Chapitre 26 : Méthodes de calcul des intégrales doubles

Convention : on identifie le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal direct à $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées seront *x*, *y*.

I Intégrales doubles et aires

A) Domaines élémentaires, domaines simples

Une partie de $\mathbb{R}^2$ est un domaine élémentaire de $\mathbb{R}^2$ si elle admet *les deux* définitions suivantes (*simultanément*) :

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, c\le y\le d, \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

où φ_1,φ_2 (resp. ψ_1,ψ_2) sont des fonctions continues sur $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) telles que $\varphi_1<\varphi_2$ sur $]a,b[$ (resp. $\psi_1<\psi_2$ sur $]c,d[$)

Un domaine est dit simple s'il est réunion finie de domaines élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints.

Remarque :

Un convexe compact d'intérieur non vide est élémentaire.

Les domaines simples sont un cas particulier de domaines quarrables de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$), c'est-à-dire de compacts dont la frontière est une réunion finie d'arcs paramétrés (resp. de nappes paramétrées) 'de mesure nulle'. C'est pas exemple le cas lorsque la frontière est réunion finie d'arcs (resp. de nappes) de classe C^1 ou de graphe de fonctions continues comme ci-dessus.

B) Intégrale d'une fonction continue sur un domaine simple

Théorème :

Soit $f : A\to\mathbb{R}$ continue sur le domaine élémentaire *A* où

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, c\le y\le d, \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

où φ_1,φ_2 (resp. ψ_1,ψ_2) sont des fonctions continues sur $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) telles que $\varphi_1<\varphi_2$ sur $]a,b[$ (resp. $\psi_1<\psi_2$ sur $]c,d[$). Alors les deux intégrales suivantes existent et sont égales :

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

Définition :

Sous les hypothèses du théorème, on pose :

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

Plus généralement, si f est continue sur le domaine simple D réunion des domaines élémentaires $A_1, A_2 ... A_p$ d'intérieurs deux à deux disjoints, on pose :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{p} \iint_{A_i} f(x,y)dxdy$$

Remarque :

On admet que deux découpages distincts en domaines élémentaires d'un même domaine simple fournissent la même valeur de l'intégrale.

Théorème :

(1) Linéarité : l'intégrale sur un domaine simple fixé D est linéaire par rapport à la fonction.

(2) Additivité : soient D_1, D_2 deux domaines simples de $\mathbb{R}^2$ d'intérieurs disjoints et $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}$ continue.

Alors $\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$

C) Aire (ou mesure) d'un domaine simple D de $\mathbb{R}^2$.

C'est le réel positif $\mu(D) = \iint 1_D \, dxdy$.

D) Lien avec les intégrales sur $\mathbb{R}^2$.

Soit A un domaine simple et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. On prolonge f sur $\mathbb{R}^2$ en $\hat{f}$ par 0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Lemme :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions continues $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ à support compact telles que $\forall M \in A, \varphi(M) \leq f(M) \leq \psi(M)$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} (\psi(x,y) - \varphi(x,y))dxdy < \varepsilon$

Théorème et définition :

Les deux quantités ci-dessus existent et sont égales, et on définit l'intégrale de $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)dxdy &= \sup\left\{\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\varphi}(x,y)dxdy, \varphi \text{ est continue intégrable et } \varphi \leq \hat{f}\right\} \\ &= \inf\left\{\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\varphi}(x,y)dxdy, \varphi \text{ est continue intégrable et } \varphi \geq \hat{f}\right\}\end{aligned}$$

Théorème :

Avec les notations précédentes, on a $\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)dxdy$

II Changement de variables

- Théorème :

Soit $\theta:(u,v)\in D'\mapsto(P(u,v),Q(u,v))\in D$ une application C^1 qui soit un homéomorphisme du domaine *D'* sur le domaine *D* et un difféomorphisme entre l'intérieur de *D'* et celui de *D*.

On note $j(u,v)=\dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial Q}{\partial v}-\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial u}$ le jacobien de θ au point (u,v) (il ne s'annule pas à l'intérieur de *D'* mais peut s'annuler sur la frontière)

Dans ces conditions, pour $f:D\to\mathbb{C}$ continue, on a :

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(P(u,v),Q(u,v))\left|j(u,v)\right|dudv$$

(Attention : il faut prendre la valeur absolue du jacobien)

- Exemple fondamental des coordonnées polaires :

On prend $P:(r,t)\in D'\mapsto(r\cos t,r\sin t)\in D$ que l'on suppose vérifier les conditions du théorème (par exemple un difféomorphisme). Dans ces conditions, pour $f:D\to\mathbb{C}$ continue, on a $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos t,r\sin t)rdrdt$.

III Utilisation d'une forme différentielle, formule de Green–Riemann

- Théorème :

Soit $\omega(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert *U* de $\mathbb{R}^2$, et $D\subset U$ un domaine (*D entier* doit être dans *U*), et $\varphi:[a,b]\to D$ une représentation paramétrique continue partout et C^1 par morceaux de la frontière de *D* orientée dans le sens direct. Dans ces conditions, on a :

$$\int_\varphi P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

- Applications aux aires planes :

Si *D* est le domaine de frontière orientée $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ (qui est un chemin fermé), les formes différentielles xdy, $-ydx$ et leur demi–somme fournissent les formules d'aires :

$$\text{Aire}(D)=\int_\varphi xdy=-\int_\varphi ydx=\tfrac{1}{2}\int_\varphi xdy-ydx$$

Si la frontière est la courbe simple d'équation polaire $r=f(\theta)$, avec *f* à valeurs strictement positives, l'aire vaut aussi $\frac{1}{2}\int_\varphi f^2(\theta)d\theta$

IV En pratique

Pour calculer une intégrale donnée, il y a deux points incontournables :

Il faut commencer par représenter graphiquement le domaine d'intégration.

Ensuite, selon les symétries de la fonction et du domaine, il faut choisir la méthode de calcul. Dans tous les cas, il faut s'aider d'une étude graphique : celles des « tranches » si on les utilise, du nouveau domaine pour un changement de variable, du chemin orienté pour l'usage d'une forme différentielle…