($\Delta f = 0$) est nulle est *harmonique*.

[7] c'est la définition d'un potentiel vecteur.

Chapitre 2

Séparation de variables

Proposition 2.1 (Eq. diff. linéaire du second ordre) Il faut savoir résoudre :

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$

Si le polynôme caractéristique $\lambda^2 + a\lambda + b$ possède deux solutions réelles $\lambda_{1,2}$ alors :

$$f(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

si le polynôme possède une racine rélle double λ_0 alors :

$$f(x) = (A + Bx)e^{\lambda_0 x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

et si le polynôme possède une racine complexe $\alpha + i\beta$ alors :

$$f(x) = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)] \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Définition 2.1 (Conditions homogènes) Une condition au bord est dite homogène si pour toute solutions u et v satisfaisant la condition, $au + bv$ satisfait aussi la condition quelque soit les constantes a et b.

Proposition 2.2 (Conditions) Pour appliquer la méthode de séparation de variable, le problème doit vérifier les trois conditions suivantes :

1. l'équation aux dérivées partielles doit être linéaire et homogène. Elle doit être une somme d'opérateurs différentiels agissant sur les variables séparement.
2. le domaine dans lequel on cherche les solutions doit être un produit d'intervalles
3. sauf pour une des variables, les conditions aux limites doivent être linéaires et homogènes.

Remarque 2.1 Si la troisième condition n'est pas remplie il est souvent utile de chercher les solutions pour une fonction u donnée comme :

$$u = v + w$$

où les conditions aux limites pour v et w vérifie les propriétés de linéarité et d'homogénéité.

Remarque 2.2 Si la seconde conditions n'est pas remplie, il est parfois utile d'effectuer un changement de variables.

Proposition 2.3 (Principe de superposition) La solution de u dépends souvent d'un paramètre n de la ou des solutions de l'équation différentielle du second ordre et donc généralement :

$$\sum_n u_n(x)$$

est aussi solution du probème. Il faut ensuite discréminer avec les conditions initiales.

Remarque 2.3 Par convention les opérateurs, notament le laplacien n'agissent pas sur la coordonnée temporelle. Si $u(x, y, t)$ alors $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Chapitre 3

Analyse Complexe

Définition 3.1 (Argument) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

La détermination principale de l'argument de z est l'unique $\theta = arg(z) \in (-\pi, \pi]$ tel que

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Définition 3.2 (Fonction continue) Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Une fonction f est en continue en $z \in \Omega$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon \qquad \forall w \in \Omega \cup B(z, \delta)$$

Définition 3.3 (Fonction convergente) $f(w) \in \mathbb{C}$ converge vers l lorsque w tends vers z, noté $f(x) \to l$ ou $\lim_{w \to z} f(w) = l$ lorsque :

1. pour tout $r > 0$, $\Omega \cup (B(z, r)\backslash\{z\}) \neq \emptyset$
2. pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

   $$|f(w) - l| < \epsilon$$

   pour tout $w \in \Omega \cap (B(z, \delta)\backslash\{z\})$

Définition 3.4 (Fonction $\mathbb{C}$-dérivable) Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. f est *$\mathbb{C}$-dérivable* en $z \in int(\Omega)$ lorsqu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = l$$

Dans ce cas l est unique et noté $f'(z)$. Dans la pratique, pour calculer la dérivée on utilise la (Prop. 3.3).

Proposition 3.1 f est dérivable en z si et seulement si

$$f(w) = f(z) + l(w - z)\rho(w)$$

avec $\rho : \Omega \to \mathbb{C}$ et $\lim_{w \to z} \frac{\rho(w)}{w-z} = 0$

Proposition 3.2 f est dérivable en z si et seulement si

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{f(z+\eta)-f(z)}{\eta}=l \Leftrightarrow f(z+\eta)=f(z)+l\eta+r(\eta)$$

avec $r:\Omega\backslash z\to\mathbb{C}$ et $\lim_{\eta\to 0}\frac{r(\eta)}{\eta}=0$ et lorsque $\eta\to 0$.

Proposition 3.3 Soit $f=u+iv:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction complexe et $z\in int(\Omega)$, alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en z si et seulement si :

$$\tilde{f}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

est dérivable au sens de Fréchet en $\tilde{z}=(x,y)$ et $\nabla\tilde{f}(x,y)\in P$ avec

$$P=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} a,b\in\right\}$$

et

$$\begin{aligned} f'(z) &= \partial_x u(x,y)+i\partial_x v(x,y) \\ &= \partial_y v(x,y)-i\partial_y u(x,y) \end{aligned}$$

Remarque 3.1 (Équations de Cauchy-Riemann) La condition $\nabla\tilde{f}(x,y)\in P$ revient à dire que les dérivées partielles de u et de v satisfont les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_x u=\partial_y v \\ -\partial_y u=\partial_x v \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Définition 3.5 (Fonction holomorphe) Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est *holomorphe sur* Ω lorsque f est dérivable en $z\in\Omega$ et on note $f\in H(\Omega)$.

Théorème 3.1 Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction complexe. Alors f est holomorphe sur Ω et $f':\Omega\to C$ est continue si et seulement si les dérivée partielles de u et v

1. existent
2. sont continue
3. vérifient les équations de Cauchy-Riemann (Eq. 3.1).

Théorème 3.2 Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction complexe, alors f est holomorphe sur Ω si et seulement si

1. $u,v\in C^\infty(\tilde{\Omega},\mathbb{R}^)$
2. u,v vérifient les équations de Cauchy-Riemann sur $\tilde{\Omega}$.

Ces équations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\nabla v = (\nabla u)\Gamma^T$$

Remarque 3.2 Les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe sont harmoniques.

Définition 3.6 (Fonction harmonique conjuguée) Soit $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et $u \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^)$.
Si $v \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^)$ est telle que u, v satisfont les équations de Cauchy-Riemann sur $\tilde{\Omega}$ alors on dit que v est une fonction harmonique conjuguée à u sur $\tilde{\Omega}$. On dit aussi que u et v sont des fonctions harmoniques conjuguées sur $\tilde{\Omega}$.

Théorème 3.3
1. soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe et $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors v (resp. u) est déterminée par u (resp. v) à une constante additive près.
2. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $u \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^)$ une fonction harmonique sur $\tilde{\Omega}$, alors il existe une fonction $v \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^)$ telle que $f = u + iv$ est holomorphe sur Ω.

Remarque 3.3 Les règles de calcul des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ sont équivalents a celles des dérivées des fonctions réelles.

3.1 Fonctions exponentielles et logarithmiques

Définition 3.7 (Fonction exponentielle) La formule d'Euler défini *l'exponentielle d'un nombre complexe* comme :

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Proposition 3.4 La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec

$$\frac{\mathrm{d}e^z}{\mathrm{d}z} = e^z$$

Proposition 3.5 Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 3.6 Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et pour $z, w \in \mathbb{C}^*$:

$$z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$$

$$z^\alpha w^\alpha = (zw)^\alpha e^{-2\pi i n\alpha} \qquad \text{avec n} \begin{cases} 1 & \text{si } argz + argw \leq -\pi \\ 0 & \text{si } argz + argw \in (-\pi, \pi] \\ -1 & \text{si } argz + argw \geq \pi \end{cases}$$

$$(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta} e^{2i\pi k\beta} \qquad k \in \mathbb{Z} \text{ et } \Im(\alpha \log z) + 2\pi k \in (-\pi, \pi]$$

$$|z^\alpha| = |z|^\alpha e^{-b \arg z} \qquad \forall \alpha = a + ib$$

$$\lim_{|z| \to 0} |z^\alpha| = 0 \qquad \text{si } \Re\alpha > 0$$

$$\lim_{|z| \to 0} |z^\alpha = \infty \qquad \text{si} \quad \Re\alpha < 0$$

$$\lim_{|z| \to 0} |z^\alpha| \text{ n'existe pas si } \Re\alpha = 0 \text{ et } \Im\alpha \neq 0$$

Définition 3.8 (Détermination principale du logarithme(!)) Soit $\Omega_p = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) < \pi\}$. La fonction inverse de la fonction exponentielle $f^{-1} : \mathbb{C}^* \to \Omega_p$ est la *détermination principale du logarithme* notée :

$$\ln : C^* \to \Omega_p$$

donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z)$$

Proposition 3.7 Pour tout $z, w \in \mathbb{C}^*$:

$$\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w) + i2\pi n \qquad \text{avec n} \begin{cases} 1 & \text{si } argz + argw \leq -\pi \\ 0 & \text{si } argz + argw \in (-\pi, \pi] \\ -1 & \text{si } argz + argw \geq \pi \end{cases}$$

Proposition 3.8 (Série de Taylor) La série de Taylor de ln autour de 1 est :

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k} \qquad \forall z \in B(1, 1)$$

Définition 3.9 (Fonctions trigonométriques) Les quatre fonctions trigonométriques suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_k \frac{(-1)^k z^{2k}}{2k!} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_k \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

3.2 Primitives et intégrales curvilignes

Théorème 3.4 (de Cauchy) Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un ouvert, f une fonction holomorphe sur Ω et C un chemin fermé orienté tel que $C \cup int(C) \in \Omega$, alors :

1. $$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

2. si l'orientation de C est positive
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z$$
pour tout $w \in int(C)$

3. si C_1 et C_2 sont deux chemins fermés orientés positivement tels que $C_2 \subset int(C_1)$ et $C_1 \cup \{int(C_1)\backslash int(C_2)\} \in \Omega$ alors :
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z - \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z\right]$$

4. et en supposant de plus que $f^{(k)}(z)$ existe pour tout $z \in \Omega$, $k \in N^*$:
$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\mathrm{d}w$$

Corollaire 3.1 Soient $\Omega \in \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in H(\Omega)$. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(z_0, r) \in \Omega$, alors :

1. $f \in C^\infty(\Omega)$.
2. la série de Taylor
$$\sum_j \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j$$
converge absolument uniformément sur $\overline{B(z_0, R)}$ pour $R \in (0, r)$
3. $$f(z) = \sum_j \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j$$

Théorème 3.5 (de Liouville) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.
S'il existe $M \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) \leq M$ pour tout $z \in \Omega$
alors f est constante sur Ω.

Remarque 3.4 Les fonctions f qui sont représentées par leur série de Taylor sont dites *analytiques*.

Théorème 3.6 (de Morera) Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur Ω vérifiant :

$$\int_{[P,Q]} f(z)\mathrm{d}z + \int_{[Q,R]} f(z)\mathrm{d}z + \int_{[R,P]} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

pour tout triplet de points P, Q, R tel que le triangle $\overline{co}\{P, Q, R\} \subset \Omega$.

Alors $f \in H(\Omega)$.

3.3 Série entières et séries de Laurent

Définition 3.10 (Convergence) Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ et $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite. Pour tout $z \in \Omega$, la série

$$\sum_k f_k(z)$$

converge s'il existe $l(z) \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k f_k(z) = l(z)$$

Définition 3.11 (Convergence absolue) Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ et $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite. Pour tout $z \in \Omega$, la série

$$\sum_k f_k(z)$$

converge absolument s'il existe $l(z) \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k |f_k(z)| = l(z)$$

ou encore :

La série

$$\sum_k f_k(z)$$

converge absolument sur Ω si

$$\left| l - \sum_k f_k(z) \right| < \epsilon \qquad \forall n \geq n(\epsilon), z \in \Omega$$

Définition 3.12 (Convergence normale) Soit

$$\alpha_k = \sup_{z\in\Omega} |f_k(z)|$$

La série

$$\sum_k f_k(z)$$

converge normalement sur Ω si $\sum_k \alpha_k < \infty$

Définition 3.13 (Série entière) Une *série entière* est une expression

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(z-z_0)^k$$

avec (a_k) la suite de coefficients et $z, z_0 \in \mathbb{C}$

Théorème 3.7 (du rayon de convergence) Soit $\sum_k a_k(z-z_0)^k$ une série entière et le rayon de convergence

$$R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{\frac{1}{k}}}$$

La série converge dans $\mathbb{C}$ pour tout $z \in B(z_0, R)$ et diverge ailleurs. Elle converge normalement sur $B(z_0, r)$ pour tout $r \in [0, R)$. Les mêmes critéres qu'en analyse réelle sont utilisé[1]

Remarque 3.5

$$\lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \sup |ka_k|^{\frac{1}{k}} \lim_{k\to\infty} \sup \left|\frac{1}{k+1} a_k\right|^{\frac{1}{k}}$$

---

[1]

Critère de Convergence 3.1 (de Cauchy) La suite de sommes partielles (S_n) converge si et seulement si la suite (S_n) est une suite de Cauchy.

Critère de Convergence 3.2 (de Comparaison) Soit (x_n) et (y_n) deux suites et $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$: $0 \leq x_n \leq y_n$. Alors si la série de terme général y_n est convergente alors la série de terme général x_n est aussi convergente.

Critère de Convergence 3.3 (des Séries Alternées) Soit (x_n) une suite de nombre réels vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq p$: $|x_{n+1}| \leq |x_n|$ et $x_n x_{n+1} \geq 0$;
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

alors la série de terme général x_n est convergente.

Critère de Convergence 3.4 (de la limite supérieure) Soit (x_n) une suite bornée telle que :

$$L = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

alors la série de terme général x_n est absolument convergente.

Critère de Convergence 3.5 (de d'Alembert) Soit (x_n) une suite pour laquelle $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ existe. Alors si :

1. $\rho < 1$ la série de terme général x_n est absolument convergente.
2. $\rho > 1$ la série est divergente
3. $\rho = 1$ on ne peut pas conclure.

Théorème 3.8 Soit $\sum_k a_k(z-z_0)^k$ une série entière de rayon de convergence R. Si $R > 0$, la fonction :

$$f(z) = \sum_k a_k(z-z_0)^k$$

est holomorphe sur $B(z_0, R)$ et sa série de Taylor autour de z_0 est :

$$\sum_k a_k(z-z_0)^k$$

De plus,

$$f'(z) = \sum_k k a_k(z-z_0)^{k-1} \qquad \forall z \in B(z_0, R)$$

et

$$g(z) = \sum_k \frac{1}{k+1} a_k(z-z_0)^{k+1}$$

est une primitive de f sur $B(z_0, R)$.

Définition 3.14 (Fonction analytique) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert. Une fonction $f \in C^\infty : \Omega \to \mathbb{C}$ est *analytique* sur Ω lorsque $f \in C^\infty(\Omega)$ et pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad \forall z \in B(z_0, \delta)$$

Théorème 3.9 f est analytique sur Ω si et seulement si f est holomorphe sur Ω.

Définition 3.15 (Série de Laurent) La notion de série entière est généralisée par *la série de Laurent* :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$$

qui peut être interprétée comme la somme de deux séries :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^m$$

dont la première est une série entière et la seconde une composition des séries entières

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} z^m \quad \text{et} \quad K(z) = \frac{1}{z-z_0}$$

Théorème 3.10 Considérons la fonction f définie comme la somme de la série de Laurent :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$$

dont les coefficients vérifient :

$$a = \frac{1}{\liminf_{m\to-\infty} |a_m|^{\frac{1}{m}}} < b = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

alors $f \in H(C(z_0, a, b))$ avec

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} na_n(z-z_0)^{n-1} \qquad \forall z \in C(z_0, a, b)$$

et pour tout chemin fermé orienté positivement C vérifiant $C \subset C(z_0, a, b)$ et $B(z_0, a) \in int(C)$

$$\int_C \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n \mathrm{d}z = i2\pi a_{-1}$$

Corollaire 3.2 Soit les deux séries de Laurent

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-z_0)^n$$

dont les couronnes de convergence sont $C(z_0, a, b)$ et $C(z_0, c, d)$ respectivement. S'il existe un cercle $C \subset C(z_0, a, b) \cap C(z_0, c, d)$ tel que

1. $[B(z_0, a) \cup B(z_0, c)] \subset int(C)$
2. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-z_0)^n$ pour tout $z \in C$

alors

$$a_n = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Théorème 3.11 Toute fonction holomorphe dans une couronne est égale à une unique série de Laurent sur cette couronne. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq a \leq b < \infty$. Si $f \in H(C(z_0, a, b))$ alors :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n \qquad \forall z \in C(z_0, a, b)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

où C est un cercle de centre z_0 et de rayon $c \in (a, b)$ orienté positivement. La série converge normalement dans partie compacte de $C(z_0, a, b)$.

Remarque 3.6 ((Importante)) Pour calculer les séries de Laurent il est pratique d'utiliser :

$$\frac{1}{1-w} = \sum_k w^k \qquad \text{si } |w| < 1$$

3.4 Singularités isolées et résidus

Développer une fonction en série de Laurent permet d'étudier son comportement lorsque'elle converge vers un point donné. Trois cas peuvent se produire :

1. singularité artificielle
2. pôle
3. singularité essentielle

3.4.1 Singularités isolées

Définition 3.16 (Boule pointée) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{R}^+$. La *boule pointée* $B'(z_0, d)$ est définie par :

$$B'(z_0, d) = B(z_0, d) \backslash \{z_0\}$$

Définition 3.17 (Partie régulière et partie singulière) Soit f une fonction holomorphe admettant une série de Laurent dans $B'(z_0, d)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \forall z \in B'(z_0, d)$$

La *partie régulière* de f est définie par :

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

et la *partie singulière* par :

$$f_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

Définition 3.18 (Singularités) Le comportement de $f(z)$ lorsque $z \to z_0$ se réduit à trois cas :

1. si $a_n = 0$ pour tout $n \leq -1$ on dit que z_0 est une *singularité artificielle* de f.
2. s'il existe $p \geq 1$ tel que $a_{-p} \neq 0$ mais $a_n = 0$ pour tout $n < -p$ on dit que z_0 est *un pôle d'ordre* p de f.
3. si pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $n < -p$ tel que $a_n \neq 0$ on dit que z_0 est une *singularité essentielle* de f.

Théorème 3.12 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $d \in (0, \infty)$ et $f \in H(B'(z_0, z))$

1. Caractérisation d'une singularité artificielle

$$\begin{aligned}
& z_0 \text{ est une singularité artificielle de f} \\
\Leftrightarrow\ & \text{il existe } w \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{z\to z_0} f(z) = w \\
\Leftrightarrow\ & \text{il existe } L \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lim_{z\to z_0} |f(z)| = L \\
\Leftrightarrow\ & |f| \text{ est borné sur } B'(z_0, r) \text{ pour tout } r \in (0, d) \\
\Leftrightarrow\ & \text{il existe un prolongement de } f \text{ qui est holomorphe sur } B(z_0, d)
\end{aligned}$$

2. caractérisation d'un pôle

$$\begin{aligned}
& z_0 \text{ est un pôle de } f \\
\Leftrightarrow\ & \text{il existe } p \geq 1 \text{ et } g \in H(B(z_0, d)) \text{ tels que } g(z_0) \neq 0 \\
& \text{et } f(z) = (z - z_0)^{-p} g(z) \text{ pour tout } z \in B'(z_0, d) \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty
\end{aligned}$$

3. caractérisation d'une singularité essentielle

$$\begin{aligned}
& z_0 \text{ est une singularité essentielle de } f \\
\Leftrightarrow\ & \text{pour tout } w \in \mathbb{C} \text{ il existe une suite } (z_k) \in B'(z_0, d) \text{ tel que } z_k \to z_0 \\
& \text{et } \lim f(z_k) = w \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{z\to z_0} |f(z)| \text{ n'existe pas}
\end{aligned}$$

3.4.2 Zéros d'une fonction holomorphe

Définition 3.19 (Zéro) Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ ouvert et $f \in H(\Omega)$. On dit que $z_0 \in \Omega$ est un *zéro d'ordre* $q \geq 1$ *de* f lorsque

$$f^{(q)}(z_0) \neq 0 \quad \text{mais} \quad f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k = 0, \ldots, q-1$$

Théorème 3.13 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et connexe, $f \in H(\Omega)$ et $w \in \Omega$. Alors :

1. si w est un zéro d'ordre infini de f alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$
2. s'il existe une suite $(z_n) \subset \Omega\backslash\{w\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ et

   $$f(z_n) = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   alors$f(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.
3. si $g \in H(\Omega)$ et la suite $(z_n) \subset \Omega\backslash\{w\}$ vérifie $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ et

$$g(z_n) = f(z_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

alors $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Théorème 3.14 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f \in H(\Omega)$. Si $w \in \Omega$ est un zéro de f d'ordre $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ alors w est un pôle d'ordre q de la fonction $\frac{1}{f}$.

Définition 3.20 (Fonction méromorphe) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert. La fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *méromorphe* sur Ω s'il existe un sous-ensemble S de Ω tel que :

1. si $K \subset \Omega$ est compact, alors $K \cap S$ est fini (ou vide).
2. $f \in H(\Omega\backslash S)$
3. f n'a aucune singularité essentielle dans Ω.

3.4.3 Résidus

Définition 3.21 (Résidu) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f \in H(\Omega)$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $d > 0$ tels que $B'(z_0, d) \subset \Omega$ alors le *résidu* de f en z_0 est :

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

où $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est le développement de Laurent de f autour de z_0, C un chemin fermé de Ω d'orientation positive et $z_0 \in int(C)\backslash\{z_0\}$.

Théorème 3.15 (des Résidus) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f \in H(\Omega)$ et C un chemin fermé dans Ω d'orientation positive. Supposons qu'il existe un nombre fini de points $z_1, \ldots, z_n \in int(C)$ tel que $int(C)\backslash\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \Omega$, alors :

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

Ce théorème est important pour le calcul d'intégrales réelles.

Proposition 3.9 (Calcul (algorithmique) du résidu) Supposons $z_0 \in \Omega$ pôle de $f \in H(\Omega)$. Le calcul de $Res(f, z_0)$ se fait suivant l'algorithme :

1. Calcul de $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \alpha$
   (a) si $\alpha \in [0, \infty)$ alors z_0 est une singularité artificielle et $Res(f, z_0) = 0$. `FIN`
   (b) si α n'existe pas z_0 est une singularité essentielle. `ABANDONNER`
   (c) si $\alpha = \infty$ alors z_0 est un pôle. `CONTINUER`
2. Calcul de $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = \beta$
   (a) si $\beta \in \mathbb{C}$ alors z_0 est un pôle d'ordre 1 et $Res(f, z_0) = \beta$. `FIN`
   (b) si $\beta = \infty$ alors z_0 est un pôle d'ordre ≥ 2. `CONTINUER`
3. Calcul de $\lim_{z\to z_0}[(z - z_0)^p f(z)]^{(p-1)} = \gamma$
   (a) si $\gamma \in \mathbb{C}$ alors z_0 est un pôle d'ordre p et $Res(f, z_0) = \frac{\gamma}{(p-1)!}$. `FIN`
   (b) si $\gamma = \infty$ alors z_0 est un pôle d'ordre $\geq p + 1$. `CONTINUER`

3.4.4 Calcul d'intégrales

Le théorème des résidus permet de calculer certaines intégrale sans devoir expliciter l'intégrale de l'intégrand.

Proposition 3.10 Calcul des intégrales de fonctions rationnelles de fonction circulaires. Soit R une fonction rationnelle tel que la fonction :

$$f(z) = \frac{R\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})\right)}{iz}$$

n'admet aucun pôle sur le cercle $C(z,1)$ alors :

$$\int_0^{2\pi} R(cos\theta, sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2i\pi S$$

où S est la somme des résidus de f dans l'intérieur de C.

Remarque 3.7 L'inégalité triangulaire inverse $|x+y| \geq ||x|-|y||$ est souvent utile pour majorer des intégrales dans la méthode des résidus.

Remarque 3.8 Dans le calcul d'intégrale réelles avec le théorème des résidus les relations suivanes sont pratiques :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

en posant $z = e^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = iz\mathrm{d}\theta$:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

de même pour le sinus :

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$$

Proposition 3.11 Considérons une fonction $f \in H(\mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_n\})$ ayant les propriétés suivantes :

1. pour tout $k = 1, \ldots, n$, $z_k \in \mathbb{C}\backslash(0, \infty)$
2. il existe M, r et $p > 0$ tels que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \qquad \forall z \in C(0,0,r)$$

3. il existe $N > 0$, $R > r$ et $q > p$ tels que

$$|f(z)| \leq \frac{N}{|z|^q} \qquad \forall z \in C(0,R,\infty)$$

alors pour tout $\alpha \in (]p, q[\backslash \mathbb{N})$ l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) \mathrm{d}x$$

est absolument convergente et

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) \mathrm{d}x = \frac{2\pi i S}{1 - e^{2\alpha i \pi}} = \frac{\pi S e^{-\alpha \pi i}}{\sin(\alpha \pi)}$$

où S est la somme des résidus de $z^{\alpha-1} f(z)$ aux singularités de f sauf pour $z = 0$ (car les singularités de $z^{\alpha-1} f(z)$ sont les mêmes que $f(z)$ sauf éventuellement pour 0).

Proposition 3.12 Considérons une fonction $f \in H(\mathbb{C} \backslash \{z_1, \ldots, z_n\})$ ayant les propriétés suivantes :

1. pour tout $k = 1, \ldots, n$, $z_k \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$
2. il existe $N, R > 0$ tels que :

$$|f(z)| \leq \frac{N}{|z|^2} \qquad \forall z \in C(0, R, \infty)$$

alors l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ est absolument convergente et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i S = -2\pi i T$$

où S est la somme des résidus de f aux singularités dans la région $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ et T est la somme des résidus de f aux singularités dans la région $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\}$.

Théorème 3.16 (Intégrale de Fourrier) Considérons une fonction $f \in H(\mathbb{C} \backslash \{z_0, \ldots, z_n\})$ vérifiant :

1. 0 est une singularité artificielle ou un pôle simple de f.
2. pour tout $k = 1, \ldots, n$, $z_k \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.
3. il existe $N, R > 0$ tels que $|f(z)| \leq \frac{N}{|z|}$ pour tout $z \in C(0, R, \infty)$

alors pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{\substack{r \to 0^+ \\ R \to \infty}} \left(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right) e^{i\alpha x} f(x) \mathrm{d}x = 2\pi i S + \pi i T$$

où S est la somme des résidus de $e^{i\alpha z} f(z)$ dans la région $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ et T est le résidu de $e^{i\alpha z} f(z)$ en 0.

Remarque 3.9 Dans le cas de l'intégrale de Fourrier,

1. si 0 est une singularité artificielle de f et $|f(z)| \leq \frac{M}{|x|^2}$ pour tout $|x| \geq R$ alors $T = 0$ et :
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i S$$
Si de plus la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) f(x)\mathrm{d}x = Re(2\pi i S) \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x) f(x)\mathrm{d}x = Im(2\pi i S)$$
2. si 0 est un pôle simple de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f(x) = -f(-x)$ alors :
$$\int_{0}^{\infty} \sin(\alpha x) f(x)\mathrm{d}x = \frac{Im(2\pi i S + \pi i T)}{2}$$

Remarque 3.10 Il est aussi utile d'utiliser le Théorème des résidus 3.15.

Chapitre 4

Transformée

4.1 Transformée de Laplace

4.1.1 Notions élémentaires

Définition 4.1 (Ordre exponentiel) f est *d'ordre exponentiel* α lorsque :

1. f est continue par morceaux sur $[0, \infty[$
2. $e^{-\alpha t} f(t)$ est borné sur $[0, \infty[$

et on définit :

$$E(\alpha) = \{f : [0, \infty[\to \mathbb{R} \text{ d'ordre epxonentiel } \beta > \alpha\}$$

Définition 4.2 (Transformée de Laplace) Soit $f \in E(\alpha)$. La *transformée de Laplace* de f est la fonction complexe $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$D(\tilde{f}) = R(\alpha) = \{s \in \mathbb{C}/Re(s) > \alpha\}$$
$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t$$

Remarque 4.1 Soit $f, g \in E(\alpha)$, $a, b \in \mathbb{R}$ alors $af + bg \in E(\alpha)$ et

$$\widetilde{af + bg}(s) = a\tilde{f}(s) + b\tilde{g}(s) \qquad \forall s \in R(\alpha)$$

Cette propriété de linéarité rends la transformée de Laplace attractive pour la résolution d'équations différentielles linéaires aux coefficients constants.

Proposition 4.1 Quelques transformée élémentaires :

$$\begin{aligned} \widetilde{e^{\alpha x}} &= \frac{1}{s - \alpha} \\ \widetilde{\cos(\alpha x)} &= \frac{s}{s^2 + \alpha^2} \\ \widetilde{\sin(\alpha x)} &= \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

Proposition 4.2 Si $f \in E(\alpha)$ alors $\tilde{f} \in H(\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \alpha\})$ et

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{f}(s)}{\mathrm{d}s} = \tilde{f}'(s) = -\tilde{g}(s) \qquad \forall s \in D(\tilde{f})$$

avec $g = tf(t)$

Remarque 4.2 $g \in E(\alpha)$ donc $D(\tilde{g}) = D(\tilde{f})$

Proposition 4.3 Pour $\beta > \alpha$

$$\lim_{|s|\to\infty} \tilde{f}(s) = 0 \quad \text{uniformement sur } \{s \in \mathbb{C}/\Re(s) \geq \beta\}$$

et pour $\delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\lim_{|s|\to\infty} s\tilde{f}(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t) \quad \text{uniformement sur } \{s \in \mathbb{C}/|\arg s| \leq \delta\}$$

4.1.2 Inversion

Théorème 4.1 Soit $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

1. il existe $\alpha \geq 0$ tel que

   $$R(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \alpha\} \subset C$$

   et $F \in H(R(\alpha))$.
2. il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $\beta > \alpha$ il existe $M(\beta) > 0$ tel que :

   $$\left|F(z) - \frac{A}{z}\right| \leq \frac{M(\beta)}{|z|^2}$$

   pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \geq \beta$.

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\beta > \alpha$ l'intégrale

$$\int_{\Gamma(\beta)} e^{tz} \left[F(z) - \frac{A}{z}\right] \mathrm{d}z = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\beta+iy)} \left[F(\beta + iy) - \frac{A}{\beta + iy}\right] \mathrm{d}y$$

converge absolument et ne dépend pas de β. $\Gamma(\beta)$ est la droite $\Re(z) = \beta$ orientée positivement.

De plus en posant

$$g(t) = \int_{\Gamma(\beta)} e^{tz} \left[F(z) - \frac{A}{z}\right] \mathrm{d}z \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \beta > \alpha$$

on a $g \in C(\mathbb{R}^)$, $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

En posant

$$f(t) = A + \frac{1}{2\pi i} g(t) \qquad \forall t \geq 0$$

$f \in E(\alpha)$, $f \in C([0, \infty[)$ et $\tilde{f}(s) = F(s)$ pour tout $s \in R(\alpha) = D(\tilde{f})$.

Théorème 4.2 (Transformée de Laplace inverse) Soit $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une vérifiant :

1. il existe $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $F \in H(\Omega \backslash \{z_1, \ldots, z_n\})$
2. $\lim_{|z| \to \infty} F(z) = 0$

alors

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} Res(e^{tz}F(z), z_k) \qquad \forall t > 0$$

et $f \in E(\alpha)$ avec $\alpha = \max(0, z_k)$ et $\tilde{f}(s) = F(s)$ pour tout $s \in R(\alpha) = D(\tilde{f})$.

4.1.3 Dérivées et convolution

Proposition 4.4 Soit $f \in C^1([0, \infty[)$ vérifiant $f, f' \in E(\alpha)$. Alors

$$\tilde{f}'(s) = -f(0) + s\tilde{f}(s) \qquad \forall s \in R(\alpha)$$

Si $f \in C^n([0, \infty[)$ est tel que $f^{(k)} \in E(\alpha)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$, alors :

$$\widetilde{f^{(n)}}(s) = -\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0) + s^n \tilde{f}(s)$$

pour tout $s \in R(\alpha)$.

Définition 4.3 (Convolution) Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[0, \infty[$. La *convolution* de f et g sur $[0, \infty[$ est la fontion $f * g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad t \geq 0$$

Proposition 4.5 Soit $f, g \in E(\alpha)$, alors $f * g \in E(\alpha)$ et

$$\widetilde{f * g}(s) = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \qquad \forall s \in R(\alpha)$$

[1]

4.1.4 Résolution d'équations différentielles

La résolution se fait en trois étapes :

1. on applique la transformation de Laplace à la fonction recherchée
2. on résout la transformée ce qui donne les singularités
3. on applique la transformée inverse à l'aide des singularité trouvées

[1] Cette propriété est pratique pour l'inversion : si on connait $\tilde{f} = F$ et $\tilde{g} = G$ alors $\widetilde{f * g} = FG$

4.2 Transformée de Fourrier

Définition 4.4 ($\mathcal{L}^p$) Pour $1 \leq p < \infty$ on écrit $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ lorsque l'intégrale

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x$$

converge et on pose :

$$\|f\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right]$$

Définition 4.5 (Transformée de Fourier) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La *transformée de Fourier* de f est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) \mathrm{d}x \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Théorème 4.3 (Important) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors :

1. $\hat{f} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$
2. $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ et $\lim_{|\xi| \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$

Théorème 4.4 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

1. si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors :
$$\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) \quad \text{et} \quad \lim_{|\xi| \to \infty} \xi \hat{f}(\xi) = \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$$
2. soit $g(x) = xf(x)$ avec $g \in \mathcal{L}^1$, alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ avec :
$$(\hat{f})'(\xi) = -i\hat{g}(\xi) \quad \text{et} \quad \lim_{|\xi| \to \infty} (\hat{f})'(\xi) = 0$$
3. si $h \in \mathcal{L}^1$ alors $f\hat{h}, \hat{f}h \in \mathcal{L}^1$ avec :
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{h}(x) \mathrm{d}x = \int_{\infty}^{\infty} \hat{f}(x)h(x) \mathrm{d}x$$

Théorème 4.5 Soit $f \in \mathcal{L}^1$ une fonction telle que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$, alors :

1. $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^\infty \cap C$ et
$$\widehat{(\hat{f})}(x) = f(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
2. $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^2$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

3. pour $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $\hat{g} \in \mathcal{L}^1$, $fg, \hat{f}\hat{g} \in \mathcal{L}^1$ avec :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\bar{\hat{g}}(x)\mathrm{d}x$$

Définition 4.6 (Transformée de Fourier inverse) La *transformée de Fourier inverse* $f^{\vee} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ est définie par :

$$f^{\vee}(x) = \hat{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Définition 4.7 (Er(f)) La *fonction d'erreur* est définie par :

$$Er(f) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-y^2}\mathrm{d}u$$

Définition 4.8 (Convolution) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. La convolution de f et g est[2] la fonction $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

lorsque cette intégrale converge.

Théorème 4.6
1. soit $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ et $g \in \mathcal{L}^1$, alors pour tout réel x la fonction $f(x-y)g(y)$ est de classe C^1 et :
   (a) $f * g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ avec $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
   (b) $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$
   (c) [3] $\widehat{f * g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$
2. si $f, g \in \mathcal{L}^1$ vérifient $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{L}^1$ alors :

$$(fg)^{\vee}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{\vee} * g^{\vee}\right)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

[2] dans le cadre de la transformée de Fourier
[3] utile pour résoudre des problèmes d'équations différentielles.