Suites et Séries de Fonctions

Introduction

Ce chapitre répond à un double objectif. Tout d'abord, la première partie constitue un pré requis naturel à la deuxième consacrée aux séries de fonctions. D'autre part, il pose les bases de ce que l'on appelle "l'analyse fonctionnelle". En effet, dans de multiples applications, que ce soit en physique ou en économie, on doit étudier des applications dont la variable est une fonction (on parle alors de fonctionnelle). En particulier, on veut pouvoir optimiser de telles applications. Pour cela, un concept utile est celui de continuité. Par analogie avec les fonctions d'une variable réelle ou complexe, on doit pouvoir considérer des suites à valeurs dans des espaces des fonctions.

1 Suites de Fonctions

Dans cette première partie on étudie la limite de suites de fonctions. La convergence uniforme est introduite pour que, connaissant des propriétés des fonctions de la suite, par exemple la continuité, on puisse en déduire la même propriété pour la limite. Toutes les fonctions envisagées seront à valeurs réelles ou complexes et définies sur un ensemble A non vide. Voici une question majeure posée espérons qu'elle sere résolue à la fin de cette section :

Si des fonctions f_n convergent vers une fonction limite f lorsque $n \to +\infty$, sur quelles conditions des propriétés telles que la continuité, la dérivabilité ou l'intégrabilité seront préservées ?

1.1 Fonctions bornées

Rappelons qu'une fonction f à valeurs réelles ou complexes définie sur A est bornée s'il existe un nombre M tel que, pour tout x de A

$$|f(x)| \leq M$$

Dans ce cas $|f|$ admet une borne supérieure, et l'on notera

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)| = \sup\left(|f|\,(A)\right)$$

On appelle cette expression **la norme infinie** de f.

Pour tout x de A on a donc $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, et si, pour tout x de A on a $|f(x)| \leq M$, alors $\|f\|_\infty \leq M$.

Lorsque f n'est pas bornée, on pourra poser $\|f\|_\infty = +\infty$.

1.2 Suites de fonctions

Définition

Une suite de $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies sur un intervalle I est une application de $\mathbb{N}$ dans l'espace $F(I, \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies sur I, toutes les fonctions f_n sont définies sur le même intervalle I.

Exemples
- Soit $I = [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = x^n$. Pour tout $x \in [0,1] n \to f_n(x)$ est une suite numérique. L'application définie sur $\mathbb{N}$ par $n \to f_n$ est une suite de fonctions.
- $I = [0, +\infty[\;\; et \;\; g_n : t \longmapsto \dfrac{nt}{1+nt}$
- $I = [0, +\infty[\;\; et \;\; u_n : t \longmapsto \sqrt{n}t \exp(-nt)$

1.3 Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définies sur le même ensemble A, et soit f une fonction définie sur A. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, ou que f est une limite simple de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$, si pour tout x dans A, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$. On peut formuler cette propriété avec des quantificateurs :

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$$

Nous remarquons que dans cette formulation, le nombre N dépend à la fois de ε et de x, pour cette convergence, on regarde donc point par point les suites numériques $(f_n(x))_{n\geq 0}$.

Exemple
Etudions la convergence simple de la suite f_n de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & pour \; x \in [0,n] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Soit x$\in \mathbb{R}^+$. Il existe un N tel que pour $n \geq N$,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right).$$

Maintenant

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -\frac{x}{n} + \circ\left(\frac{x}{n}\right)$$

On a donc $f_n(x) = e^{-x+\circ(x)}$
ce qui prouve que f_n converge simplement vers la fonction

$$f(x) = e^{-x}.$$

Pour cette convergence, on regarde donc point par point les suites numériques $(f_n(x))_{n\geq 0}$, et les théorèmes obtenus pour ces suites subsistent donc. (limite de sommes, produits, quotients etc. . .) Le point de vue qui nous intéresse est celui de la conservation des propriétés par passage à la limite. La conservation des inégalités par passage à la limite nous permet d'obtenir facilement les deux résultats suivants :

Proposition
- Si les fonctions f_n sont positives, alors la limite est positive.
- Si les fonctions f_n sont croissantes (resp. décroissantes), la limite est croissante (resp. décroissante).

Remarque

La convergence simple est souvent facile à établir, mais des propriétés telles que la continuité, la dérivabilité ou l'intégrabilité ne sont pas nécessairement préservées, comme le montrent les exemples suivants.

Exemples

• Continuité

les fonctions

$$f_n(x) = \frac{1 - nx}{1 + nx}$$

convergent simplement sur l'intervalle $[0, 1]$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans cet exemple, bien que les fonctions f_n soient continues, la fonction limite f ne l'est pas.

• Aspect borné

$$f_n : \begin{cases}]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} n & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f_n : \begin{cases}]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

chacune des fonctions f_n est bornée sur $]0, 1]$, mais f ne l'est pas.

• Intégration

$$f_n : \begin{cases}]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n^2 x^n (1 - x) \end{cases}$$

On vérifie aisément que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, dont l'intégrale sur ce segment vaut 0. Pourtant :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \right) = 1 \neq 0$$

Ainsi la convergence simple ne conserve pas l'intégrabilité.

A travers ces exemples, on voit que la convergence simple posséde le défaut de ne pas transférer les propriétés usuelles de régularité de la suite de fonctions à sa limite. En fait, cette stabilité nécessite une notion plus restrictive de convergence, que nous allons aborder maintenant.

1.4 Convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définies sur le même ensemble A, et soit f une fonction définie sur A. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, ou que f est une limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$, si pour tout x dans A, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

On peut formuler cette propriétés avec des quantificateurs :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in A)((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$$

Exemple

Les fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f = 0$ puisque $\forall x \in \mathbb{R} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ et $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Remarque

La définition de la convergence uniforme est beaucoup plus forte que celle de la convergence simple. On retiendra que Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f. On va reformuler la définition de la convergence uniforme d'une manière plus condensée, en utilisant la norme infinie :

Proposition

La fonction f est limite uniforme de a suite $(f_n)_{n \geq 0}$ si et seulement si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

En pratique, pour étudier si une suite (f_n) converge uniformément, on déterminer sa limite simple f, par un calcul de limite. Si l'on peut, par l'étude des variations de la fonction $f_n - f$ par exemple, déterminer la borne supérieure de $|f_n - f|$, il restera à voir si la suite $(||f_n - f||_\infty)$ de ces bornes supérieures converge vers 0.

Dans certains cas, le calcul de $||f_n - f||_\infty$ n'est pas faisable. Voici deux critères permettant de conclure soit à la convergence uniforme, soit à la non convergence uniforme :

- La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si il existe une suite numérique (a_n) de limite nulle telle que l'on ait, pour tout x de A

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$

- S'il existe une suite (x_n) de points de A telle que, la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne converge pas vers 0, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

1.4.1 Exemples de synthèse

Convergence uniforme

$$f_n : \begin{cases}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n (1-x) \end{cases}$$

Il est clair que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Pour déterminer

$$M_n = \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$$

on étudie les variations de f_n :

$$f_n'(x) = x^{n-1} (n - (n+1)x)$$

donc f_n est croissante de 0 à $\dfrac{n}{n+1}$ et décroissante ensuite. Elle admet son maximum au point $\dfrac{n}{n+1}$, c'est à dire

$$0 \leq M_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leq 1 - \frac{n}{n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Et (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Convergence simple, non uniforme

$$f_n : \begin{cases}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto nx^n(1-x) \end{cases}$$

A nouveau, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Mais

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1} e^{n\ln\left(1-\frac{n}{n+1}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0$$

Il y a convergence simple, mais non uniforme, de la suite (f_n) vers la fonction nulle.

1.4.2 Critère de Cauchy de convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble A. La suite (f_n) converge uniformément si et seulement si

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $m > n \geq N$, on ait

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Preuve

On a toujours $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

Si le critère de Cauchy est vérifié, $\exists\, N \in \mathbb{N} \setminus$ si $m > n \geq N$, on ait, $\forall x \in A$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy numérique. Elle possède une limite que l'on note $f(x)$, et f est limite simple de la suite (f_n). Reste à voir que c'est une limite uniforme.

Mais en faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, on obtient si $n \geq N$ et si x est dans A,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui signifie que (f_n) converge uniformément vers f.

Réciproquement si f_n converge uniformément vers f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$ on ait

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors si, $m > n \geq N$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et le critère de Cauchy est bien vérifié.

1.5 Propriétés de la convergence uniforme

Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme conserve les bonnes propriétés des fonctions par passage à la limite. C'est ce que nous allons montrer dans la suite de ce paragraphe.

1.5.1 Convergence uniforme et fonctions bornées

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur A de limite uniforme f. La fonction f est bornée, si et seulement si les fonctions f_n sont bornées.

Preuve
Dans la définition de la convergence uniforme, prenons $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in A \qquad |f_n(x) - f(x)| < 1$$

or f_{n_0} est bornée par hypothèse, disons par M, donc en appliquant l'inégalité triangulaire, on a pour tout x de A :

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq M + 1$$

c'est-à-dire que f est bornée par $M + 1$.
Réciproquement, si f est bornée sur A, on a pour tout $n \geq n_0$

$$\|f\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 1 + \|f\|_\infty$$

et ainsi les fonctions f_n sont bornées sur A pour tout $n \geq n_0$.

1.5.2 Convergence uniforme et continuité

Donnons pour commencer un résultat général d'interversion de limites, qui s'appliquera ensuite à la continuité.

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur un ensemble A, de limite uniforme f, et soit b un point de $\bar{A}$. On suppose que $f_n(x)$ admet une limite finie α_n lorsque x tend vers b. Alors la suite (α_n) converge vers un nombre α et $f(x)$ admet comme limite α lorsque x tend vers b. On a donc interversion des limites

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to b} f_n(x)\right) = \lim_{x\to b}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Preuve
Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy : puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A, on a d'après le critère de Cauchy uniforme

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n\epsilon\mathbb{N}, m > n > N \implies \forall x\epsilon A, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

alors en faisant tendre x vers b, on obtient

$$m > n > N \implies |\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et ainsi $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc possède une limite finie l. Montrons que $f(x)$ tend l quand x tend vers b :

Considérons $\varepsilon > 0$; comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, il existe $N\epsilon\mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \implies \forall x\epsilon A, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

de plus $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l donc il existe $N_2\epsilon\mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \implies |\alpha_n - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Posons alors $N = \max(N_1; N_2)$: comme $f_N(x)$ tend vers α_N quand x tend vers b, il existe donc un voisinage V de b dans $\bar{A}$ tel que

$$\forall x \epsilon V, |f_N(x) - \alpha_N| < \frac{\varepsilon}{3}$$

On obtient alors

$$\forall x \epsilon V, |l - f(x)| \leq |l - \alpha_n| + |\alpha_N - f_N(x)| \leq |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

et ainsi $f(x)$ tend vers l quand x tend vers b.

Proposition
Si $(f_n)_{n \in N}$ converge uniformément vers f sur A, avec f_n continue pour tout n, alors f est continue sur A.

Remarques
• Ce résultat est souvent utile sous forme contraposée : si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction non continue, la convergence n'est pas uniforme.

• On montre de même que si les f_n sont uniformément continues et convergent uniformément vers f, alors f est uniformément continue.

1.5.3 Convergence uniforme et intégration

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $J = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui converge uniformément vers f. Alors, la suite (I_n) définie par $I_n = \int_a^b f_n(x)dx$, converge et

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_a^b f(x)dx$$

On a donc interversion de l'intégrale et de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)dx$$

<u>Preuve</u>
Pour simplifier, on suppose les f_n continues, ce qui sera généralement le cas, et que l'intervalle $I = [a, b]$ est fermé (i.e. on ne démontre pas le résultat pour les intégrales généralisées). Puisqu'il y a convergence uniforme, f est elle aussi continue, donc intégrable. Soit comme d'habitude $\varepsilon > 0$ fixé, alors :

$$\exists N \epsilon \mathbb{N}, \forall \geq N, \forall x \epsilon I \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

On intègre membre à membre pour en déduire que pour tout $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\, dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

Il en découle que $\int_a^b f_n(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour établir les relations précédentes nous avons utilisé les propriétés de l'intégrale de Riemann établies en Analyse 1.

Exercice
Déterminer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx$$

<u>Soultion</u>

Pour tout $n \geq 1$, on note $f_n(x)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{ne^x}{n+x}$

On va montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f(x)$ que l'on précisera. La convergence étant uniforme, on aura alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx = \int_0^1 f(x)dx$$

On voit facilement que, pour tout $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \dfrac{ne^x}{n+x} = e^x$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers $f(x) = e^x$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^x}{n+x} - e^x\right| = \left|\frac{xe^x}{n+x}\right| \leq \frac{e}{n}$$

Et donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{e}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e}{n} = 0$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers $f(x) = e^x$ uniformément sur $[0,1]$.

Finalement, en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

1.5.4 Convergence uniforme et dérivation

Si les fonctions f_n sont dérivables, la limite uniforme f ne l'est pas nécessairement. En effet si $n \geq 1$, considérons par exemple la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x\arctan(nx)$$

Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe C^1. La suite f_n converge simplement vers $f(x) = \dfrac{|x|\,\pi}{2}$. La fonction f n'est pas dérivable en 0. Cependant la suite (f_n) converge uniformément vers f. Pour le montrer, on utilise la relation $\arctan u + \arctan\left(\dfrac{1}{u}\right) = sign(u)\dfrac{\pi}{2}$, valable pour tout $u \in \mathbb{R}^*$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x\arctan\frac{1}{nx}\right|$$

En utilisant le fait que, pour tout u réel $|\arctan u| \leq u$, on en déduit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Ceci montre que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Pour obtenir la dérivabilité de la limite, on va imposer la convergence uniforme de la suite des dérivées.

Proposition

Soit f_n une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur un intervalle J, on suppose que

(i) Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur J ;

(ii) La série f'_n converge uniformément sur J vers une fonction g.

(iii) Il existe un point a de J tel que la suite $f_n(a)$ possède une limite finie α.

Alors la suite f_n converge uniformément sur J vers la fonction f de classe C^1 telle que

$$f' = g \quad et \quad f(a) = \alpha$$

Remarques

• Il importe de noter que la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas la convergence de la suite des fonctions dérivées : sur $\mathbb{R}$, prenons f_n : x $\longmapsto \dfrac{1}{n}\sin(nx)$. Il est clair que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Pourtant, si on dérive, on obtient $f'_n : x \longmapsto \cos(nx)$. Or la suite numérique $(\cos nx)$ n'admet de limite que pour x congru à 0 modulo 2π . La suite (f'_n) ne converge donc même pas simplement.

• Notons aussi que la convergence uniforme d'une suite de fonctions n'implique pas la dérivabilité de la fonction limite. Sur $\mathbb{R}$, les fonctions (f_n) définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ sont dérivables en tout point. Pourtant, elles convergent uniformément vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0. Le premier exemple de fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$, mais dérivable nulle part, était d'ailleurs construit à partir d'une suite de fonctions dérivables uniformément convergentes. Comme d'habitude, lorsqu'on ne dispose pas d'une forme explicite de la fonction limite, le critère de Cauchy est incontournable.

Exercice

On considère la suite de fonction

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{nx^3}{1+nx} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x\epsilon[0,1]$, on a :

$$x^2 - \frac{nx^3}{1+nx} \geq 0$$

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?
4. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx} dx$$

5. Calculer f'_n. La suite (f'_n) converge-t-elle simplement sur $[0,1]$?