Séries entières

Introduction

Nous allons nous interesser dans ce chapitre à des classes particulières de séries de fonctions qui joue un rôle important en mathématiques est constitué de fonctions puissances et généralise les fonctions polynômes : ce sont **les séries entières** que nous allons étudier dans ce chapitre consacré à des séries de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$. On s'intéresse dans un premier temps aux propriétés de la somme d'une série entière (domaine de convergence, continuité, etc.). On verra ensuite comment exprimer les fonctions usuelles comme des sommes de séries entières. Nous nous limiterons ici à l'étude des séries entières à valeurs réelles, même s'il nous arrivera de faire quelques remarques concernant le cas complexe.

1 Définitions

On a défini dans le chapitre précédent différents types de convergence pour les séries de fonctions $\sum f_n(x)$ de la variable réelle x, on peut donc définir de même la convergence simple, absolue, uniforme, normale de la série de fonctions $\sum a_n x^n$.

1.1 Définition d'une série entière

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombre réels ; on appelle série entière de coefficients $(a_n)_n$ la série de fonctions $\sum f_n(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = a_n x^n$$

Lemme d'Abel
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et soit x_0 un réel tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument.

<u>Preuve</u>
La suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n x_0^n| \leq M$
Si $x_0 = 0$, alors il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$
Si $x_0 \neq 0$, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Or $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ donc la série géométrique $\sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ converge ; on en déduit que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Corollaire
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et soit x_0 un nombre complexe tel que la série numérique $\sum a_n x_0^n$ converge ; alors $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Preuve

En effet, comme la série $\sum a_n x_0^n$ converge, le terme général tend vers 0 donc la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : on applique alors le lemme d'Abel.

1.2 Rayon de convergence

Théorème Soit $\sum a_n x^n$ une série entière ; alors l'ensemble

$$I = \{r \geq 0 \ / \ la\ suite\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est la borne supérieure de I.

On peut remarquer deux choses :
- l'ensemble A n'est pas vide car il contient toujours 0 ;
- le rayon de convergence peut être infini car c'est un élement de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière ; alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
- Pour tout x$\in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument ;
- Pour tout x$\in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R$, la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge.

Exemple

• On retrouve bien dans le cas où $a_n = 1$ que la série $\sum x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$.

• Soit, pour tout entier n, $a_n = \dfrac{1}{n!}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente pour tout x positif, d'où $R = +\infty$

1.3 Disque de convergence

On appelle disque de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R,

$$D(0, R) = \{x \in \mathbb{R} / \ |x| < R\}$$

Si on se limite à l'étude de la série entière $\sum a_n x^n$ pour x réel, on appelle intervalle de convergence de la série entière l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

Exemples

- Le disque de convergence de $\sum x^n$ est $D_1 =]-1, 1[$, le disque unité (ouvert).
- Le disque de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est $\mathbb{C}$ tout entier.
- Attention, on ne peut rien dire a priori du comportement de la série $\sum a_n x^n$ lorsque $|x| = R$. Tout peut se produire. Par exemple, si on prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n}$, qui donne un rayon de convergence égal à 1, on a une série alternée convergente en $x = -1$ alors qu'en $x = 1$, on obtient la série harmonique qui est elle divergente.
- La série entière $\sum |a_n| x^n$ a pour rayon de convergence R.

Exemple

La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 ; en effet si $|x| < 1$, la série converge absolument et si $|x| > 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc la série $\sum x^n$ diverge.

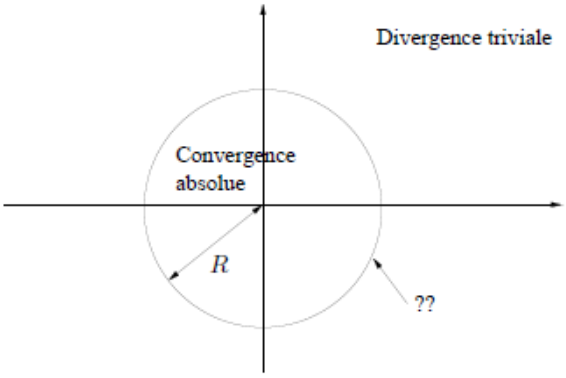

FIGURE 1: Comportement d'une série entière de rayon R

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière ; alors le rayon de convergence R de cette série est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- Pour tout réel r tel que $0 \leq r \leq R$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Pour tout réel r tel que $r > R$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

<u>Preuve</u>

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$; montrons que R vérifie les deux conditions : D'après ce qui précède, pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument donc la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit r un réel tel que $r > R$: alors $r \notin I$, i.e la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc elle ne tend pas vers 0.

Réciproquement, soit R' vérifiant les conditions : montrons que $R' = R$. Considérons un réel r vérifiant $0 \leq r < R'$; alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc est bornée : ainsi $r \in I$, on en déduit donc que $[0; R'[\subset I$, d'où $R' \leq R$.

Supposons $R' < R$, alors il existe r tel que $R' < r < R$: comme $r < R$, d'après 1.5 la série $\sum a_n r^n$ converge absolument donc la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ce qui est en contradiction avec le fait que $r > R'$: on en déduit que $R' = R$.

2 Calcul du rayon de convergence

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, on peut notamment utiliser trois méthodes :

- soit utiliser directement la définition de R ;
- soit utiliser le principe de comparaison ;
- soit utiliser le critère de d'Alembert ou celui de Cauchy.

2.1 Principe de comparaison

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2. S'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M\,|b_n|$, alors $R_2 \leq R_1$

Corollaire

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On note R_1 le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ et R_2 le rayon de convergence de la série $\sum b_n x^n$.

a) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq |b_n|$, alors $R_2 \leq R_1$;

b) Si $|a_n| \sim |b_n|$ au voisinage de $+\infty$, alors $R_1 = R_2$.

Preuve

- S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq |b_n|$, alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N, |a_n x^n| \leq |b_n x^n|$$

  or si $|x| < R_2$, la série $\sum b_n x^n$ converge absolument, donc par comparaison des séries positives, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument : on en déduite que $R_1 \geq R_2$.
- $|a_n| \sim |b_n|$ au voisinage de $+\infty$, alors pour tout x$\in \mathbb{R}^*$, on a $|a_n x^n| \sim |b_n x^n|$ au voisinage de $+\infty$, donc les deux séries positives $\sum |a_n x^n|$ et $\sum |b_n x^n|$ sont de même nature : on en déduit alors que $R_1 = R_2$.

Exemples

- La série entière $\sum \sin n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, en effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin n| \leq 1$ or la série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \geq 1$. D'autre part, la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend par vers 0, donc la série entière $\sum \sin n x^n$ diverge en $x = 1$, d'où $R = 1$.
- La série entière $\sum \dfrac{n}{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, en effet :

$$\frac{n}{n+1} \sim 1 \quad au \quad voisinage \quad de \quad +\infty$$

  donc les séries $\sum \dfrac{n}{n+1} x^n$ et $\sum x^n$ ont même rayon de convergence à savoir 1.

2.2 Régle de d'Alembert

Soit $S = \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Si $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe, alors $R = \dfrac{1}{l}$, avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Preuve

On applique la règle de d'Alembert à la série $\sum a_n x^n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \geq N, \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \longrightarrow l\,|x|$$

ainsi la série $\sum a_n x^n$ converge absolument si $l\,|x| < 1$ i.e si $|x| < \dfrac{1}{l}$ et diverge si $l\,|x| > 1$ i.e si $|x| > \dfrac{1}{l}$: on en déduit que $R = \dfrac{1}{l}$.

Exemple

• Soit $S = \sum \dfrac{n!}{n^n} x^n$, on applique le critère de d'Alembert Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Posons

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

alors Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e = \frac{1}{l}$ on conclut que le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{l} = e$.

• La série entière $\sum \frac{1}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$; en effet si on note $a_n = \frac{1}{n!}$ on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc $R = \frac{1}{l} = +\infty$

2.3 Régle de Cauchy

Soit $S = \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Si $l = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1\backslash n}$ existe, alors $R = \frac{1}{l}$, avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

<u>Preuve</u>
La formule utilisant le critére de Cauchy se démontre de la même manière.

Proposition
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum \lambda^n a_n x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{R}{|\lambda|}$.
b) Pour tout entier $p \geq 1$, la série entière $\sum a_n x^{np}$ a pour rayon de convergence $\sqrt[p]{R}$

<u>Preuve</u>
a) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et tout x$\in \mathbb{R}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda^n a_n x^n = a_n (\lambda x)^n$
ainsi la série $\sum \lambda^n a_n x^n$ converge si $|\lambda x| < R$ i.e si $|x| < \frac{R}{|\lambda|}$ et diverge si $|\lambda x| > R$ i.e si $|x| > \frac{R}{|\lambda|}$, donc le rayon de convergence de la série $\sum \lambda^n a_n x^n$ est $\frac{R}{|\lambda|}$.
b) la série entière $\sum a_n x^{np}$ converge si $|x|^p < R$ i.e si $|x| < \sqrt[p]{R}$ et diverge si $|x|^p > R$ i.e si $|x| > \sqrt[p]{R}$, donc le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^{np}$ est $\sqrt[p]{R}$.

3 Opérations sur les séries entières

Lorsqu'on se place à l'intérieur du disque de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$, la somme est une fonction de x. On s'intéresse donc aux propriétés de cette somme.

3.1 Multiplication par un scalaire

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\lambda \in \mathbb{R}^*$; alors la série entière $\sum (\lambda a_n) x^n$ a pour rayon de convergence R et pour tout x$\in D(0,R)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) x^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple
Le rayon de convergence de $\sum 2n^n x^n$ est nul.
Le rayon de convergence de $\sum (3.4^n) x^n$ est égal à $\dfrac{1}{4}$.

3.2 Somme de deux séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_2 ; alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$ vérifie :

$$\text{Si } R_1 \neq R_2,\ R = \inf(R_1, R_2)$$
$$\text{Si } R_1 = R_2,\ R \geq R_1 = R_2$$

De plus pour tout x$\in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq \inf(R_1, R_2)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

<u>Preuve</u>
Si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ alors les séries numériques $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent donc la série somme $\sum (a_n + b_n) x^n$ converge : on en déduit que $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et que pour tout x tel que $|x| < \inf(R_1, R_2)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Si $R_1 \neq R_2$, par exemple $R_1 < R_2$, considérons $x \in IR$ tel que $R_1 < |x| < R_2$; alors la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge et la série numérique
$\sum b_n x^n$ converge donc la série somme diverge : on en déduit que $R \leq R_1 = \inf(R_1, R_2)$, d'où $R = \inf(R_1, R_2)$.

Exemple
Le rayon de convergence de $\sum (2n + 3n) x^n$ est égal à $\min(1\backslash 2; 1\backslash 3) = 1\backslash 3$.
Le rayon de convergence de $\sum (n^2 - e^n) x^n$ est égal à $\min(1; 1\backslash e) = 1\backslash e$.

Remarque
On ne peut rien dire sur le rayon de convergence de la série somme quand $R_1 = R_2$: par exemple les séries entières $\sum x^n$ et $\sum (-1)^n x^n$ ont même rayon de convergence 1 mais leur série somme est la série nulle de rayon $+\infty$.

3.3 Produit de deux séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 ; considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \inf(R_1, R_2)$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

Preuve

Si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ alors les séries numériques $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent absolument donc leur série produit également ; or le terme général de cette série produit est donné par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k x^k\right)\left(b_{n-k} x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k b_{n-k}\right) x^n = c_n x^n$$

Donc $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ on l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k x^k\right)\left(b_{n-k} x^{n-k}\right)\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

Exemple

Prenons, pour tout entier n, $a_n = b_n = 1$. On a alors

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

Ainsi, on en déduit que le rayon de convergence de $\sum (n+1) x^n$ est au moins 1, et que

$$\forall |x| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Remarque

Contrairement à ce qui se passait pour la somme, ici, l'inégalité peut être strict même si $R_a \neq R_b$. On le voit en prenant

$$a_n = 1 \quad et \quad b_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ -1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si n} \geq 2 \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que $c_n = 0$ dès que n≥ 1, donc $R_c = +\infty > 1 = \min(R_a, R_b)$.

4 Convergence uniforme d'une série entière

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.

Alors pour tout réel R' tel que $0 < R' < R$, la série converge uniformément sur le disque fermé $\bar{D}(0, R') = \{x \in C \ / \ |x| \leq R'\}$

Preuve
Soit $R' \in]0, R[$ et considérons un réel r tel que $R' < r < R$; alors on a

$$\forall x \in \bar{D}(0, R'), \forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n| = |a_n| \, r^n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$$

Or $0 < r < R$ donc la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée : $\exists\ M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \, r^n \leq M$ d'où

$$\forall x \in \bar{D}(0, R'), \forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n| = M \left(\frac{R'}{r}\right)^n$$

Or la série géométrique $\sum \left(\frac{R'}{r}\right)^n$ converge puisque $\left|\frac{R'}{r}\right| < 1$. On en déduit alors que la série $\sum a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $\bar{D}(0, R')$

Théorème
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul ; alors la somme de la série $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction continue sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$.

Preuve
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n(x) = a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$ et la série converge uniformément sur $]-R, R[$, donc la fonction somme de la série entière est continue sur $]-R, R[$.

4.1 Dérivation d'une série entière

Définition
On appelle série dérivée de la série entière $\sum a_n x^n$ la série $\sum\limits_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$. Remarquons que la série dérivée de $\sum a_n x^n$ est aussi égale à

$$\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) \, a_{n+1} x^n$$

Lemme
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, $x \in \mathbb{R}$, de rayon $R > 0$. Le rayon de convergence de la série dérivée $\sum\limits_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ (resp $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$) est R.

Exemple
Considérons la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$; on montre facilement avec la règle de d'Alembert que $R = 1$; alors la somme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et on peut dériver terme à terme sur $]-1, 1[$:

$$\forall x \in]-1, 1[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

D'où $\forall x \in]-1, 1[, S(x) = -\ln(1-x)$ Puisque $S(0) = 0$.

or d'après le critère de Leibniz, la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge en $x = -1$: on déduit alors du théorème d'Abel l'identité suivante : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, $x \in \mathbb{R}$, de rayon de convergence $R > 0$. La somme S de la série esr dérivable dans $]-R, R[$ (resp intégrable sur tout $[a, b] \subset]-R, R[$) et, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, et \int_0^x S(t)dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Corollaire

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, $x \in \mathbb{R}$, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(x)$. Alors la fonction $S(x)$ est intégrable sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$ et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Corollaire

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est de C^∞ dans $]-R, R[$. Si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

<u>Preuve</u>

Par le théorème précédent on peut dériver terme à terme dans D_R.
Pour tout $x \in]-R, R[$, on a (par récurrence sur n)

$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ... \Rightarrow S(0) = a_0$
$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1} + ... \Rightarrow S'(0) = a_1$
$S''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + ... + n(n-1) a_n x^{n-2} + ... \Rightarrow S''(0) = 2a_2$
$S^{(3)}(x) = 6a_3 + ... + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + ... \Rightarrow S^{(3)}(0) = 6a_3$
...
$S^{(n)}(x) = n! a_n + ..$ .... $\Rightarrow S^{(n)}(0) = n! a_n$
D'où le résultat.

Corollaire (unicité du développement en série entière)

Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$, $r > 0$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.
En particulier : si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$ pour tout $x \in]-r, r[$, $r > 0$, alors $a_n = 0$ $\forall n \geq 0$.

5 Développement en série entière d'une fonction

Dèfinition

Soit I un voisinage de 0 et soit f une fonction de variable réelle définie et C^∞ dans I. La série de Mac-Laurin (série de Taylor en zéro) de f est la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Définition

Une fonction f de variable réelle définie et C^∞ dans un voisinage de 0 est développable en série entière en 0, en abrégé on dit $DSE(0)$, s'il existe $I :=]-r, +r[, r > 0$, tel que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour tout $x \in I$

Proposition

Soit f une fonction de variable réelle définie et C^∞ dans un voisinage de 0. Si f est développable en série entière en 0, alors cette série est la série de Mac-Laurin de f.

Preuve

C'est une conséquence immédiate des corollaires précédents.

Théorème

Pour qu'une fonction f de variable réelle définie dans un voisinage de 0 soit $DSE(0)$ il faut et il suffit qu'il existe $r > 0$ tel que

(i) f est C^∞ dans $I =]-r, +r[$

(ii) la série de Mac-Laurin de f a un rayon de convergence $R \geq r$,

(iii) la somme de la série de Mac-Laurin de f est égale à f dans $I =]-r, +r[$.

Exemple

Regardons par exemple le cas de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.

étape 1. On calcule les coefficients de la série de taylor de f. On a, pour tout entier n et pour tout réel x,

$$f^{(n)}(x) = e^x, \ d'où \ a_n = \frac{1}{n!}$$

étape 2. On montre que le rayon de convergence R de cette série est strictement positif. En effet, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $R = +\infty$

étape 3. On montre que la série de Taylor de f converge effectivement vers f. La formule de Taylor-Lagrange permet d'écrire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\xi_x^n \in]0, x[$, tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x^n)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

d'où

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui conclut la preuve.

Exercice

Faire le même raisonnement avec les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Remarque

Dans la pratique, on ne peut en général pas calculer toutes les dérivées de f en 0. On utilise donc un certain nombre de fonction DSE "de référence".

5.1 Développements en série entière des fonctions usuelles

Dans ce qui suit, $R = 1$ (par exemple) signifie que l'égalité est vraie pour tout $x \in]-1, 1[$.
Somme d'une série géométrique :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, R = 1 \tag{1}$$

Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{a^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{a^{n+1}}, R = |a|$$

Par dérivation terme à terme (1) dans $]-1, 1[$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\,x^n, R = 1$$

Par substitution dans (1) : x$\rightarrow -x$ ou en reconniassant la somme d'une série géométrique

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\,x^n, R = 1 \tag{2}$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\,(n+1)\,x^n, R = 1$$

En itégrant terme à terme (1)

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n}, R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, R = 1$$

Par substitution dans (2) $x \rightarrow x^2$, car $|x| < 1 \Longleftrightarrow x^2 < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\,x^{2n}, R = 1$$

En intégrant terme à terme

$$\arctan(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, R = 1$$

En utilisant la série de Mac-laurin

$$e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}, R = +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, R = +\infty$$

Pour une fonction rationnelle irréductible $F(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ telle que $D(0) \neq 0$, on décompose en éléments simples et on utilise les $DSE(0)$ précédents. Exemples :

$$F(x) = \frac{x^2 + x - 3}{(x-2)^2 (2x-1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{2x-1}$$

On a

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^n} = -\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^{n+1}}, R_1 = 2$$

Par dérivation

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)\,x^n}{2^{n+2}}, R_2 = 2$$

De même

$$-\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n, R_3 = \frac{1}{2}$$

Comme $R_3 < R_1 = R_2$ le rayon de convergence de la somme de ces séries entières est R_3 et on a

$$F(x) = \sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(n+1)}{2^{n+2}} + 2^n\right) x^n, R_3 = \frac{1}{2}$$

6 Résolution d'équations différentielles

On peut utiliser la théorie des séries entières pour résoudre des équations différentielles linéaires du type

$$u_m(x)y^{(m)} + ... + u_1(x)y' + u_0(x)y = f(x) \tag{3}$$

où $u_0; u_1; ...; u_m$ sont des fonctions polynomiales et où f est une fonction développable en série entière à l'origine.

On cherche une solution y sous la forme d'une somme de série entière

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où les coefficients a_n sont à déterminer : on suppose que le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ est non nul et on calcule les dérivées successives de y en dérivant terme à terme sur l'intervalle de convergence $]-R; R[$, puis on remplace $y, y\prime, ...y^{(m)}$ par ces sommes de séries dans l'équation (3) ainsi que f. On obtient alors deux sommes de séries entières égales sur un voisinage de 0 : alors d'après l'unicité du développement en séries entières les coefficients des deux séries entières sont égaux, ce qui permet de calculer les coefficients a_n, puis la somme $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On va expliciter davantage la méthode sur l'exemple suivant :

Exemple

Considérons l'équation différentielle

$$(E) : xy''(x) + xy'(x) + y(x) = 1 \tag{4}$$

On cherche une solution y sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

puis

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2}$$

alors, en remplaçant y, y' et y'' par ces sommes dans l'équation (4), on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

or $n\,(n-1)\,a_n = 0$ pour $n = 1$, donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n+1)\,a_{n+1} x^n$$

en effectuant un glissement d'indice. De même

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n+1)\,a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

Or si on note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ (supposé non nul), les deux séries $\sum n\,(n+1)\,a_{n+1} x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont également R pour rayon de convergence : alors, on a pour tout $x \in]-R; R[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n+1)\,a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[n\,(n+1)\,a_{n+1} + n a_n + a_n\right] x^n$$

Donc pour tout $x \in]-R; R[$, n a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[n\,(n+1)\,a_{n+1} + n a_n + a_n\right] x^n = 1$$

On déduit alors

$$a_0 = 1 \ \text{ et } \forall n \geq 1, \quad n\,(n+1)\,a_{n+1} + (n+1)\,a_n = 0$$

Donc

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{n} \tag{5}$$

On peut d'ores et déjà calculer le rayon de convergence R, en effet

$$\forall n \geq 1, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n}$$

donc $R = +\infty$ d'après la règle de d'Alembert. D'autre part, une récurrence immédiate permet de calculer an grâce à (5) :

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} x^n$$

mais en mettant $a_1 x$ en facteur puis en effectuant un glissement d'indice, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

mais on reconnaît en cette dernière série le développement en série entière de e^{-x} d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 1 + a_1 x e^{-x}$$

7 Annexe

7.1 Extrait du DS N°2 2009-2010

Exercice.1

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminez les rayons de convergence des séries :

$$\sum a_n^2 z^n \qquad\qquad \sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

2. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Calculer R.

Exercice.2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

1. $\sum a^{\sqrt{n}} x^n$ 2. $\sum n^{\ln n} x^n$ 3. $\sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$ 4. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n2^n}$

7.2 Extrait du DS N°2 2010-2011

Exercice.1

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} x^n, \ \ n \geq 1 \qquad\qquad \sum \frac{1}{n(n+1)!} x^{2n+2}, \ \ n \geq 1$$

Exercice.2

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}$ et préciser sa nature aux points $x = -R$ et $x = R$.

2. Montrer que la somme f de cette série est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.

3. On se propose de calculer explicitement $f(x)$.

3a. Déterminer a et b de $\mathbb{R}$ tels l'on ait $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3b. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$. Que vaut $f(0)$?

4. Utiliser ce qui précède pour calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

7.3 Extrait du DS N°2 2011-2012

Exercice.1

Donner le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes et exprimer leurs sommes au moyen des fonctions usuelles :

$$\sum_{n\geq 0} \left(n^2 + n - 3\right) x^n \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n-1)!} x^n \qquad \sum \frac{n}{n+1} x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$$

Exercice.2

1. Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général

$$\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)(2n+2)}$$

2. La série converge-t-elle pour x=R ?
3. En utilisant une décomposition en élément simple, calculer la somme de cette série entière.
4. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$