UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

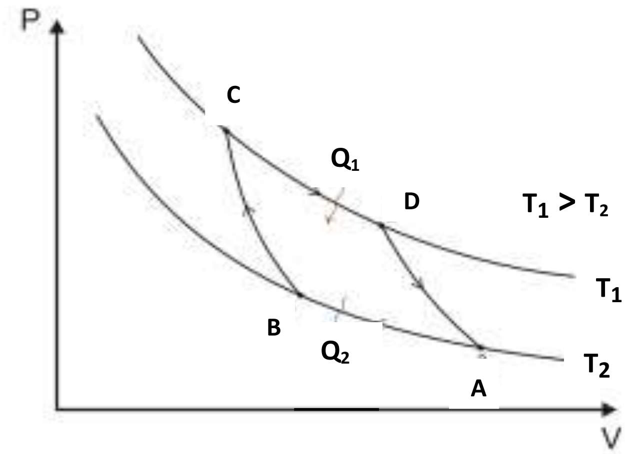
Année universitaire 2016/2017

TD. N°4. Thermodynamique. Filière SMA. S1
Corrigé.

I-Machines thermiques.

Exercice: 1. Moteur thermique & Machine frigorifique.

1) Représentation.



Sens : horaire (sens des aiguilles d'une montre)

Signe du travail : W < 0

2) Relation entre volumes:

BC, transformation isentropique donc adiabatique: $T_B\, V_B^{\gamma-1} = T_C\, V_C^{\gamma-1} \Longrightarrow \frac{V_B}{V_C} = (\frac{T_C}{T_B})^{\frac{1}{\gamma-1}} = (\frac{T_1}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}}$

DA, transformation isentropique donc adiabatique: $T_D\, V_D^{\gamma-1} = T_A\, V_A^{\gamma-1} \Longrightarrow \frac{V_A}{V_D} = (\frac{T_D}{T_A})^{\frac{1}{\gamma-1}} = (\frac{T_1}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}}$

On a donc : $\frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D} \Longrightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$

3) Chaleurs échangés

AB transformation isotherme. Gaz parfait : $\Delta U = 0$.

Premier principe $\Delta U = W_2 + Q_2 = 0 \Longrightarrow Q_2 = -W_2$ soit : $Q_2 = nR\, T_2\, ln\frac{V_B}{V_A}$ (1)

De même pour CD (transf. Isotherme), $\Delta U = W_1 + Q_1 = 0 \Longrightarrow Q_1 = -W_1$

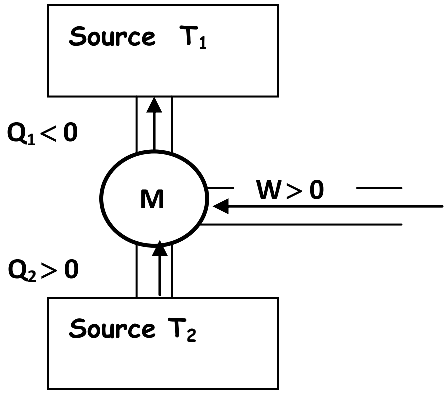
soit : $Q_1 = nR\, T_1\, ln\frac{V_D}{V_C}$ (2)

On déduit de (1) et (2) : $\frac{Q_1}{T_1} = nR\ ln\frac{V_D}{V_C} = nR\ ln\frac{V_A}{V_B}$, d'après la question 2)

et d'après (1), $nR\ ln\frac{V_A}{V_B} = -\frac{Q_2}{T_2}$, d'où : $\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \Longrightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$, (égalité de Clausius)

Interprétation : L'égalité de Clausius est la traduction de la relation : $\Delta S_{cycle} = 0$. (voir cours).

4) Représentation de la machine :



5) Efficacité :

Par définition :

$\beta = \frac{énergie\ recherchée}{énergie\ payée}$

$\beta = \frac{Q_2}{W}$

D'après le Premier principe : $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$ (3)

D'après le deuxième principe : $\Delta S_{cycle} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (4)

D'après (3) : $W = -Q_1 - Q_2$ et d'après (4) $Q_1 = -\frac{T_1}{T_2}.Q_2$

En remplaçant dans l'expression de l'efficacité :

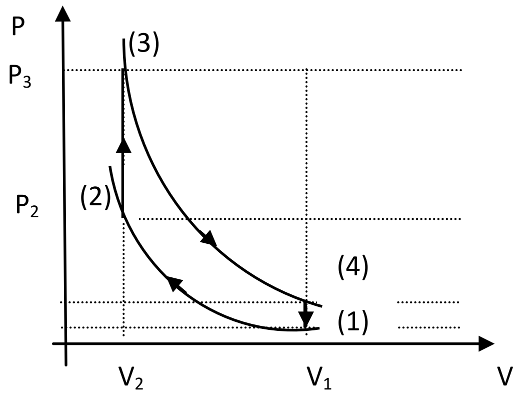
$$\beta = \frac{Q_2}{\frac{T_1}{T_2}.Q_2 - Q_2} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} \Rightarrow \beta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

A.N : $\beta = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{258}{298-258} = 6,45$

6) Chaleur empruntée à la source froide, $\beta = \frac{Q_2}{W} \Rightarrow Q_2 = \beta.W$,

A.N : $Q_2 = 6,445.12.kJ = 77,4\ kJ.$

Exercice: 2. Moteur à combustion interne.



1) Représentation du cycle dans le diagramme (P, V).
N.B : les courbes des adiabatiques d'équation :
$PV^\gamma = cste \Rightarrow P = \frac{cste}{V^\gamma}$, ne sont pas parallèles.
Seul un diagramme à l'échelle donnera une idée plus précise sur l'allure du cycle après avoir calculé les valeurs numériques des pressions $P_2, P_3\ et\ P_4$.

2) AB, transf. Adiabatique réversible, on donc :
$PV^\gamma = cste$ ou $TV^{\gamma-1} = cste \Rightarrow T_1\,V_1^{\gamma-1} = T_2\,V_2^{\gamma-1}$ et comme $V_1 = a.V_2$, on déduit que :

$$T_2 = T_1\,a^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = a^{\gamma-1}$$

De même pour la transf. CD, on a : $T_3\,V_2^{\gamma-1} = T_4\,V_1^{\gamma-1}$ car $V_3 = V_2$ et $V_4 = V_1$

$$T_3 = T_4\,a^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = a^{\gamma-1}$$

Le rendement étant défini par : $\eta = -\frac{W_{cycle}}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$,

Et sachant que pour l'unité de masse, on a :

$Q_1 = c_V^0(T_3 - T_2)$ et $Q_2 = c_V^0(T_1 - T_4)$, il vient : $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$,

avec $T_1 = T_2\,a^{1-\gamma}$ et $T_3 = T_4\,a^{\gamma-1}$, on déduit que $\boldsymbol{\eta = 1 - a^{1-\gamma}}$.

3) - AB, transf. Adiabatique réversible, on donc : $PV^\gamma = cste$, on a donc :
$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma \Rightarrow P_2 = P_1.a^\gamma$; A.N: $\boldsymbol{P_2 = 11,18\ atm}$.

- BC transf. isochore, dans le cas présent : $Q_1 = 300\ cal/g\ =\ 300\ kcal\ /kg$,
  Comme $Q_1 = c_V^0(T_3\ - T_2\ ) \Longrightarrow T_3\ =\ T_2\ + \frac{Q_1}{c_V^0}\ = T_1\ a^{\gamma-1} + \frac{Q_1}{c_V^0}$;
  A.N : $T_3\ = 291.\,5^{0,5} + \frac{300}{0,2} \Longrightarrow \boldsymbol{T_3\ \approx 2151\ K}$;
  Remarque : $c_V = 0,2\ \ cal\ /g.°C\ =\ 0,2\ \ cal\ /g.K$ car $\Delta T\ (K) =\ \Delta\theta\ (°C)$ et on rappelle que :
  C_v = nc_v = mc_v^0 avec : $C_V = \left[\frac{\delta Q}{dT}\right]_V$
  De même, on a : $P_2V_2 = n.R.T_2$ et $P_3V_2 = n.R.T_3 \Longrightarrow \frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2}\ \Longrightarrow\ P_3\ = T_3\,.\frac{P_2}{T_2}$, soit :
  $P_3\ =\ P_2\,.\frac{T_3}{T_1\ a^{\gamma-1}}$; A.N : $\boldsymbol{P_3}\ =\ 11{,}18.\frac{2151}{291.(5)^{0,5}} = \boldsymbol{37\ atm}$.
- CD, transf. Adiabatique réversible, on donc : $PV^{\gamma} = cste$, on a donc :
  $P_3V_2^{\gamma}\ =\ P_4V_1^{\gamma}\ \Longrightarrow\ P_4 = P_3.\,a^{-\gamma}$; A.N: $\boldsymbol{P_4 = 3,3\ atm}$.
- DA transf. isochore, comme précédemment (pour BC), on a : $\frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1}\ \Longrightarrow\ T_4\ = T_1\,.\frac{P_4}{P_1}$
  A.N : $\boldsymbol{T_4\ = 960\ K}$
- Calcul du rendement : $\boldsymbol{\eta = 1 - a^{1-\gamma}}$ **;** A.N **:** $\boldsymbol{\eta = 0,55 = 55}$%

Remarque :$\eta = 1 - a^{1-\gamma} = 1 - \frac{1}{a^{0,5}} =\ 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}$ **;** avec $a = \frac{V_1}{V_2}$. Si on augmente le taux de compression « a », le rendement tendrait vers l'unité. Or augmenter « a »passerait par une augmentation de V_1 ou une diminution de V_2. Dans la pratique, on ne peut augmenter à volonté V_1ni réduire à volonté V_2.

<u>Exercice: 3. Pompe à chaleur.</u>

1) Coefficient de performance ou Efficacité :

   Soit Q_1 la chaleur échangée par la pompe avec la source chaude, Q_2 la chaleur échangée par la pompe avec la source froide et W le travail reçu par la pompe.

   Par définition : $\beta = -\ \frac{Q_1}{W}$

   D'après le Premier principe : $\Delta U = W +\ Q_1 + Q_2 = 0$ (1)

   D'après le deuxième principe : $\Delta S_{cycle}\ = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (2)

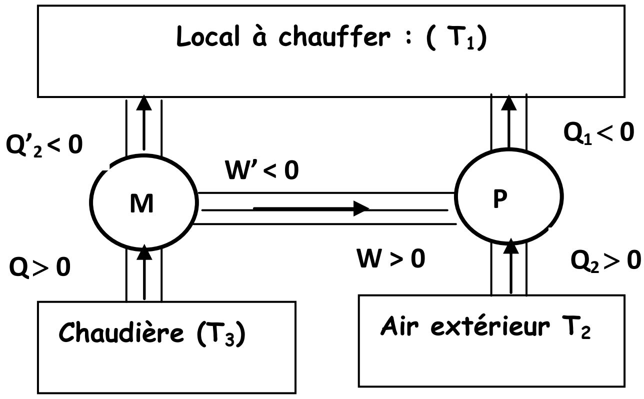
   D'après (1) , $W\ = -\,Q_1 - Q_2$, et D'après (2), $Q_1\ = -\ \frac{T_1}{T_2}.\,Q_2$, d'où : $\beta\ = -\ \frac{Q_1}{-\,Q_1 - Q_2}$

   $\beta\ =\ \frac{1}{1+\frac{Q2}{Q1}} = \frac{1}{1-\frac{T2}{T1}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$; A.N : $\beta\ =\ \frac{293}{293-268} \approx 11{,}7$

Le travail consommé est tel que: $\beta = -\ \frac{Q_1}{W}$ soit $W\ = -\ \frac{Q_1}{\beta}$; A.N : $W\ = -\ \frac{164\ \text{kJ}}{11{,}7} = 14$ kJ,

2) <u>Etude du premier dispositif :</u>

M = Moteur, P = Pompe



Le schéma ci-dessus montre que la chaleur reçue par le local (positive pour le local) est la somme de la chaleur rejetée par le moteur $(-Q'_2)$ et la chaleur fournie par la pompe $(-Q_1)$:

$Q_{local} = -Q'_2 - Q_1,$ (N.B : Q'_2 et Q_1 sont négatives par convention)

- <u>Pompe à chaleur</u> :

Q_1 et Q_2 chaleurs échangées et W le travail reçu.

D'après le Premier principe : $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$ (3)

D'après le deuxième principe : $\Delta S_{cycle} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (4)

- <u>Moteur</u>

D'après le Premier principe : $\Delta U = W' + Q_1' + Q_2' = 0$ (5)

D'après le deuxième principe : $\Delta S_{cycle} = \frac{Q_1'}{T_1'} + \frac{Q_2'}{T_2'} = 0$ (6)

Pour les relations (5) et (6), on doit préciser que :

$W' = -W$, $Q_1' = Q$, *d'après l'énoncé*, $T_1' = T_3$ et $T_2' = T_1$.

Avec ces notations les relations (5) et (6) s'écrivent :

$-W + Q + Q_2' = 0$ (5')

$\frac{Q}{T_3} + \frac{Q_2'}{T_1} = 0$ (6')

<u>Chaleur reçue par le local.</u>

$Q_{local} = -Q_1 - Q'_2$. Pour calculer cette chaleur il faut déterminer Q_1 et Q'_2.

D'après (6') : $Q_2' = -Q.\frac{T_1}{T_3}$ (7) et d'après (5') $W = Q + Q_2' = Q - Q.\frac{T_1}{T_3} = Q(1 - \frac{T_1}{T_3})$ (8)

Et d'après (4) $Q_2 = -\frac{T_2}{T_1}.Q_1$ et d'après (3) $W = -Q_1 - Q_2 = -Q_1(1 - \frac{T_2}{T_1})$ (9)

En identifiant les expressions de W données par (8) et (9), on obtient :

$$Q_1 = -Q.\frac{1 - \frac{T_1}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

En tenant compte de cette expression et de celle de Q_2' (7), on obtient :

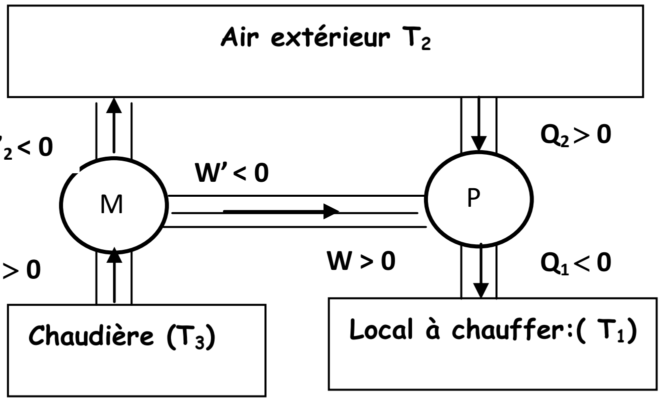
$$Q_{local} = -Q_1 - Q'_2 = Q.\frac{1-\frac{T_1}{T_3}}{1-\frac{T_2}{T_1}} + Q.\frac{T_1}{T_3} \Longrightarrow \frac{Q_{local}}{Q} = \frac{1-\frac{T_1}{T_3}}{1-\frac{T_2}{T_1}} + \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_1(T_3-T_2)}{T_3(T_1-T_2)},$$

A.N : $T_1 = 293\ K$; $T_2 = 268\ K$; $T_3 = 483\ K$

$$\frac{Q_{local}}{Q} = \frac{293(483-268)}{483(293-268)} = 5{,}216$$

3) Etude du deuxième dispositif :

Le schéma correspondant à ce dispositif est le suivant :



Le schéma ci- dessus montre que la chaleur reçue par le local (positive pour le local) est dans ce cas fournie par la pompe, le moteur n'est plus en communication avec le local.

$Q_{local} = -Q_1$, (Q_1 est négative par convention)

- Pompe à chaleur :
  Dans ce dispositif, la pompe à chaleur fonctionne entre les mêmes sources comme dans la premier dispositif. On donc les mêmes relations.
- Moteur :
  Dans ce dispositif, la source froide du moteur n'est plus le local mais l'air exterieur. On a donc :
  $T_2^{'} = T_2$, la relation (7) s'écrit dans ce cas : $Q_2^{'} = -Q.\frac{T_2}{T_3}$ (7')

Chaleur reçue par le local.

$Q_{local} = -Q_1$, le calcul de la chaleur reçue par le local est analogue au calcule précédent, la seule modification à apporter est de remplacer T_1 par T_2 dans la relation (8). On a donc :

$$W = Q(1-\frac{T_2}{T_3}) \quad (8') \quad \text{et} \quad W = -Q_1(1-\frac{T_2}{T_1}) \quad (9)$$

En identifiant les expressions de W données par (8') et (9), on obtient :

$$Q_1 = -Q.\frac{1-\frac{T_2}{T_3}}{1-\frac{T_2}{T_1}}, \text{ et } Q_{local} = -Q_1 = Q.\frac{1-\frac{T_2}{T_3}}{1-\frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \frac{Q_{local}}{Q} = \frac{1-\frac{T_2}{T_3}}{1-\frac{T_2}{T_1}} \text{ ; A.N : } \frac{Q_{local}}{Q} = \frac{1-\frac{268}{533}}{1-\frac{268}{293}} \approx 5{,}83$$

4) Comparaison des deux dispositifs :

Les résultats de cette étude montrent que :

- ✓ Pour une différence de températures de la chaudière de 50°C (210→260), le deuxième dispositif apporte au local 12% de chaleur en plus.
- ✓ L'avantage du premier dispositif réside dans le fait de fournir au local la chaleur rejetée par le moteur.
- ✓ L'avantage du deuxième dispositif réside dans l'utilisation d'une chaudière à température plus élevée, ce qui a pour conséquence un meilleur rendement.

Pour tirer profit de la chaleur Q produite :

- ✓ La température de la chaudière doit être la plus élevée, donc le deuxième dispositif est le plus approprié.

Exercice: 4. Moteur Diesel.

1) Coordonnées des points B, C et D :

✓ Point B : A→B, transformation réversible adiabatique, $T_A\,V_A^{\gamma-1} = T_B\,V_B^{\gamma-1} \Rightarrow V_B = V_A.(\frac{T_A}{T_B})^{\frac{1}{\gamma-1}}$

A.N : $V_B = 0{,}16\ \ell$.

De même on a : $T_A^{\gamma} P_A^{1-\gamma} = T_B^{\gamma} P_B^{1-\gamma} \Rightarrow P_B = P_A.(\frac{T_A}{T_B})^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$; A.N : $P_B = 44{,}3\ atm$.

✓ Point C : B→C, transformation isobare, $P_C = P_B = 44{,}3\ atm$.

De plus, loi des gaz parfaits ; $P_B V_B = n\,R.T_B$ et $P_C V_C = n\,R.T_C \Rightarrow T_C = \frac{V_C}{V_B}.T_B$;

A.N : $T_C = 1431\ K$

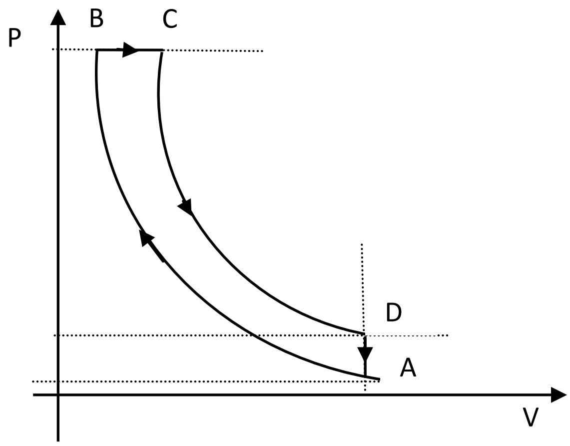
✓ Point D : C→D, transformation réversible adiabatique, $T_C\,V_C^{\gamma-1} = T_D\,V_D^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = T_C.(\frac{V_C}{V_D})^{\gamma-1}$;

A.N : $T_D = 569{,}7\ K$

De même on a : $P_C\,V_C^{\gamma} = P_D\,V_D^{\gamma} \Rightarrow P_D = P_C.(\frac{V_C}{V_D})^{\gamma}$; A.N : $P_D = 1{,}76\ atm$.

	A	B	C	D
P (atm.)	1,00	44,3	44,3	1,76
T (K)	323	954	1431	569,7
V (litre)	2,4	0,16	0,24	2,40

2) Allure du cycle décrit par le gaz dans le diagramme de Clapeyron :



3) Nombre n de moles du gaz :

$n = \frac{P_A V_A}{RT_A}; A.N: n = 8{,}94.10^{-2}\ mole$

Ou $n = \frac{P_D V_D}{RT_D}; A.N: n = 8{,}918.10^{-2}\ mole$

Soit $n \approx 8{,}9.10^{-2}\ mole$

4) Capacités thermiques :

$C_V = \frac{n.R}{\gamma-1}$; A.N : $C_V = 1{,}86\ J.K^{-1}$ et $C_P = \gamma.C_V$; AN : $C_P = 2{,}6\ J.K^{-1}$

5) Travaux et quantités de chaleurs échangés par le gaz au cours de chacune des transformations AB, BC, CD et DA.

✓ A→B, transformation réversible adiabatique : $Q_{AB} = 0$;
De plus $\Delta U_{AB} = W_{AB} = C_V.(T_B - T_A)$; A.N : $W_{AB} = 1{,}17\ kJ$.

✓ B→C, transformation isobare : $Q_{BC} = C_P.(T_C - T_B)$; A.N : $Q_{BC} = 1{,}24\ kJ$.
Et $W_{BC} = -P_B.(V_C - V_B)$; A.N : $W_{BC} = -0{,}35\ kJ$.

✓ C→D, transformation réversible adiabatique : $Q_{CD} = 0$
Et $\Delta U_{CD} = W_{CD} = C_V.(T_D - T_C)$; A.N : $W_{CD} = -1{,}6\ kJ$.

✓ D→A, transformation isochore : $W_{DA} = 0$
De plus $\Delta U_{DA} = Q_{DA} = C_V.(T_A - T_D)$; A.N : $Q_{DA} = -0{,}46\ kJ$.

6) Rendement thermodynamique ρ du moteur Diesel étudié.
Par définition : $\rho = -\frac{W_{cycle}}{Q_C}$; avec Q_C étant la quantité de chaleur reçue par le moteur. Dans notre cas $Q_C = Q_{BC} = 1{,}24\ kJ$. D'où :

$$\rho = -\frac{W_{cycle}}{Q_{BC}} = -\frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD}}{Q_{BC}} \;; \qquad \text{A.N} : \rho = 0{,}63 = 63\%$$

7) Rendement d'un moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes du cycle.

Les températures extrêmes du cycle sont T_A et T_C et par conséquent, le rendement de Carnot s'écrit :

$$\rho_{Carnot} = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 0{,}77 = 77\%$$

8) $\rho_{Carnot} > \rho_{Diesel}$, le moteur Diesel est mois performant que le moteur de Carnot car ce dernier est idéal car formé de transformations réversibles.

II- Potentiels thermodynamiques.

Exercice 5

Soit V_1 et S_1le volume et l'entropie du système $(\sum 1)$ et V_2 et S_2 le volume et l'entropie du système $(\sum 2)$. Les deux systèmes étant à l'équilibre le volume V et l'entropie S de l'ensemble sont constants. Sachant que $V = V_1 + V_2$ et que $S = S_1 + S_2$ (V et S étant des variables extensives), on a : $dV_1 = -dV_2 = dV$ et $dS_1 = -dS_2 = dS$

La variation d'énergie interne totale :

$$dU = dU_1 + dU_2 = T_1 dS_1 - P_1 dV_1 + T_2 dS_2 - P_2 dV_2$$

$$dU = T_1 dS_1 + T_2 dS_2 - P_1 dV_1 - P_2 dV_2$$

$$dU = (T_1 - T_2)dS - (P_1 - P_2)dV$$

Comme à l'équilibre, l'énergie interne est constante soit : $dU = 0$, ce qui implique que :

$$T_1 = T_2 \;\; et \; P_1 = P_2$$

Exercice 6

1) Pour une transformation infinitésimale réversible, en considérant T et P comme variables indépendantes on a: $dH = TdS + VdP = C_P dT + (h + V)dP$ et comme : $dH = (\frac{\partial H}{\partial T})_P dT + (\frac{\partial H}{\partial P})_T dP$,

On a donc : $c_P = (\frac{\partial H}{\partial T})_P$ (1) et $(h + V) = (\frac{\partial H}{\partial P})_T \Longrightarrow h = -V + (\frac{\partial H}{\partial P})_T$ (2).

De même, on a : $dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_P}{T} dT + \frac{h}{T} dP$, d'une part et d'autre part : $dS = (\frac{\partial S}{\partial T})_P dT + (\frac{\partial S}{\partial P})_T dP$

$\Rightarrow \frac{C_P}{T} = (\frac{\partial S}{\partial T})_P \Longrightarrow c_p = T(\frac{\partial S}{\partial T})_P$ (3) et $\frac{h}{T} = (\frac{\partial S}{\partial P})_T \Longrightarrow h = T(\frac{\partial S}{\partial P})_T$ (4).

2) On a : $G = H - TS \Longrightarrow \frac{G}{T} = \frac{H}{T} - S$ et $\left[\frac{\partial}{\partial T}(\frac{G}{T})\right]_P = -\frac{H}{T^2} + \frac{1}{T}(\frac{\partial H}{\partial T})_P - (\frac{\partial S}{\partial T})_P$ (5)

Or on a à la fois : $c_P = (\frac{\partial H}{\partial T})_P$ (1) et $c_P = T(\frac{\partial S}{\partial T})_P$ (3)

D'où la relation (5) s'écrit : $\left[\frac{\partial}{\partial T}(\frac{G}{T})\right]_P = -\frac{H}{T^2} + \frac{1}{T} c_P - \frac{c_P}{T} = -\frac{H}{T^2} \Longrightarrow H = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T}(\frac{G}{T})\right]_P$

Exercice 7

On sait que la différentielle de F est : $dF = -SdT - PdV$

L'équation d'état s'obtient à partir de P :

$P = -(\frac{\partial F}{\partial V})_T = -\frac{3}{2}.nR \times -\frac{2}{3}T.\frac{1}{V} = \frac{nR.T}{V}$, soit $PV = n.RT$

Et l'entropie : $S = -(\frac{\partial F}{\partial T})_V = -\frac{3}{2}nR\left[1 - ln\frac{T}{T_0} - 1 - \frac{2}{3}ln\frac{V}{V_0}\right] + S_0,$

Soit l'expression classique : $S = n\left[\frac{3}{2}Rln\frac{T}{T_0} + Rln\frac{V}{V_0}\right] + S_0,$

On en déduit U, ensuite par : $U = F + TS = \frac{3}{2}nR(T - T_0) + U_0$
