

TD. N°3. Thermodynamique. Filière SMA-SMPC. S1.
Corrigé.

Exercice 1 :

- 1) On a : $\delta Q = c_V dT + \ell dV$ ou $\delta Q = c_P dT + h dP$;

A pression cste : $\delta Q = c_P dT = dH = c_V dT + \ell dV$ (1). Si on considère que $T = T(P, V)$

Alors : $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) \cdot dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) \cdot dV$ (2)

et à $P = \text{Cste}$, (2) $\Rightarrow dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) \cdot dV$, d'où, d'après (1), on a :

$$c_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) \cdot dV + \ell dV = c_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) \cdot dV \Rightarrow \ell dV = (c_P - c_V) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) \cdot dV \Rightarrow \ell = (c_P - c_V) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right).$$

A volume constant : $\delta Q = c_V dT = dU = c_P dT + h dP$ (3)

Et à $V = \text{Cst}$, (2) $\Rightarrow dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) \cdot dP$, d'où, d'après (3), on a :

$$c_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) \cdot dP = c_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) \cdot dP + h dP \Rightarrow h = -(c_P - c_V) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)$$

- 2) Dans le cas du gaz parfait :

$$PV = n \cdot RT \Rightarrow T = \frac{PV}{n \cdot R} \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) = \frac{P}{n \cdot R} \text{ et } \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) = \frac{V}{n \cdot R}.$$

D'après la relation de Mayer : $c_P - c_V = n \cdot R$, il vient :

$$\ell = n \cdot R \cdot \frac{P}{n \cdot R} = P \quad (4) \quad \text{et} \quad h = -n \cdot R \cdot \frac{V}{n \cdot R} = -V. \quad (5)$$

- 3) Vérifions que δQ n'est pas une différentielle totale exacte (d.t.e) pour le cas du G.P.

En variables (T, V), $\delta Q = c_V dT + \ell dV = c_V dT + P dV$; la condition à satisfaire pour que δQ soit une (d.t.e) est que :

$$\left(\frac{\partial c_V}{\partial V}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) \quad (6)$$

Or $\left(\frac{\partial c_V}{\partial V}\right) = 0$ car d'après la 1^{ère} loi de Joule, l'énergie interne d'un G.P ne dépend que de la température, donc c_V ne dépend que de la température.

D'autre part : $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{n \cdot R}{V}$,

Conclusion : la condition d'une d.t.e, n'est donc pas vérifiée. Q n'est pas une fonction d'état et la grandeur Q dépend du chemin suivie.

- Qu'en est-il de l'expression $\left(\frac{\delta Q}{T}\right)$ pour un G.P ?

$$\text{L'expression de } \left(\frac{\delta Q}{T}\right) = \frac{c_V}{T} dT + \frac{P}{T} dV = \frac{c_V}{T} dT + \frac{n \cdot R}{V} dV$$

On vérifie que : $\left(\frac{\partial \left(\frac{c_V}{T}\right)}{\partial V}\right) = 0 = \left(\frac{\partial \left(\frac{n \cdot R}{V}\right)}{\partial T}\right)$, ce qui nous permet de conclure que $\left(\frac{\delta Q}{T}\right)$ est une d.t.e

par conséquent on peut écrire que $\frac{\delta Q}{T} = df$. D'après le 2^{ème} principe $f = S$ tel que :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Exercice 2 :

1) Température d'équilibre T_e : Système isolé, donc pas d'échange d'énergie avec l'extérieur.

$$\Leftrightarrow \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q_1 + Q_2 = 0 \quad (1);$$

De plus, liquides L_1 et L_2 , incompressibles, donc volume constant, donc pas de travail mécanique échangé entre L_1 et L_2 . Seul existe l'échange de chaleur entre L_1 et L_2 . A l'équilibre thermodynamique, on doit avoir :

$$(1) \Leftrightarrow C_1 \cdot (T_e - T_1) + C_2 \cdot (T_e - T_2) = 0 ; \text{ d'où : } T_e = \frac{C_1 \cdot T_1 + C_2 \cdot T_2}{C_1 + C_2}.$$

2) Si $C_1 = C_2 = C \Rightarrow T_e = \frac{T_1 + T_2}{2}$.

a- $\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{C dT}{T} = C \cdot \ln \frac{T_e}{T_1},$

b- De même : $\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_e} \frac{C dT}{T} = C \cdot \ln \frac{T_e}{T_2},$

c- $\Delta S_{univ} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \cdot \ln \frac{T_e}{T_1} + C \cdot \ln \frac{T_e}{T_2} = C \cdot \ln \frac{T_e^2}{T_1 T_2} = C \cdot \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2},$

d- Le deuxième principe de la thermodynamique est-il vérifié pour cette transformation irréversible?

Pour un système isolé, sujet à une transformation irréversible, on a : $\Delta S > 0$.

En effet : $\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} = \frac{(T_1 - T_2)^2 + 4 T_1 T_2}{4 T_1 T_2} = 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4 T_1 T_2} > 1$, donc $\Delta S > 0$ et le 2^{ème} principe est bien vérifié.

Exercice 3 :

1) Nature de la transformation : il s'agit d'une transformation quasi statique donc réversible, à température extérieure constante, c'est une transformation isotherme.

2) Calcul du travail reçu par le gaz : transformation isotherme, donc : $P_1 V_1 = P_2 V_2$

Et $\delta W = -P dV = -R \cdot T_1 \frac{dV}{V} \Rightarrow W = -R \cdot T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -R \cdot T_1 \ln \frac{P_1}{P_2} = R \cdot T_1 \ln \frac{P_2}{P_1}$

Remarque : $P_1 = \frac{m_0 \cdot g}{S}$ et $P_2 = \frac{(M + m_0) \cdot g}{S} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{M + m_0}{m_0} = 1 + \frac{M}{m_0}$, d'où :

$$W = R \cdot T_1 \ln \frac{P_2}{P_1} = R \cdot T_1 \ln \left(1 + \frac{M}{m_0} \right)$$

3) Calcul de la variation d'entropie du gaz : ΔS_{gaz} .

Transformation isotherme réversible, on a :

$$dS_{gaz} = \frac{\delta Q}{T_1} \text{ avec } \delta Q = P dV \text{ car } dU = \delta Q + \delta W = c_V dT = 0 \text{ (1^{ère} loi de Joule)}$$

$$\Rightarrow \Delta S_{gaz} = \frac{-W}{T_1} = -R \cdot \ln \left(1 + \frac{M}{m_0} \right),$$

4) Calcul de la variation d'entropie du milieu extérieur ΔS_{ext} .

Par définition : $dS_{ext} = -\frac{\delta Q}{T_1}, \Rightarrow \Delta S_{ext} = R \cdot \ln \left(1 + \frac{M}{m_0} \right),$

5) Calcule de la variation d'entropie de l'univers ΔS_{uni} . $\Delta S_{uni} = \Delta S_{gaz} + \Delta S_{ext} = 0$.

6) Le 2^{ème} principe de la thermodynamique est-il vérifié ?

La variation d'entropie de l'univers est nulle car la Transformation est réversible. Ce résultat est conforme avec le 2^{ème} principe qui stipule que $\Delta S_{uni} \geq 0$.

Exercice 4 :

1) Température d'équilibre T_e : Système isolé thermiquement, donc pas d'échange d'énergie avec l'extérieur ($Q = 0$). De plus, les deux blocs sont rigides (des solides), donc volume constant, donc aucun travail mécanique échangé ($W = 0$).

$$\text{Donc :} \quad \Leftrightarrow \Delta U = \Delta U_f + \Delta U_p = Q_f + Q_p = 0 \quad (1);$$

Si T_e est la température finale du système à l'équilibre, on a :

$$m_f \cdot c_f (T_e - T_f) + m_p \cdot c_p (T_e - T_p) = 0 \Rightarrow T_e = \frac{m_f \cdot c_f \cdot T_f + m_p \cdot c_p \cdot T_p}{m_f \cdot c_f + m_p \cdot c_p}$$

$$\text{A.N : } T_e = 323,94 \text{ K} \approx 324 \text{ K}$$

2) Détermination de la variation d'entropie du système : « fer + plomb ». Soit $\Delta S = \Delta S_f + \Delta S_p$

$$\text{Avec : } \Delta S_f = \int_{T_f}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_f}^{T_e} \frac{m_f \cdot c_f dT}{T} = m_f \cdot c_f \cdot \ln \frac{T_e}{T_f} = -4,71 \text{ J/K}$$

$$\text{Et } \Delta S_p = \int_{T_p}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_p}^{T_e} \frac{m_p \cdot c_p dT}{T} = m_p \cdot c_p \cdot \ln \frac{T_e}{T_p} = 6,18 \text{ J/K}$$

$$\text{D'où :} \quad \Delta S = \Delta S_f + \Delta S_p = 1,47 \text{ J/K}$$

Transformation irréversible d'un système isolé : $\Delta S > 0$, ce qui est conforme au 2^{ème} principe.

Exercice 5 :

Remarque : Le lac est un réservoir, sa température reste constante alors que la température du cube de glace va passer de -10°C à 15°C qui sera la température d'équilibre finale. Donc la température du cube de glace va varier de 263 K à 288 K en subissant les transformations successives suivantes :

1→2 : réchauffement de 263 K à 273 K ;

2→3 : fusion de la glace à 273 K ;

3→4 : réchauffement de 273 K à 288 K.

1) La variation d'entropie du cube de glace s'écrit donc :

$$\Delta S_{cub} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34}$$

$$\text{Avec : } \Delta S_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m \cdot c_g dT}{T} = m \cdot c_g \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = (0,01 \text{ kg}) \cdot \left(2220 \frac{\text{J}}{\text{kg}}\right) \cdot \ln \frac{273}{263} = 0,828 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{23} = \frac{Q}{T} = \frac{m \cdot L_f}{T_2} = (0,01 \text{ kg}) \cdot \left(334 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}\right) \cdot \frac{1}{273} \cdot \text{K}^{-1} = 12,23 \text{ J/K}$$

$$\text{Et } \Delta S_{34} = m \cdot c_\ell \cdot \ln \frac{T_4}{T_3} = (0,01 \text{ kg}) \cdot \left(4180 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot \text{K}\right) \ln \frac{288}{273} = 0,828 \frac{\text{J}}{\text{K}} = 2,236 \text{ J/K}$$

$$\text{D'où : } \Delta S_{cub} = 0,828 + 12,23 + 2,236 = 15,29 \text{ J/K.}$$

2) La variation d'entropie du lac est :

$$\Delta S_{lac} = \frac{Q_{lac}}{T_s}, \text{ avec : } Q_{lac} : \text{ la quantité de chaleur échangé avec le cube et } T_s : \text{ la température du lac.}$$

L'échange de chaleur a lieu uniquement entre les deux composantes du système, donc :

$$Q_{lac} + Q_{cub} = 0 \quad \text{Or,} \quad Q_{lac} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34}$$

$$\text{Avec :} \quad Q_{12} = -m \cdot c_g (T_2 - T_1) = -(0,01) \cdot (2220) \cdot 10 = -222 \text{ J}$$

$$Q_{23} = -m \cdot L_f = -(0,01) \cdot (334 \cdot 10^3) = -3340 \text{ J}$$

$$\text{Et} \quad Q_{34} = m \cdot c_\ell (T_4 - T_3) = -(0,01) \cdot (4180) \cdot 15 = -627 \text{ J}$$

$$\text{D'où : } Q_{lac} = -(222 + 3340 + 627) = -4189 \text{ J} \Rightarrow \Delta S_{lac} = \frac{Q_{lac}}{T_s} = -\frac{4189}{288} = -14,54 \text{ J/K.}$$

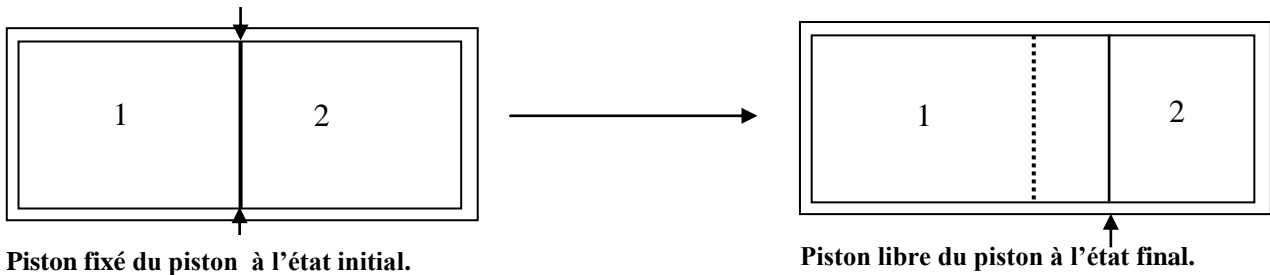
2) La variation la variation d'entropie de l'univers ΔS_{uni} .

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{lac} + \Delta S_{cub} = (15,29 - 14,57) = 0,72 \text{ J/K}$$

Commentaire : $\Delta S_{uni} > 0$, le 2^{ème} principe est vérifié.

Exercice 6 :

Caractéristiques de l'état d'équilibre final.



1) Lorsqu'on libère le piston, celui-ci se déplace *spontanément* et ne s'arrête que lorsque l'équilibre, mécanique et thermique entre les deux parties du système, est atteint. C'est une transformation *irréversible*.

Equilibre thermique : Le piston étant conducteur de la chaleur, les deux parties sont à la même température finale T_f . Le système est thermiquement isolé et ne reçoit donc aucun travail ni chaleur de l'extérieur, on a donc :

$$\Delta U_{1+2} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

Comme il s'agit d'un gaz parfait : $\Delta U_1 = c_{1V} \cdot (T_f - T_0)$ et $\Delta U_2 = c_{2V} \cdot (T_f - T_0)$, soit :

$$(c_{1V} + c_{2V}) \cdot (T_f - T_0) = 0 \Rightarrow T_f = T_0 = 300 \text{ K}$$

Equilibre mécanique : la pression à l'état final est la même de chaque coté du piston soit,

$$P_{f1} = P_{f2} = P_f$$

La transformation étant *irréversible*, on ne connaît que les paramètres macroscopiques des états initial et final qui ont la même température, on a donc :

Pour la partie gauche, $P_1 \cdot V_0 = P_f \cdot V_{1f}, (1)$

De même pour la partie droite, $P_2 \cdot V_0 = P_f \cdot V_{2f}, (2)$

et sachant que : $V_{1f} + V_{2f} = 2V_0$, la somme de (1) +(2) donne :

$$(P_1 + P_2) \cdot V_0 = 2 \cdot P_f \cdot V_0 \Rightarrow P_f = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad \text{A.N: } P_f = 1,5 \text{ atm.}$$

2) Variation d'entropie du système. Sachant que les états de chaque partie ont même température T_0 , on peut envisager une transformation réversible entre les mêmes états. Le résultat de étant indépendant du chemin pour une fonction d'état.

$$dS_1 = \left(\frac{\delta Q_1}{T_0} \right)_{rev} = \frac{c_P dT}{T_0} - \frac{V dP}{T_0} = -\frac{V dP}{T_0}, \quad \text{car } dT = 0 \text{ et sachant que : } P_1 V_0 = n_1 \cdot R T_0.$$

$$dS_1 = -\frac{V dP}{T_0} = -n_1 \cdot R \cdot \frac{dP}{P} \Rightarrow \Delta S_1 = -n_1 \cdot R \int_{P_1}^{P_f} \frac{dP}{P} = -n_1 \cdot R \cdot \ln \frac{P_f}{P_1} = -\frac{P_1 V_0}{T_0} \cdot \ln \frac{P_f}{P_1}$$

De même pour la partie droite, on a : $P_2 V_0 = n_2 \cdot R T_0$. avec $n_2 = n_1$

$$\Delta S_2 = -n_1 \cdot R \int_{P_2}^{P_f} \frac{dP}{P} = -n_1 \cdot R \cdot \ln \frac{P_f}{P_2} = -\frac{P_2 V_0}{T_0} \cdot \ln \frac{P_f}{P_2}$$

Pour l'ensemble : $\Delta S_{1+2} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{P_1 V_0}{T_0} \cdot \ln \frac{P_f}{P_1} - \frac{P_2 V_0}{T_0} \cdot \ln \frac{P_f}{P_2},$

A.N : $\Delta S_{1+2} \approx 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ J/K} \Rightarrow \Delta S_{1+2} > 0$ puisque le système est isolé et la transformation est irréversible.