Séries de Fourier

Introduction

Après le chapitre sur les séries entières qui traitait des séries en puissance, on aborde dans ce dernier chapitre un autre type particulier de séries de fonctions, les séries dites trigonométriques. A la différence des séries entières, nous passerons beaucoup moins de temps sur les séries trigonométriques en tant que telles, tandis que le problème de la décomposition des fonctions sous cette forme nous occupera la majeure partie du chapitre. D'autre part, les deux résultats principaux de convergence seront admis, la démonstration sortant du cadre de ce cours.

1 Introduction et théorie

La théorie des séries de Fourier permet d'interpréter certains "signaux" (autrement dit, certaines fonctions définies sur un intervalle réel) comme résultant de la superposition d'une infinité de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes. Revenons quelque peu à l'historique, afin d'en savoir un peu plus sur l'émergence de cette idée géniale. Joseph Fourier, qui travaillait sur la propagation de la chaleur sur des corps solides, a remarqué que la propagation de la chaleur sur un anneau ressemble à un mouvement harmonique.

Le développement de la théorie de l'intégration et celui de l'analyse fonctionnelle ouvrent de nouveaux horizons à l'analyse de Fourier. Ces nouveaux points de vue ne peuvent être qu'effleurés dans la suite : ils le seront à travers l'approche hilbertienne des séries de Fourier, et à travers le théorème de convergence en moyenne démontré en 1900 par Lipót Fejér [1]. Cette époque voit la naissance de l'analyse harmonique, discipline toujours active de nos jours après une immense effervescence dans les années 1960. Mais c'est peut-être à travers la théorie des ondelettes, avatar contemporain de la théorie de Fourier, que celui-ci connaît un de ses plus grands triomphes posthumes.

Notre but, bien plus modeste, est de présenter ici quelques résultats fondamentaux sur les séries de Fourier. Le cadre adéquat étant indubitablement celui de l'intégrale de Lebesgue vue en analyse 1, l'étude des séries de Fourier et sa transformation sera donc approfondie dans un module ultérieur [analyse 3], auquel le présent chapitre peut être vu comme une préparation. Pour l'instant, afin d'éviter de gaspiller de l'énergie sur des difficultés liées à l'intégrale de Riemann, le cours sera délibérément placé dans le cadre très simple des fonctions continues par morceaux.

1. alors âgé de 20 ans.

2 Préparatifs

L'étude des séries de Fourier requiert l'introduction préalable de quelques notions techniques un peu fastidieuses. Afin de ne pas noyer les points réellement importants dans des considérations auxiliaires, il a semblé préférable de ne pas disperser ces notions au fil du texte. C'est pourquoi elles ont été regroupées dans ce chapitre de préparatifs.

2.1 Notation

Dans la suite, on notera systématiquement $f(c^-)$ (resp. $f(c^+)$) la limite à gauche (resp. à droite) d'une fonction f en un point c donné de $\mathbb{R}$. Autrement dit, on pose

$$f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

lorsque cela a un sens.

2.2 Régularité par morceaux

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une famille finie $(x_j)_{0 \leq j \leq N}$ de points de $[a, b]$, avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, telle que, pour tout $j = 0, ..., N-1$, on ait les deux propriétés suivantes :

(i) la fonction f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$,

(ii) la fonction f possède une limite à droite en x_j et à gauche en x_{j+1}.

Remarque

Il résulte de cette définition qu'aux points x_j avec $1 \leq j \leq N-1$, la fonction f a une limite à gauche et à droite. Ces limites à gauche et à droite coïncident, et valent $f(x_j)$, si et seulement si la fonction f est en fait continue en x_j.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est de classe C^1 par morceaux s'il existe une famille finie $(x_j)_{0 \leq j \leq N}$ de points de $[a, b]$, avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, telle que, pour tout $j = 0, ..., N-1$, on ait les deux propriétés suivantes :

(i) la fonction f est dérivable, à dérivée continue, sur chaque intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$,

(ii) la fonction f et sa dérivée f' ont une limite à droite en x_j et à gauche en x_{j+1}.

Remarque

Par définition, toute fonction de classe C^1 par morceaux est continue par morceaux (la réciproque est clairement fausse).

2.3 Intégration

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On considère une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ associée à f . On sait que f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$ avec $j = 0, ..., N-1$. Soit f_j la fonction définie sur l'intervalle fermé $[x_j, x_{j+1}]$ par $f_j(x) = f(x)$ pour $x_j < x < x_{j+1}$, $f_j(x_j) = f(x_j^+)$ et $f_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}^-)$. Alors f_j est continue sur l'intervalle fermé borné $[x_j, x_{j+1}]$ et, à ce titre, Riemann-intégrable sur cet intervalle. On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(x)dx \tag{1}$$

Remarque

Le lecteur dont les connaissances sur l'intégrale de Riemann s'étendent un peu au-delà de l'intégrabilité des fonctions continues sur un intervalle compact pourra constater que f est elle-même Riemann intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ puisque, d'une part, elle y est bornée et que, d'autre part, l'ensemble de ses points de discontinuité y est négligeable (il s'agit, au plus, de l'ensemble des points x_j, qui est fini). Fort heureusement, l'intégrale ainsi obtenue est la même que celle de la définition précédente : en effet, les intégrales de f et f_j sur $[x_j, x_{j+1}]$ coïncident puisque f et f_j diffèrent en un nombre fini de points sur cet intervalle ; il suffit alors d'utiliser la relation de Chasles.

Remarque

Le choix de la famille $(x_j)_{0 \leq j \leq N}$ n'est pas unique, mais l'intégrale définie par (1) ne dépend pas de ce choix. On peut le démontrer en utilisant la relation de Chasles (c'est ennuyeux mais sans difficulté), ou en se servant de la remarque précédente, puisque l'intégrale (1) n'est autre que l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$.

2.4 Périodicité

Soit T un réel strictement positif. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, est dite T-périodique si on a $f(x + T) = f(x)$ pour tout réel x. On appellera alors intervalle admissible pour f tout intervalle de la forme $[a, a + T[$

avec $a \in \mathbb{R}$. Une fonction T-périodique est entièrement déterminée par sa donnée sur un intervalle admissible. En effet, pour tout réel x, il existe un unique entier relatif k tel que l'on ait $x \in [a + kT, a + (k + 1)T[$. La périodicité assure que $f(x) = f(x - kT)$; or $x - kT$ appartient à l'intervalle admissible $[a, a + T[$.

Exercice

Dessiner l'allure des graphes des fonctions 1-périodiques f et g définies respectivement par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-1/2, 1/2[$ et $g(x) = |x|$ pour $x \in [0, 1[$.

Définition

Une fonction T-périodique est dite continue (resp. de classe C^1) par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue (resp. de classe C^1) par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b = a + T$.

Remarque

Il est facile de se convaincre que la définition précédente ne dépend pas du choix de a. On pourrait aussi y remplacer la condition $b = a+T$ par $b-aT$. Par périodicité, il suffit que la fonction soit continue (resp. de classe C^1) par morceaux sur un tel intervalle pour qu'elle le soit sur tout intervalle $[c, d]$.

Lemme

Soit f une fonction T-périodique continue par morceaux. Alors l'intégrale $\int_a^{a+T} f(x)dx$ ne dépend pas du choix du réel a. Autrement dit

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = ...$$

<u>Démonstration</u>

La relation de Chasles permet d'écrire

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Le changement de variable $x = y + T$, $dx = dy$, conduit à l'égalité

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy$$

compte tenu de la relation de périodicité $f(y+T) = f(y)$. Il en résulte que la première et la troisième intégrale au second membre de (2) s'éliminent. Il reste la seconde intégrale, qui est indépendante de a.

Dans la suite, par commodité, les fonctions périodiques considérées seront 2 -périodiques. Bien sûr, ce choix est motivé par le fait que les fonctions trigonométriques usuelles $(cos, sin, t \to e^{it}...)$ sont 2π -périodiques. Il ne restreint pas la généralité, puisque tous les résultats que l'on établit pour les fonctions 2 -périodiques se transposent très facilement aux fonctions T-périodiques avec T quelconque : il suffit en effet de remarquer que si f est une fonction T-périodique, alors $x \to f(\frac{2\pi}{T}x)$ est une fonction 2 -périodique. C'est un simple changement d'échelle.

Remarque

Pour toute fonction g supposée 2π-périodique continue par morceaux, le lemme donne en particulier la relation

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$$

Dans la suite, nous utiliserons souvent cette propriété sans la rappeler explicitement.

3 polynômes trigonométriques

Définition

On appelle polynôme trigonométrique toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \tag{2}$$

où N est un entier naturel et où $c_{-N}, ..., c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_N$ sont des coefficients complexes. Lorsque l'un au moins des coefficients c_{-N} ou c_N est non nul, on dit que N est le degré de P.

Remarque

Etant donné un polynôme trigonométrique P, l'écriture (5), où N est le degré de P, est unique. En particulier, le degré lui-même est défini sans ambigüité.

Exemple

Les fonctions cos et sin sont des polynômes trigonométriques de degré 1 : c'est une conséquence immédiate des formules d'Euler, puisque l'on a $\cos x = \frac{1}{2}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{ix}$ et $\sin x = -\frac{1}{2i}e^{-ix} + \frac{1}{2i}e^{ix}$.

Étant donné un polynôme (au sens habituel) $Q = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ à coefficients réels ou complexes, on sait que la connaissance de la fonction $x \to Q(x)$ détermine les coefficients an via la relation $a_n = \dfrac{1}{n!}Q^{(n)}(0)$ (déjà vu dans le chapitre sur les séries entières). On va voir qu'une propriété analogue existe pour les polynômes trigonométriques. Elle est basée sur le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

Lemme

Soient n et p deux entiers relatifs. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases}$$

Soit alors P le polynôme trigonométrique donné par la relation (5), et soit un entier p vérifiant $-N \leq p \leq N$. On a $P(t)e^{-ipt} = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{i(n-p)t}$. Compte tenu du lemme précédent, on en déduit $\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{i(n-p)t}dx = 2\pi c_p$. En changeant le nom des indices, on a donc établi le résultat suivant.

Proposition

Soit P le polynôme trigonométrique donné par l'expression (5). Pour tout entier n avec $-N \leq n \leq N$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{-int}dt$$

Remarque

On montre de même que l'on a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{-int}dt = 0$ pour $|n| > N$. Ces résultats établissent l'unicité de l'écriture (5) d'un polynôme trigonométrique, comme on l'avait annoncé. En effet, le degré peut être caractérisé comme le plus grand entier naturel N tel que l'une des intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{-iNt}dt$ ou $\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{iNt}dt$ soit non nulle. De là, les coefficients c_n sont déterminés de façon unique par la proposition précédente.

4 Vers les séries de Fourier

Revenons quelque peu sur l'introduction de ce chapitre où on a annoncer que Joseph Fourier a analysé la propagation de la chaleur sur des corps solides, et a remarqué que la propagation de la chaleur sur un anneau ressemble à un mouvement harmonique. En physique, nous donnons une expression plus générale à ce phénomène

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

où y est le déplacement périodique de la vibration de l'objet , la période dans l'espace, T la période dans le temps et la phase, qui est constante.

En fait, lors d'une expérience simple, il a remarqué que la source de chaleur passe cycliquement, mais brusquement, d'une valeur extrême à une autre. Il a été ainsi amené à soupçonner le rôle très important des fonctions trigonométriques et admettre qu'elles pouvaient être les constituants élémentaires de tout Si nous fixons la variable x, nous avons ici une fonction $f(t)$ périodique de période T. L'idée de Fourier fut alors d'approximer le phénomène observé par une somme finie, constituée des harmoniques de la période fondamentale T.

L'approximation est

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t + \phi_n\right)$$

où N un naturel et A_n et n deux constantes qui varient en fonction de n. Nous pouvons développer le sinus, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t + \phi_n\right) &= A_n\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\cos(\phi_n) + \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\sin(\phi_n)\right) \\
&= A_n \sin(\phi_n)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + A_n\cos(\phi_n)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \\
&= a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)
\end{aligned}$$

Puisque $A_n \sin(\phi_n)$ et $A_n \cos(\phi_n)$ sont constantes, on peut alors poser que $a_n = A_n \sin(\phi_n)$ et $b_n = A_n \cos(\phi_n)$, et si on ajoute un terme constant $\frac{a_0}{2}$, on obtient,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right)$$

On a choisi le terme constant comme étant $\frac{a_0}{2}$ pour une raison bien précise que l'on détaillera au moment convenu.

5 Elaborer une théorie à partir de l'exemple

5.1 Construction de la théorie

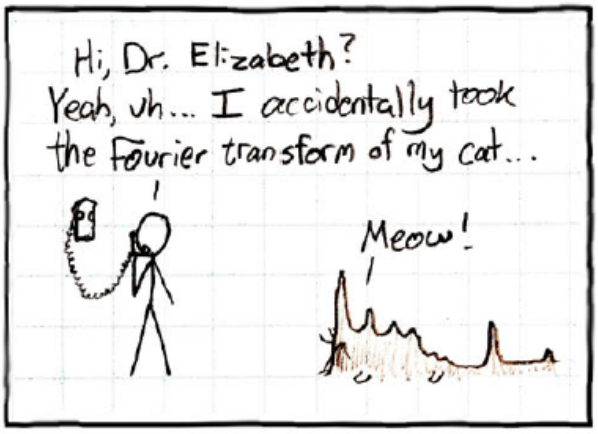
En vue de ce que l'on a pu dire dans l'introduction, peut-on dire qu'une fonction $f(x)$ périodique de période T peut s'écrire sous la forme d'une somme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right)?$$

Certainement pas, car nous n'avons pas encore montré les conditions pour que les deux membres soient équivalents. De plus, on n'a pas encore trouvé les expressions des constantes $\frac{a_0}{2}, a_n, b_n$, qui différencient une série d'une autre.

Pour trouver les expressions de ces constantes, nous allons utiliser les outils d'intégrale sur la période de la fonction que l'on désire étudier.(Et de par le lemme que nous avons démontré, on voit bien que la restriction à une période suffit).

Pour faciliter la compréhension, nous allons d'abord faire les démonstrations avec une fonction $f(x)$ qui a une période 2, puis ensuite étendre la démonstration pour des périodes quelconques.



5.1.1 Calcul d'intégrales intéressantes et Formules utiles

Avant de déterminer les expressions de ces constantes, nous devons déterminer certaines relations qui nous seront très utiles par la suite.(Mentionnons au préalable que nous utilisons la parité des fonctions sinus et cosinus dans notre développement.)

Soient n, p et q des entiers ≥ 0. On vérifie facilement que

$$\cos(n\pi) = (-1)^n\,, \quad \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p+1 \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

$$\sin(n\pi) = 0, \quad \sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt)dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \exp(ikt)dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\sin(qt)dt = 0$, pour tous entiers p et q.

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } p = q = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = q = 0 \end{cases}$$

En particulier, pour tout entier $p \neq 0$, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(pt)dt = \pi = \int_0^{2\pi} \cos^2(pt)dt$$

5.2 Calcul des coefficients

Sans avoir montré l'existence, on suppose qu'une fonction périodique de période 2π, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ est égale à sa série de Fourier. Alors,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

Pour trouver a_0, on va prendre l'intégrale de $-\pi$ à π (une période entière) dans les deux membres, ce qui nous donne

$$\int_{\pi}^{-\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{\pi}^{-\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) dx$$

$$\int_{\pi}^{-\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{\pi}^{-\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) dx$$

l'intégrale d'une somme est égale à la somme de l'intégrale donc

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{-\pi} f(x)dx &= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{N} \int_{\pi}^{-\pi} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} \int_{\pi}^{-\pi} b_n \sin(nx)\, dx \\
&= \left[\frac{a_0}{2}x\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{a_n}{n} \sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{-b_n}{n} \cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{a_0}{2} \times 2\pi = a_0
\end{aligned}$$

On a alors,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x)dx$$

Pour trouver a_n et b_n, on multiplie deux membres respectivement par $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ où k est un entier positif, ensuite, nous allons prendre l'intégrale de $-\pi$ à π dans les deux membres, ce qui nous donne

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x) \cos(nx)dx \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x) \sin(nx)dx$$

Résumons quelque peu. Si une fonction périodique de période 2π peut s'écrire sous forme de série de Fourier, alors

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x) \cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x) \sin(nx)dx$$

Une partie de la suite de ce chapitre consistera à étudier diverses propriétés de convergence des séries de Fourier. On en tirera diverses applications. Auparavant, on a conclue cette section en présentant une écriture couramment utilisée pour les séries de Fourier : cette écriture permet incidemment de voir que leur étude s'inscrit bien dans le cadre général de celle des séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

5.3 Ecriture complexe des séries de Fourier

La manière d'écrire la série de Fourier avec la somme de sinus et cosinus n'est pas l'unique représentation des séries de Fourier : nous pouvons aussi écrire la somme de Fourier sous la forme exponentielle, ce qui simplifiera l'écriture et les calculs.

La formule d'Euler nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)+\frac{ib_n}{2}\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}e^{inx}\left(\frac{a_n}{2}-\frac{ib_n}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-inx}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{ib_n}{2}\right)
\end{aligned}$$

Au lieu de prendre tous les termes n de 1 à ∞, on peut penser qu'on peut inverser ceci sans pour autant changer le sens de la somme en prenant tout les n de $-\infty$ à -1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{inx}\left(\frac{a_n}{2}-\frac{ib_n}{2}\right)+\sum_{n=-\infty}^{-1}e^{-inx}\left(\frac{a_{-n}}{2}+\frac{ib_{-n}}{2}\right)$$

Nous avons envie de grouper les deux sommes, pour ça, il faut qu'on trouve une relation entre les deux. Puisque la série trigonométrique donne une fonction réelle, alors la somme de ces deux sommes doit aussi donner quelque chose de réel. La somme des deux doit donc satisfaire la symétrie complexe : si on veut que la somme de deux nombres complexes soit un nombre réel il faut alors que si l'un est z, l'autre soit son conjugué $\overline{z}$.

Si l'on pose que $C_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}$, donc on peut aussi déduire que $C_{-n}=\dfrac{a_{-n}-ib_{-n}}{2}$, alors on a besoin que le terme correspondant de C_n soit $\overline{C_n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2}$ et que celui de C_{-n} soit $\overline{C_{-n}}=\dfrac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}$. Pour montrer cela nous devons d'abord montrer la relation entre les constantes trigonométriques et a_{-n} et b_{-n}.

On a vu que $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$

$$\begin{aligned}
a_{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(-nx)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\\
&= a_n
\end{aligned}$$

On a vu aussi que $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$

$$\begin{aligned} b_{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= -b_n \end{aligned}$$

Par ces deux relations, nous pouvons constater que,

$$\begin{aligned} C_{-n} &= \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} \\ &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{\overline{a_n - ib_n}}{2} \\ &= \bar{C}_n \end{aligned}$$

Ceci nous montre bien que la somme des deux est bien réelle puisqu'elles satisfont $\bar{C}_n = C_{-n}$. Par la même procédure, on peut aussi montrer que $\bar{C}_{-n} = C_n$. Mais avant de pouvoir les écrire sous une seule somme, on peut constater qu'il nous manque le terme $n = 0$.

Puisqu'on sait que $\bar{C}_n = C_{-n}$, alors $\bar{C}_0 = C_{-0} = C_0$. Ca montre que C_0 est un terme particulier car il est toujours réel est égale a $\frac{a_0}{2}$. C'est la raison pour laquelle on a choisi, dans la série de Fourier trigonométrique, d'introduire la constante comme étant $\frac{a_0}{2}$.

Finalement, nous pouvons continuer notre raisonnement, et poser que

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{et} \quad \bar{C}_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-inx}\left(\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \bar{C}_n e^{inx} \end{aligned}$$

et $\bar{C}_n = C_{-n}$ et $\bar{C}_0 = C_{-0} = C_0$, donc

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

Nous avons donc que si une fonction peut être écrite sous forme de série de Fourier exponentielle, alors sa série de Fourier sera

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

Il nous faut maintenant trouver les expressions du coefficient Cn, à l'instar de ce qu'on a pu réalisé précédemment. N'oublions pas qu'on a défini que $C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $C_{-n} = \dfrac{a_{-n} - ib_{-n}}{2}$ et $C_{-0} = C_0$. Par ailleurs, nous avons aussi montré les expressions de a_n et b_n, donc pour trouver C_n, il nous suffit de substituer les expressions.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx - \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos(nx)dx - i\sin(nx)\right)dx \end{aligned}$$

Par la relation d'Euler, on peut voir directement que $\cos(nx) - i\sin(nx) = e^{-inx}$
Donc

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}$$

Exemple : Fonction Carrée

Prenons l'exemple d'une fonction carrée périodique de période 2π.
Alors sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on a

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 \text{ si} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Si cette fonction peut être écrite sous la forme de série de Fourier, alors cette série est égale à $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$

Maintenant, il faut qu'on détermine les coefficients a_0, a_n et b_n. Pour cela, nous pouvons directement appliquer ce que nous avons trouvé auparavant,

mais on doit traiter les deux parties séparément, puisque $f(x)$ est définie différemment sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0 \end{aligned}$$

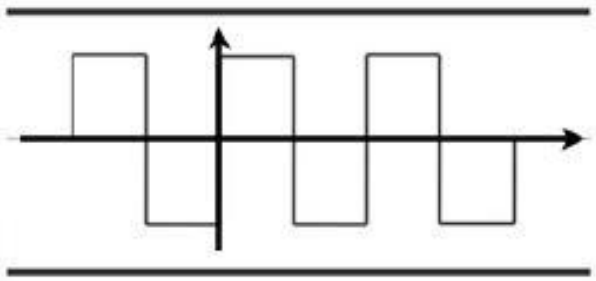


FIGURE 1: Graphique de la fonction carrée

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\left[\sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\left[\sin(nx)\right]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\left(\sin(0)-\sin(-n\pi)\right) + \frac{1}{n}\left(\sin(nx)-\sin(0)\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} -\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{-1}{n}\left[\cos(nx)\right]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\cos(0)-\cos(-n\pi)\right) + \frac{-1}{n}\left(\cos(n\pi)-\cos(0)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(1-\cos(-n\pi)\right) + \frac{-1}{n}\left(\cos(n\pi)-1\right)\right) = \frac{2}{\pi n}\left(1-\cos(n\pi)\right)
\end{aligned}$$

On remarque ici que la valeur de b_n dépend de la parité de n. Aussi posons-nous soit $n = 2k$, soit $n = 2k+1$ suivant la parité de $k \in Z$.

Si $n = 2k$ alors $\frac{2}{\pi n}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \frac{1}{k\pi}\left(1-\cos(2k\pi)\right) = 0$

Si $n = 2k+1$, alors $\frac{2}{\pi n}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \frac{1}{(2k+1)\pi}\left(1-\cos\left(2k+1\right)\pi\right) = \frac{4}{(2k+1)\pi}$

Donc

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est un entier paire} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est un entier impaire} \end{cases}$$

Nous avons donc trouvé que la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{4}{(2k+1)\,\pi} \sin\left((2k+1)\,x\right)$$

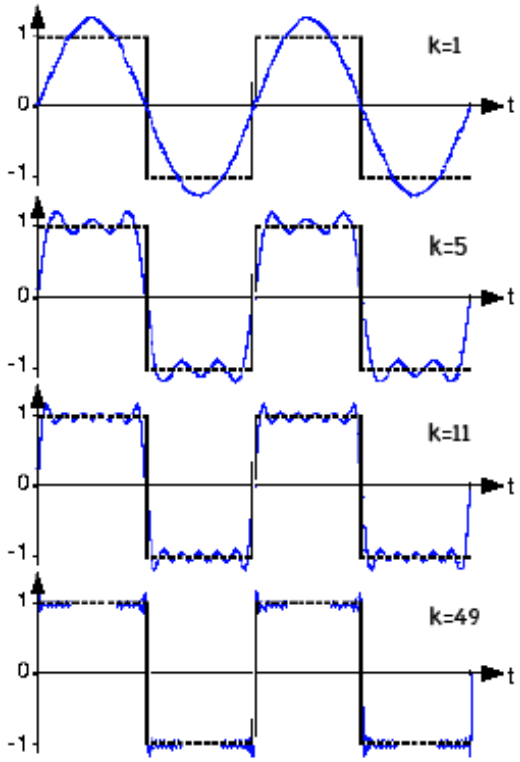


FIGURE 2: Addition de termes de la fonction carrée

Par cet exemple, nous pouvons aussi observer une chose étonnante. Cette fonction carrée peut être simplement écrite par la somme de sinus. En effet, la raison pour laquelle son expression est uniquement sous forme de termes en sinus est simplement due à sa parité. Cette "propriété de parité" nous dit que :

– si la fonction est paire, alors sa série de Fourier est une somme de cosinus.
– si la fonction est impaire, sa série de Fourier est une somme de sinus.

D'où la propostion suivante :

Proposition

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période $T = 2\pi$, localement intégrable.
Si f est impaire

$$on\ a\ a_p = 0\ pour\ tout\ p \geq 0\ et\ b_p = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(pt)dt,\ \ p \geq 1.$$

Si f est paire

$$on\ a\ b_p = 0\ pour\ tout\ p \geq 1\ et\ a_p = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(pt)dt,\ \ p \geq 0.$$

Ou encore

• Si f est impaire, on a $c_p = -c_{-p}$ pour tout $p \geq 0$ (en particulier $c_0 = 0$) et la série de Fourier est de la forme

$$2ic_1 \sin x + 2ic_2 \sin 2x + \cdots + 2ic_n \sin nx + \cdots$$

• Si f est paire, on a $c_p = c_{-p}$ pour tout $p \geq 0$ et la série de Fourier est de la forme

$$c_0 + 2c_1 \cos x + 2c_2 \cos 2x + \cdots + 2c_n \cos nx + \cdots$$

<u>Preuve</u>

Si une fonction localement intégrable g est définie sur $[-a, +a]$ pour $a > 0$, on a

$$\int_{-a}^{+a} g(t)dt = 0\ si\ g\ est\ impaire$$

$$\int_{-a}^{+a} g(t)dt = 2\int_0^{+a} g(t)dt\ si\ g\ est\ paire$$

d'où le résultat, en remplacant $\int_0^{2\pi}$ par $\int_{-\pi}^{\pi}$.dans les formules.

Remarque

On peut écrire les séries de Fourier exponentielles d'une fonction $f(x)$ de période quelconque T. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, localement intégrable.

(i) Les coefficients de Fourier de f sont

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(p\omega t)dt, p \geq 0\ \ et \\ b_p &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(p\omega t)dt, p \geq 1 \end{aligned}$$

et la série de Fourier de f est la série de fonctions

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\right), x \in \mathbb{R}$$

Ou bien

(ii)les Coefficients de Fourier de f sont

$$c_p = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-ip\omega t)dt, p \in \mathbb{Z}$$

et la série de Fourier de f est la série de fonctions

$$c_0 + \sum_{n\geq 1}\left(c_n \exp(ip\omega x) + c_{-n}\exp(-ip\omega x)\right), x \in \mathbb{R}$$

5.4 Interprétation physique

En physique ou électronique, les fonctions utilisées sont souvent des composantes de phénomènes périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, la variable x étant le temps (noté généralement t). La grandeur $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ est la fréquence du signal.

Dans ces domaines, on remplace souvent la fonction $u_n(t) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ par $u_n(t) = C_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$, où

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

et φ_n est tel que $a_n = C_n \cos\varphi_n, b_n = C_n \sin\varphi_n$.

En effet, on remarque que $(\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b!)$

$$C_n \cos(n\omega t - \varphi_n) = C_n \cos\varphi_n \cos(n\omega t - \varphi_n) + C_n \sin\varphi_n \sin(n\omega t - \varphi_n)$$

$$a_n^2 + b_n^2 = C_n^2 \left(\cos^2\varphi_n + \sin^2\varphi_n\right) = C_n^2$$

6 Convergence de la série de Fourier

Jusqu'à présent, nous avons toujours utilisé soit l'hypothèse "si la fonction égale à sa série" ou soit le terme "la série de Fourier d'une fonction" parce qu'on a pas encore montre de manière rigoureuse, l'équivalence entre la fonction et sa série de Fourier. Pour cela, nous devons montrer la convergence de la série de Fourier vers la fonction. La convergence est sans conteste l'aspect le plus compliqué dans la description mathématique des séries de Fourier. Aussi pouvons-nous seulement, avec notre modeste niveau, en aborder qu'une mince partie.

6.1 Convergence des séries trigonométriques

Proposition

Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge, alors la série trigonométrique

$$S(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

converge normalement (et donc uniformément sur $\mathbb{R}$)

<u>Preuve</u>

Cela découle directement de l'inégalité : $\left|a_n \cos\left(\dfrac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\dfrac{2n\pi}{T}t\right)\right| \leq |a_n| + |b_n|$

Corollaire

Si les séries numériques $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, alors la série trigonométrique $S(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Si les séries $n\sum|a_n|$ et $n\sum|b_n|$ convergent, alors la somme $S(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, à dérivée continue.

Proposition
Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique $S(t)$ est convergente pour $t \neq k.T$ où $k \in \mathbb{Z}$.

La convergence simple, que traite le théorème de Dirichlet, requiert des hypothèses différentes sur la fonction $f(x)$. La preuve de ce théorème est inabordable car elles nécessite des notions d'analyse fonctionnelle très avancées.

Définition
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est
- de classe C^1, si f est dérivable et f' est continue ;
- de classe C^1 par morceaux, si, sur tout $[a, b]$, f est dérivable à dérivée continue sauf au plus en un nombre fini de points, dits points singuliers. En un tel point x_0, f
- admet une limite à droite, notée $f(x_0^+)$, une limite à gauche, notée $f(x_0^-)$, une dérivée à droite $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ et une dérivée à gauche $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$.
- s'il est C^1 par morceaux alors elle est continue par morceaux. En particulier, elle est localement intégrable.

Théorème (Dirichlet : (admis))
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période $T = 2\pi$ et C^1 par morceaux. Alors
1. La série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. La somme, notée $S_f(x)$, de la série de Fourier de f est égale à

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ continue en } x \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

Nous pouvons dès lors dire qu'une fonction qui vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet converge simplement. Remarque :Il peut exister des fonctions continues dont la série de Fourier associée diverge pour certaines valeurs de x.

Thérème. Formule de Parseval (admis)
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2\pi$ et C^1 par morceaux. Alors

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

Ou bien

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = |c_0|^2 + \sum_{n\geq 1}\left(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\right)$$

Exemple
Soit f de période $T = 2\pi$, définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad pour \quad x \in [-\pi, \pi[$$

La fonction est continue et dérivable sauf aux points

$$x_k = (2k+1)\,\pi, k \in \mathbb{Z}$$

La fonction est impaire, donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. De plus

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{t}{2}\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt$$

Soit (pour calculer b_n on fait une intégration par parties), pour $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt\right) = -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

Comme f est C^1 par morceaux, le Théorème de Dirichlet s'applique, la série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$ et sa somme est

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq (2k+1)\,\pi \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 & \text{si } x = (2k+1)\,\pi \end{cases}$$

Si $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\frac{\pi}{2}) = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

En appliquant le théorème de Parseval, on obtient

$$\sum_{n\geq 1} b_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t^2}{4}dt = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

Soit

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7 Annexe

7.1 Extrait du DS N°3 2009-2010

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période $T = 2\pi$ définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Calculer les coefficients de Fourier : a_n et b_n.
2. Montrer que f est développable sur $\mathbb{R}$ en série de Fourier et donner son développement en série de Fourier.
3. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$$

7.2 Extrait du DS N°3 2010-2011

Exercice.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \pi - |x|$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.
2. Calculer ses coefficients de Fourier :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-int} dt$$

3. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $x \mapsto S_f(x)$ la somme de cette série.
4. Il résulte de la version du théorème de Dirichlet énoncée en cours que, si f est dérivable au point $x \in \mathbb{R}$, $S_f(x) = f(x)$. Montrer que $S_f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Déduire du résultat précédent la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

7.3 Extrait du DS N°3 2011-2012

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique (ni paire ni impaire) tel que :

$$\forall x \in [0, 2\pi[\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \\ f(0^+) = 0, \quad f(0^-) = f(2\pi^-) = 4\pi^2 \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Calculer les coéficients de Fourier de f a_0, a_n et b_n .
2. Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ convergent, puis déterminer leur somme en fonction de x.

Exercice 2

A l'aide de l'identité de Parseval, montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)\, dx = \frac{3}{4}\pi$$