

Séries Numériques dans un espace vectoriel normé

Introduction

Lorsque l'on regarde une suite de nombres $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est naturel de sommer les n premiers termes de cette suite et d'étudier si la suite de ces sommes a elle-même une limite. C'est la notion de **série**, dont un exemple classique est la série géométrique. Une série donc est un objet qui consiste à faire la somme d'un nombre infini de quantités très petites. Ce concept intervient fortement dans le cadre des probabilités discrètes. Ce n'est mathématiquement qu'un cas particulier de suites réelles. A priori, on peut se demander pourquoi consacrer un traitement particulier à cet objet? Il s'avère pourtant que l'étude de ces séries est relativement différent de celle des suites. Nous détaillons dans ce chapitre l'étude des séries numériques, puis nous appliquons les théorèmes de convergence uniforme pour étudier ensuite les séries de fonctions.

1 L'utilisation du symbole \sum

Le symbole de sommation va être utilisé de **manière systématique** dans le cadre des séries. Nous rappelons rapidement ses principes d'utilisation dans le cas des sommes finies. Si (u_1, \dots, u_n) désigne une famille de nombres (ou plus généralement d'éléments d'un espace vectoriel), on note

$$u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad (1)$$

L'indice k de sommation est un **indice muet** qui peut être remplacé par d'autres lettres. Par exemple

$$u_1 + \dots + u_n = \sum_{p=1}^n u_p$$

Cette somme a des propriétés de **linéarités** évidentes :

$$\sum_{p=1}^n (\lambda u_p + \mu v_p) = \lambda \sum_{p=1}^n u_p + \mu \sum_{p=1}^n v_p$$

On a également **la relation de chasles** :

$$\sum_{p=1}^r u_p + \sum_{p=r+1}^n u_p = \sum_{p=1}^n u_p$$

Il est possible de faire des changements de variables sur l'indice de sommation. Par exemple, si a est un entier, les sommes suivantes sont les mêmes :

$$\sum_{p=1}^r u_p = \sum_{q=3}^{n+2} u_{q-2} = \sum_{r=a+1}^{a+n} u_{r-a}$$

D'autre part, on peut faire une **translation d'indices** dans une somme, i.e, si a est un entier, en posant $p = k + a$, on a :

$$\sum_{p=1}^r u_p = \sum_{r=1-a}^{n-a} u_{k+a}$$

2 Définition des séries numériques

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou complexes. A partir de cette suite on définit une nouvelle suite $(S_n)_n$ en posant

$$S_n = \sum_{p=n_0}^n u_p$$

Définition

- On appelle **série numérique** le couple $((u_n)_n, (S_n)_n)$. Le nombre u_n est appelé terme général de la série. Le nombre S_n est la somme partielle de rang (ou d'ordre) n de la série, et (S_n) est la suite des sommes partielles.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge, dans ce cas, on appelle somme de la série la limite $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ de cette suite ;

On note cette limite comme suite

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

Que l'on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n_0}^n u_p = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$$

On appellera reste de rang (ou d'ordre) n de la série, le nombre

$$R_n = \sum_{p=n_0}^{\infty} u_p - \sum_{p=n_0}^n u_p = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p$$

Remarques

- Etudier si une série converge revient à étudier si une suite converge et les théorèmes sur les suites vont donc s'appliquer.
- L'étude d'une série numérique ressemble beaucoup à celle d'une intégrale généralisée. Ainsi, il est intéressant de savoir d'avance si une série est convergente sans passer par l'intermédiaire du calcul de S_n et de sa limite S . (Si la série est divergente, une fois encore le problème est terminé).
- Il est d'ailleurs assez rare que l'on puisse calculer la valeur exacte de la somme S d'une série convergente. A défaut, on se contente d'une valeur numérique approchée de S . On remplace d'habitude S par S_n , et l'on essaie de majorer l'erreur commise, à savoir $R_n = S_n - S$.

2.1 Exemples de séries numériques

Dans ce paragraphe nous donnons quelques exemples de méthodes servant à étudier la convergence ou à calculer la somme d'une série.

2.1.1 Le paradoxe de Zenon

Le philosophe grec Zenon (500 ans avant J.C.) se posait la question suivante : Sachant qu'Achille court douze fois plus vite qu'une tortue, peut-il la rattraper s'il part avec un handicap d'un stadion (ancienne mesure de longueur qui correspond à 200 m environ). Pendant que la tortue parcourt une distance de $\frac{1}{11}$ de stadion. Achille couvre $12 \times \frac{1}{11} = 1 + \frac{1}{11}$ de stadion c'est à dire le handicap plus le trajet fait par la tortue. Donc Achille rattrape la tortue ce qui conforme au sens commun.

Mais Zenon suivait un autre raisonnement : quand Achille parcourt 1 stadion, la tortue avance de $\frac{1}{12}$ de stadion, quand il parcourt ce $\frac{1}{12}$ de stadion restant, la tortue avance de $\frac{1}{12^2}$ de stadion, quand il couvre cette dernière distance, la tortue a encore $\frac{1}{12^3}$ d'avance etc... D'où l'idée qu'Achille ne peut pas rattraper la tortue puisqu'il lui restera toujours un handicap à combler. Ceci constitue le paradoxe du sophiste Zenon.

En fait la distance parcourue par Achille jusqu'au point où il rattrape la tortue peut s'exprimer par la somme $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots$ le points de suspension signifiant que chaque terme $a_k = \frac{1}{12^k}$ est suivi par un autre $a_{k+1} = \frac{1}{12^{k+1}}$, l'expression n'ayant pas de fin. En résumé cette distance est la somme de la série de terme général $\frac{1}{12^k} : \sum_{k \geq 0} \frac{1}{12^k}$ et Zenon suggérait que cette somme étant infinie, mais il n'en est rien comme le prouve le calcul suivant

$$S_n = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} \dots + \left(\frac{1}{12}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{12}{11} \left(1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{12}{11}$ cette valeur représente la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{12^n}$. On retrouve bien la valeur évoquée plus haut : elle représente la distance parcourue par Achille pour rattraper la tortue.

2.1.2 La série géométrique

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série de terme général a^n converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

On sait calculer les sommes partielles de la série

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

La suite (a_n) a une limite finie si et seulement si $|a| < 1$ et cette limite est nulle.

On en déduit que la série de terme général a^n converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Si a est un nombre réel plus grand que 1, la série diverge et la somme est infinie. Dans les autres cas la suite des sommes partielles n'a pas de limite.

2.1.3 Le procédé télescopique

Soit $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. On pose $u_n = v_n - v_{n+1}$ comme différence de deux termes successifs d'une même suite. Alors la série de terme général un converge si et seulement si la suite (v_n) converge. De plus

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n = v_{n_0} - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Exemple

Par exemple calculons la somme de la série si $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, la décomposition en éléments simples donne

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = v_n - v_{n+1} \text{ avec } v_n = \frac{1}{n}$$

et donc la série de terme général u_n converge et en appliquant le procédé télescopique on aura

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = v_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

2.1.4 série harmonique

On étudie ici un exemple qui sera important par la suite, cette série est de terme général $\frac{1}{n}$. Dans le cas présent, il ne sera pas possible de calculer explicitement la suite des sommes partielles. Posons

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{n}$$

Nous allons montrer que la série $\sum u_n$ est divergente. En effet, supposons la convergente et regardons $S_{2n} - S_n$, où (S_n) est la suite des sommes partielles associée. Puisque la série est supposée convergente, on doit avoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0.$$

Néanmoins, on a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

La suite (u_n) étant décroissante, chacun des termes de la somme précédente est supérieure au dernier, c'est-à-dire $\frac{1}{2n}$. On en déduit que

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2n} \times (\text{nb de termes}) = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$$

et une contradiction, donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2.1.5 La série dont le terme général n'est pas de signe constant

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, en effet si $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, on a

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0 \text{ et } S_{2n+1} - S_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

on en déduit que la suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ est croissante et la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})_{n \geq 1}$ converge vers 0 : les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont donc adjacentes et par conséquent convergent vers la même limite l , donc la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers l , i.e la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

3 Propriétés des séries numériques

3.1 Condition nécessaire de convergence d'une série

Il n'est pas toujours facile de reconnaître si une série est convergente. Mais une règle simple permettra de dire qu'une série diverge : la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0. En effet si la série $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ existe. comme $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. il en découle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. On dit pour résumer qu'une condition nécessaire de convergence d'une série est que son terme général tende vers zéro. Si ce n'est pas le cas la série diverge et on parle dans ce cas de divergence grossière.

Preuve

On a

$$u_n = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1}$$

Donc, si la suite (S_n) a une limite finie S , on en déduit que (u_n) converge et que $\lim u_n = S - S = 0$

Exemple

• Soit la série $\sum u_n$ avec $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Il est clair que cette série diverge car son terme général, constant, ne tend pas vers 0. On a ici $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = n + 1$ et la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante et non majorée. Il en découle qu'elle est non convergente; nous convenons alors de noter $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty = \sum_{n \geq 0} 1$.

• Soit la série $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$. Le terme général ne tend pas non plus vers 0. Nous avons ici

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = 1 - 1 + 1 + \dots + (-1)^{n-1} + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ paire} \\ 1 & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$$

et clairement la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas.

• Soit la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Le terme général u_n tend bien vers 0 et la condition nécessaire de convergence de la série est remplie. nous allons montrer que cette série converge. En effet, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ Ici, contrairement à l'exemple précédent, une somme infinie de termes positifs est finie.

Mais Attention, cette condition nécessaire de convergence n'est pas suffisante c-à-d la réciproque n'est pas vraie : ce n'est pas parce que le terme général d'une série tend vers 0 que cette série est convergente. Autrement dit, l'addition d'une très grand nombre de toutes petites quantités tendant vers zéro peut ne pas converger voire tendre vers l'infini. L'exemple le plus célèbre est celui de la "série harmonique".

3.2 Structure algébrique des séries convergentes

Les trois résultats suivants proviennent immédiatement des résultats correspondants sur les suites, appliqués aux suites des sommes partielles :

3.2.1 Somme de séries

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Si la série de terme général u_n et la série de terme général v_n convergent, la série de terme général $u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{p=n_0}^{\infty} (u_p + v_p) = \sum_{p=n_0}^{\infty} u_p + \sum_{p=n_0}^{\infty} v_p$$

Si l'une des deux séries diverge et si l'autre converge, la série de terme général $u_n + v_n$ diverge.

Corollaire

Si les suites $(\sum_{k=0}^n u_k)$ et $(\sum_{k=0}^{\infty} v_k)$ convergent la suite $(\sum_{k=0}^n (u_k + v_k))$ converge, et la limite de la somme est égale à la somme des limites.

Remarque

On ne peut rien dire de la série $\sum (u_n + v_n)$ si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. En effet les deux séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n} \right)$ divergent alors que la série somme est la série nulle donc converge ; par contre, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)$ diverge.

3.2.2 Produit d'une série par un scalaire

Proposition