

**Université Hassan II Mohammedia
Faculté des Sciences Ben M'sik
Département de physique**

**Filières SMC
Module Physique 3**

Support

COURS et TD D'ELECTRICITE II

Pr: L.ELARROUM

**Département de physique
Laboratoire de Physique de la matière Condensée (L.P.M.C.)
(Unité de Recherche Associée au CNRST (URAC10)
Equipe physique d'agrégats et nano systèmes
Casablanca, Maroc
fax: (212) 0522707675 E-mail:lelarroum@yahoo.fr**

Année universitaire 2010/2011

Contenue :

A- Cours d'électricité II

B- Enoncés des TD.

A- Cours d'électricité II

PROGRAMME:

- **CH I : Magnétostatique du vide;**
- **CH II : Courant continu et alternatif;**
- **CH III : Les équations de Maxwell dans le vide;**
- **CH IV : Les ondes électromagnétiques dans le vide.**

Bibliographie:

- 1) a) FEYMAN (Electromagnétisme 1);
 b) FEYMAN (Electromagnétisme 2);

- 2) M.Berlin, J.P.Faroux et J.Renault: Electromagnétisme 3 (Deux livres):
 1^{ier} livre : Magnétostatique, induction, équation de Maxwell.....
 2^{ieme} livre : Équations de Maxwell et relativité;

- 3) Exercices: a) J. Renault: Electromagnétisme 2
 b) Michel Hulin: Electromagnétisme

- 4) Internet (Cours et TD):

Choisir un moteur de recherche (Google par ex) puis donner un mot clef (Par exemple : Electromagnétisme cours, magnétostatique cours.....).

Exemple de site :

<http://economie.u-bourgogne.fr/elearning/ressources-elearning.html>

CHI: Magnétostatique du vide

I-1- Introduction:

a- Définition et historique:

L'électrostatique est l'étude de l'interaction entre les charges électriques immobiles et de ses effets.

L'étude des phénomènes magnétiques (Magnétisme) est l'étude de l'interaction entre les charges électriques en mouvement et de ses effets.

La Magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques indépendants du temps.

Le magnétisme est une branche de la physique dont les origines remontent au moment où on a observé des roches (magnétite) attirant la limaille de Fer. Cette pierre se trouvait en Magnésie (nom d'une ville d'Asie Mineure: actuellement Turquie), Ainsi le mot Magnétisme dérive de Magnésie.

L'électricité est une branche de la physique dont les origines remontent à l'observation de l'attraction de brindilles de paille par l'ambre jaune frotté (600 ans Av J.C : Thalès et Miller).

Ces deux branches étaient séparées jusqu'en 1820, année où Christian Oersted (1777-1831), observe une interaction entre elle. Depuis lors une nouvelle branche de la physique (Electromagnétisme) ne cesse pas de se développer par des recherches de Michael Faraday (1791-1867).

James Clerck Maxwell (1831-1879) a modélisé l'électromagnétisme. Ses équations constituent des lois fondamentales de l'électromagnétisme qui permettent d'expliquer les principes de tous les gros appareils optiques et électromagnétiques (Moteur électrique, la radio, la télévision, le radar hyperfréquence, le microscope et le télescope).....

b -Les effets magnétiques sont à distance:

L'expérience montre que les effets magnétiques procèdent d'une interaction à distance:
- L'expérience d'OERSTEAD (1820) par exemple a mis en évidence l'effet d'un courant électrique sur un aimant: il s'agit d'un fil conducteur placé au-dessus et parallèlement à une aiguille aimantée posée sur un pivot; Lorsque le fil est parcouru par un courant électrique, l'aiguille s'oriente perpendiculairement au fil et le sens de l'orientation change avec celui du courant (fig1):

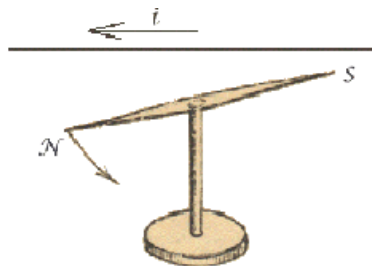


fig1 : Expérience d'Oersted

D'autres expériences ont mis en évidence l'action d'un aimant (d'un champ magnétique) sur un courant:

Le conducteur mobile parcouru par un courant I, placé au voisinage d'un aimant, se déplace à droite ou à gauche suivant le sens de I (fig2).

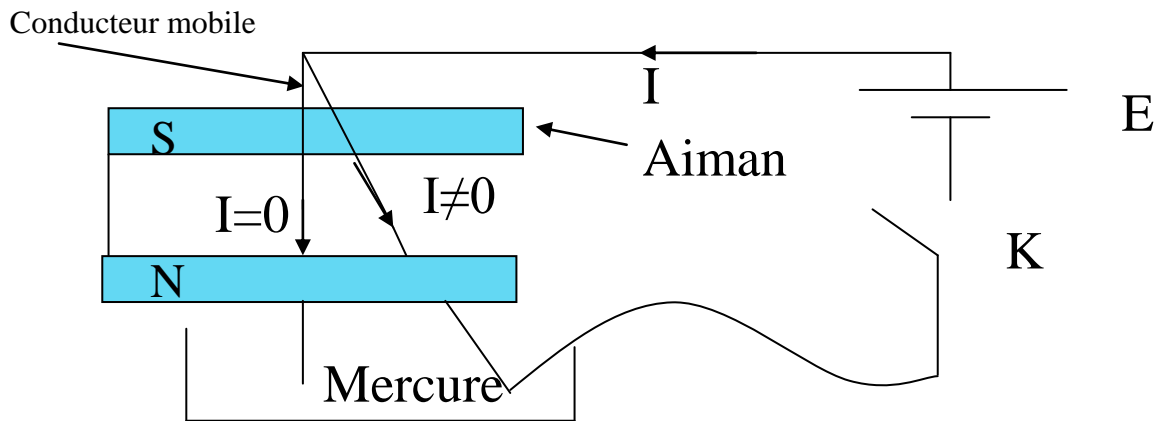


Fig2

Comme en électrostatique, les effets magnétiques peuvent être décrits, dans la région où ils se manifestent, à l'aide d'une grandeur (Champs magnétique), fonction de l'endroit choisi Indépendamment de sa source.

I-2- Champs magnétique crée par une charge électrique ponctuelle en mouvement:

L'expérience montre qu'une charge q animée d'une vitesse \vec{V} crée en tout point M(r) de l'espace un champs magnétique:

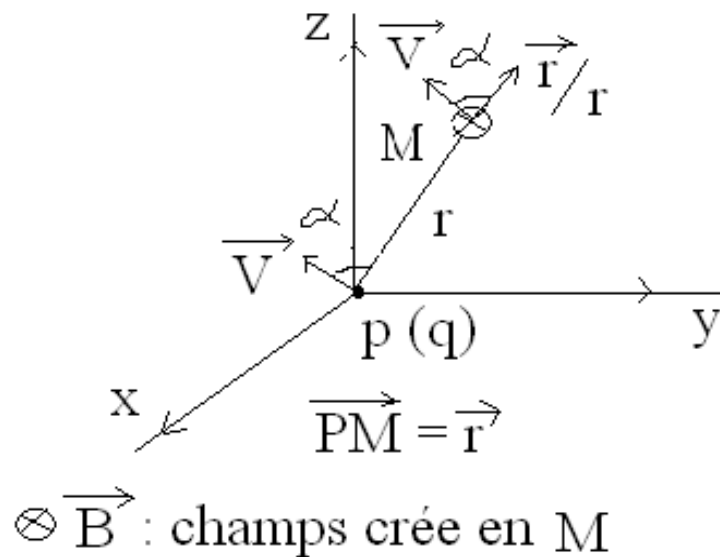
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Où $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$ H/m : perméabilité magnétique du vide :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ (S.I)}$$

Le module de \vec{B} est $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qV \sin \alpha}{r^2}$ avec $\alpha = (\vec{V}, \vec{r})$

Son sens est tel que $(\vec{B}, \vec{V}, \vec{r})$ forment un trièdre direct:



L'unité de B en (S.I) est Tesla (T) . Dans le système CGS c'est le Gauss (G):
 $1\text{G}=10^{-4}\text{ T}$.

À partir du flux ($d\phi=Bds$), on définit l'unité de B : Weber/m² (Wbm⁻²).

Ordre de grandeur de quelques champs magnétiques:

-Champs magnétique terrestre:

Composante Horizontale $\approx 0.2\text{ G} = 2 \cdot 10^{-5}\text{ T}$
 Composante verticale $\approx 0.4\text{ G} = 4 \cdot 10^{-5}\text{ T}$

-Electro-aimant dans l'entrefer: 0.1 à 2 T.

- Bobine supraconductrice: 5 à50 T.

I.3-Action d'un champs magnétique sur une charge en mouvement:

a) Loi de la place:

Une charge ponctuelle q en mouvement avec une vitesse \vec{V} dans un champ magnétique \vec{B} est soumise entre autre à une force magnétique:

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

b) Force électromagnétique entre deux charges ponctuelles en mouvement:

Une charge électrique q_1 en mouvement crée en tout point de l'espace un champ électromagnétique (\vec{E}_1, \vec{B}_1) :

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{r}}{r^3}; \quad \vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{V}_1 \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Elle exerce alors sur une autre charge q_2 en mouvement avec une Vitesse \vec{V}_2 :

- Une force électrostatique (q_2 supposée fixe)

$$(\vec{F}_{12})_e = q_2 \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

- Et une force magnétique (de Laplace: q_2 est en mouvement dans \vec{B}_1):

$$(\vec{F}_{12})_m = q_2 \vec{V}_2 \wedge \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \vec{V}_2 \wedge \frac{(q_1 \vec{V}_1 \wedge \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

Cette force est nulle : $(F_{12})_m = 0$

Si q_2 est fixe soit $V_2 = 0$,

Ou q_1 est fixe soit $V_1 = 0$ C.à.d $B_1=0$,

Ou $\vec{V}_2 // \vec{B}_1$ en effet dans ce cas on a $\vec{V}_2 \wedge \vec{B}_1 = 0$

D'après le principe de superposition,

la force globale que q_1 exerce sur q_2 (Force de Lorentz) est:

$$\vec{F}_{12} = q_2 (\vec{E}_1 + \vec{V}_2 \wedge \vec{B}_1)$$

Remarques:

- 1) Les forces électrostatiques obéissent au principe de l'action et de la réaction:

$$\left. \begin{aligned} (\vec{F}_{12})_e &= q_2 \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \\ (\vec{F}_{21})_e &= q_1 \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1 \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \end{aligned} \right\} (\vec{F}_{12})_e = -(\vec{F}_{21})_e$$

2) En générale les forces magnétiques n'obéissent pas au principe de l'action et réaction (à cause des produits vectoriels), sauf dans le cas ou $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ (sens, module et direction) .

3) De manière générale, si une particule q de vitesse V est soumise à un champs électromagnétique (\vec{E}_1, \vec{B}_1) , quelque soit sa source, alors cette particule est soumise à la force de Lorentz

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right]$$

I-4- Loi de Biot et Savart:

a) Champ magnétique crée par des courants stationnaires caractérisé par la densité J:

Le vecteur densité de courant est $\mathbf{J} = \rho_m \mathbf{V}$

Ou ρ_m est la densité volumique des charges en mouvement avec une vitesse moyenne V. $\rho_m \neq \rho$. ρ étant la densité volumique totale qui est égale le plus souvent à zéro.

Le courant électrique à travers une surface est la charge électrique totale qui la traverse par unité de temps.

Si on suppose que toutes les charges mobiles se déplacent avec une vitesse moyenne V alors les charges qui traversent ΔS pendant un temps Δt sont ceux contenues dans le volume $d\tau$ du cylindre de base ΔS et de génératrice $V \Delta t$ (fig3):

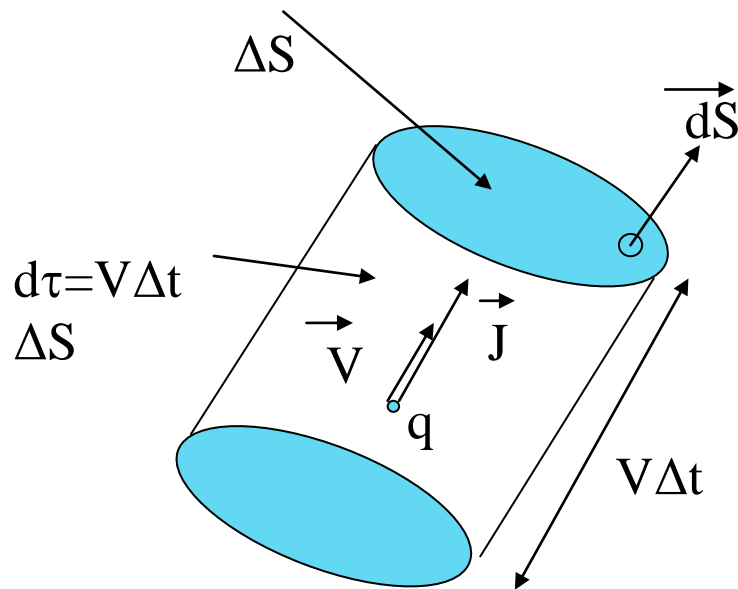
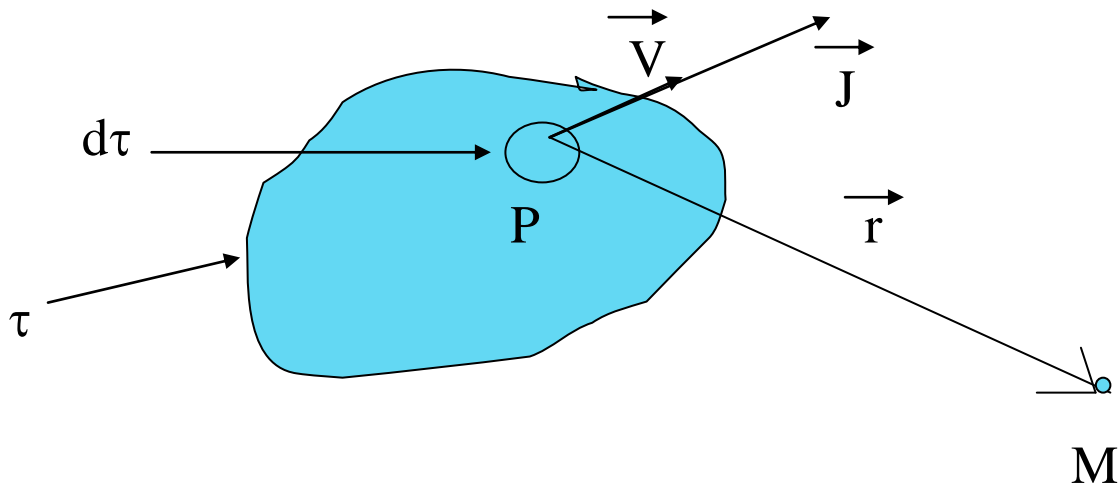


fig3

On appelle régime permanent ou stationnaire, les situations où les répartitions de charges et les courants sont indépendants du temps.

On obtient des courants permanents à l'aide des générateurs qui obligent les charges à circuler.

Soit une distribution volumique de charges en mouvement avec la vitesse \vec{V} , une charge élémentaire $dq = \rho d\tau$ peut être considérée comme une charge ponctuelle mobile avec la vitesse \vec{V}



dq crée alors en un point M un champs magnétique:

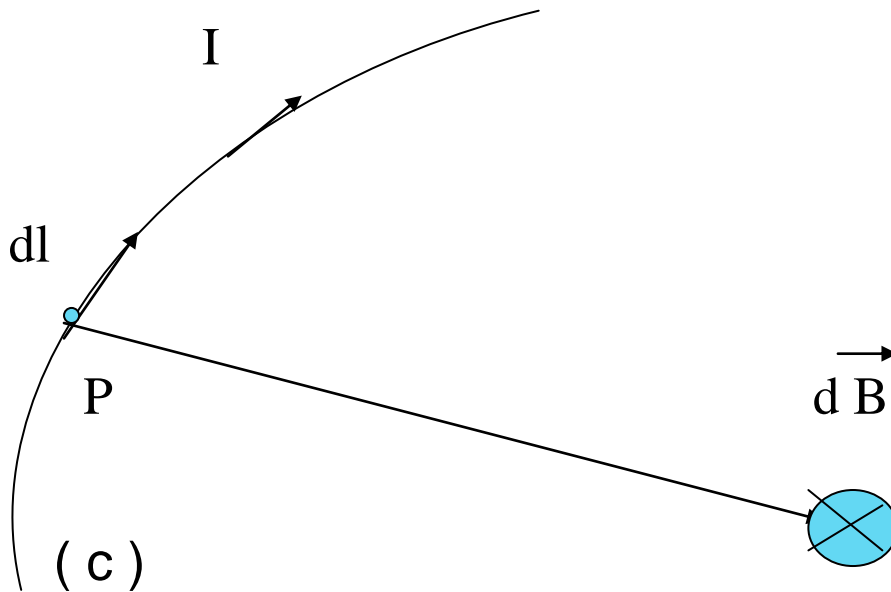
$$\begin{aligned} \vec{dB} &= \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \rho_m \frac{\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau \end{aligned}$$

Le champs magnétique crée par toutes les charges contenues dans le volume τ est:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$$

b) Cas d'un circuit filiforme:

Un fil conducteur a des dimensions transversales négligeables: $d\tau = dl$



dl à le même sens que I

$$\begin{aligned} \vec{dB} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dl \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \rho_m \frac{\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq}{dl} \frac{\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} dl \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq}{dl} \frac{d\vec{l}}{dt} \frac{\wedge \vec{r}}{r^3} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

en effet $d\tau = dl$ (fil) et $\rho_m = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dl}$

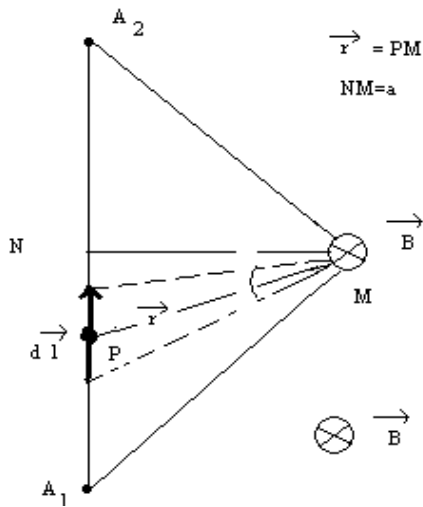
Le champs magnétique crée par le fil conducteur (c) est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(c)} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$(\vec{B}, d\vec{l}, \vec{r})$, forme un trièdre direct.

C- Application à un fil rectiligne:

.Fil de longueur fini:



$$\theta = (\text{NPM}), \alpha = (\text{NMP}), \alpha_1 = (\text{NMA}_1), \alpha_2 = (\text{NMA}_2)$$

Un élément dl en un point P du fil crée en tout point M un champs magnétique élémentaire:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Perpendiculaire au plan (\vec{dl}, \vec{r}) dont le sens est donné par la règle du tire bouchon de Maxwell :

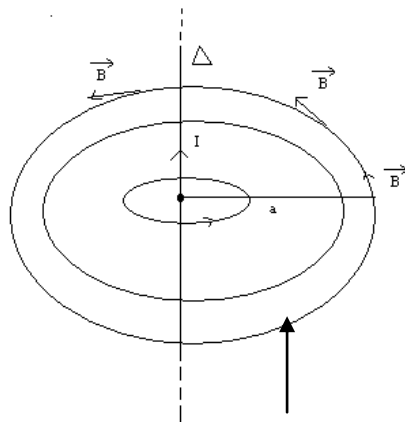
« Le Bouchon progresse dans le sens du courant, par rotation par la main droite dans le sens des lignes de champs »

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{a};$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1]$$

Fil rectiligne indéfinie

Pour un fil indéfini on a :



$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$$

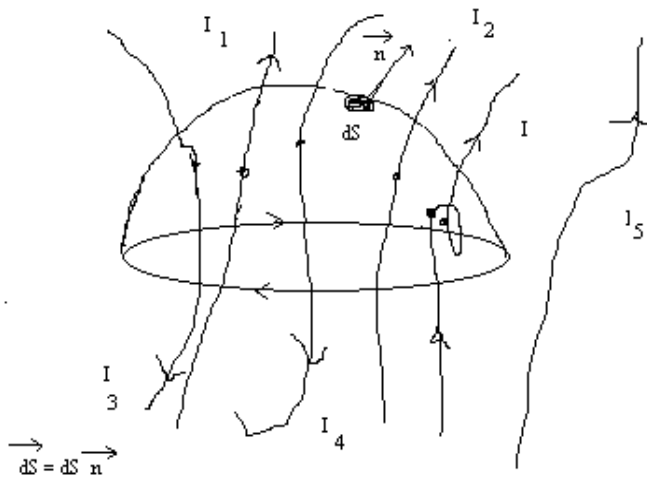
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Les lignes de champs sont des cercles d'axe Δ

I-5- Théorème d'ampère:

« La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée Γ est égale au produit de μ_0 par la somme algébrique des courants I_i qui traversent toute surface S s'appuyant sur Γ »

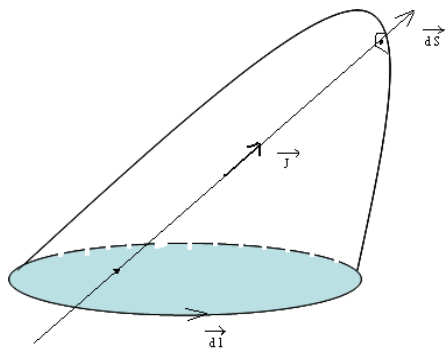
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + 2I_6]$$

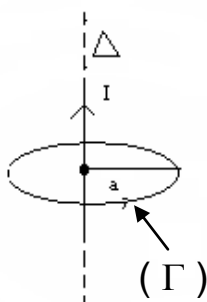
Un courant $I_i > 0$ s'il a le même sens que n . $I_i < 0$ s'il est de sens contraire à n . I_5 ne traverse pas la surface S choisit s'appuyant sur (Γ) .

Dans le cas d'une distribution volumique de courant de densité \vec{J} :



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Application: fil rectiligne indéfinie



$$\zeta = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi a \text{ en effet } \vec{B} \parallel d\vec{l}$$

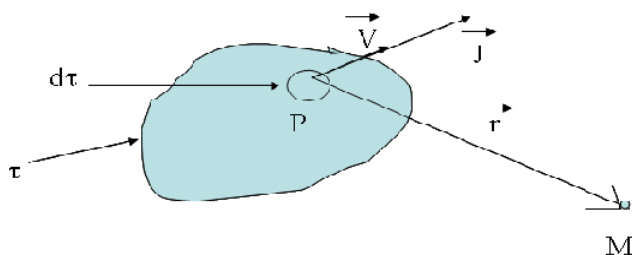
$$B 2\pi a = \mu_0 I \text{ (théorème d' Ampère)}$$

$$\text{Soit } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

I-6-Potentiel vecteur du champs magnétique:

a) définition:

On a vu que pour une distribution volumique de courant caractérisée par une densité \vec{J}



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$$

$$\text{or } \vec{\frac{1}{r}} = -\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \vec{j} \wedge \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{J} d\tau$$

$$\text{Rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{Rot} (\vec{J}) + \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{J}$$

\vec{j} ne dépend que des coordonnées de P, les dérivations se font par rapport aux coordonnées de M. Donc

$$\text{Rot} (\vec{J}) = \vec{0}$$

Dou

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \text{Rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) d\tau$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \overrightarrow{Rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) d\tau \\ &= \overrightarrow{Rot} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J}}{r} d\tau \right] \\ \vec{B} &= \overrightarrow{Rot} (\vec{A}) \text{ avec } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J}}{r} d\tau \\ \vec{A} &\text{ est le potentiel vecteur magnétique.}\end{aligned}$$

b) Cas particulier:

* Pour une charge ponctuelle q animée d'une vitesse \vec{V} : $\vec{j} = \frac{dq}{d\tau} \vec{V}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{dq}{d\tau} \frac{\vec{V}}{r} d\tau = \frac{\mu_0 q \vec{V}}{4\pi r}$$

* Pour un courant filiforme: $\vec{j} = \frac{I d\vec{l}}{d\tau}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}}{r}$$

En magnétisme le potentiel vecteur \vec{A} joue un rôle analogue à celui du potentiel scalaire en électrostatique.

I-7- Action des champs magnétiques sur les courants:

I-7-1-Cas d'un circuit électrique placé dans un champs

a) Charge volumique de densité \vec{j} placée dans un champ magnétique \vec{B} :

Chaque élément de charge dq se déplaçant à vitesse \vec{V} est soumis à une force

$$d\vec{F} = dq \vec{V} \wedge \vec{B} = \frac{dq}{d\tau} d\tau \vec{V} \wedge \vec{B} = d\tau \vec{J} \wedge \vec{B}$$

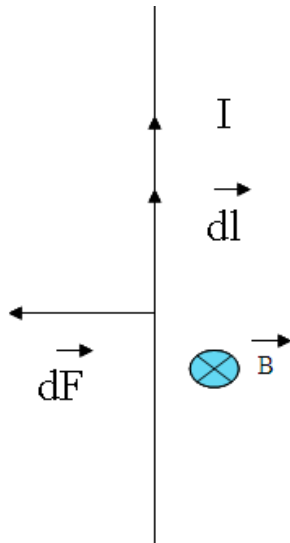
La densité volumique de force est

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{J} \wedge \vec{B}$$

Le sens et la direction de $\frac{d\vec{F}}{d\tau}$ sont donnés par la règle de la main droite :

\vec{j} (Courant) : pouce
 \vec{B} (Champs) : Indexe
 $\frac{d\vec{F}}{d\tau}$ (Force) : Majeur

b) Conducteur filiforme:



Chaque élément $d\vec{l}$ contient une charge dq qui se déplace à vitesse \vec{V} et qui est soumise à une force:

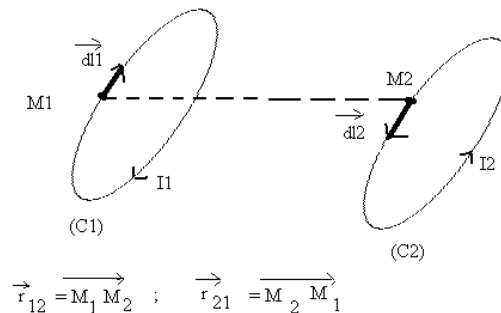
$$d\vec{F} = dq\vec{V} \wedge \vec{B} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} \wedge \vec{B} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Le fil tout entier est soumis à une force:

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

I-7-2 Interaction de deux circuits:

Soient deux circuits (C_1) et (C_2) parcourus respectivement par des courants I_1 et I_2



En un point M_2 de (C_2) chaque élément $d\vec{l}_1$ de (C_1) crée un champs magnétique

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Il exerce alors sur (C_2) une force élémentaire:

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F}_{12} &= I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 d\vec{l}_2 \wedge \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \end{aligned}$$

De même, en un point M_1 de (C_1) chaque élément \vec{dl}_2 de (C_2) crée un champs magnétique :

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\vec{dl}_2 \wedge \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

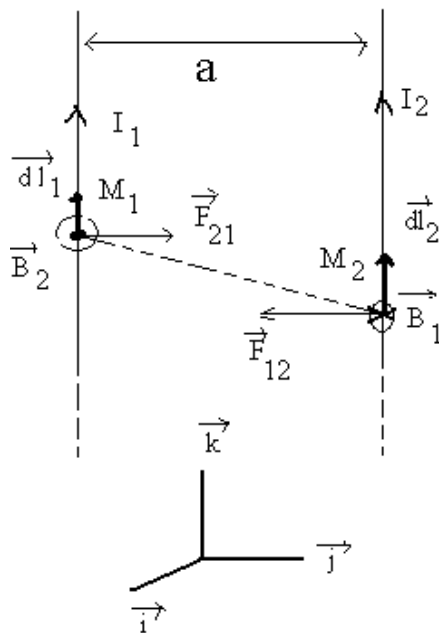
Il exerce alors sur (C_1) une force élémentaire:

$$\begin{aligned} d^2\vec{F}_{21} &= I_1 \vec{dl}_1 \wedge \vec{B}_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \vec{dl}_1 \wedge \frac{\vec{dl}_2 \wedge \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \\ \vec{d^2F}_{21} &\neq \vec{d^2F}_{12} \end{aligned}$$

Donc pour les forces magnétiques, le principe de l'action et de la réaction n'est pas satisfait à l'échelle élémentaire.

Mais dans le cas de courants continus (régimes stationnaires) les actions totales entre circuits fermés obéissent à l'égalité de l'action et de la réaction (ce qui est vérifié expérimentalement).

I-7-3- Action mutuelle de deux circuits rectilignes indéfinis:



En M_1 , I_2 crée le champ \vec{B}_2 :

$$\vec{B}_2 = B_2 \vec{i} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \vec{i}$$

En M_2 , I_1 crée le champ \vec{B}_1 :

$$\vec{B}_1 = -B_1 \vec{i} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{i}$$

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} (-\vec{i}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} d\vec{l}_2 \vec{j}$$

$$d\vec{F}_{21} = I_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2 = I_1 d\vec{l}_1 \wedge \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \vec{i} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} d\vec{l}_1 \vec{j}$$

$$\frac{dF_{12}}{dl_2} = \frac{dF_{21}}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (\text{force par unité de longueur})$$

Si I_1 et I_2 sont de même sens, il y a attraction ; Si I_1 et I_2 sont de sens contraire, il y a répulsion.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$; si $I_1 = I_2 = 1\text{A}$ et $a = 1\text{m}$ alors $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$. Ces valeurs ont servi à vérifier l'unité de l'intensité (L'ampère: A)

I-8-Travail des forces électromagnétiques:

a) Champ propre et champ appliqué:

Tout élément $d\vec{l}$ d'un conducteur (C) parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique appliqué \vec{B}_a est soumis à:

* Une force provenant de l'action du champ extérieur (appliqué):

$$d\vec{F}_a = I d\vec{l} \wedge \vec{B}_a$$

* Une force provenant de l'action du champ propre \vec{B}_p , créée par tous les éléments du circuit autre que $d\vec{l}$:

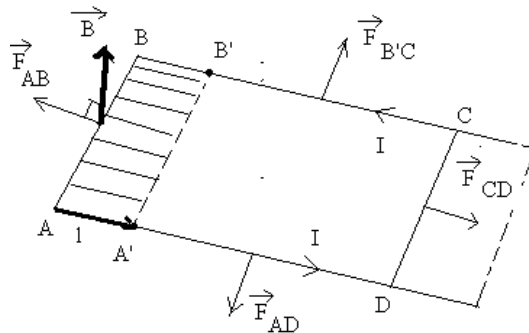
$$d\vec{F}_p = I d\vec{l} \wedge \vec{B}_p$$

b) Travail mécanique des forces de Laplace et flux coupé:

Pour un circuit rigide (indéformable), le travail des forces intérieurs est nul ($T_i=0$) alors que celui des forces extérieurs est non nul ($T_a \neq 0$).

Exemple1: déplacement d'un cadre rectangulaire:

Soit un circuit filiforme rectangulaire (ABCD), parcouru par un courant I et situé dans un champ magnétique \vec{B} inhomogène, perpendiculaire au plan ABCD. Supposons que $B=0$ là où se trouve CD et non nul et uniforme à l'autre extrémité. Translatons le cadre de AA' parallèlement aux côtés BC et AD:(figure) :



Bilan des forces de Laplace:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{AB} &= I \vec{BA} \wedge \vec{B}; & \vec{F}_{AB} &\parallel \vec{AA}' \\ \vec{F}_{BC} &= I \vec{CB} \wedge \vec{B}; & \vec{F}_{BC} &\perp \vec{AA}' \\ \vec{F}_{AD} &= I \vec{AD} \wedge \vec{B}; & \vec{F}_{AD} &\perp \vec{AA}' \\ \vec{F}_{CD} &= I \vec{DC} \wedge \vec{B}; & \vec{F}_{DC} &\parallel \vec{AA}'; \vec{F}_{DC} = \vec{0} \text{ car } \vec{B} = \vec{0} \text{ (par hypothèse)} \end{aligned}$$

Le travail des forces de Laplace se réduit à celui de \vec{F}_{AB} soit:

$$\begin{aligned} T &= -\vec{F}_{AB} \cdot \vec{AA}' \quad (\text{il s'oppose au déplacement}) \\ &= -I(\vec{BA} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{AA}' = I(\vec{AB} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{AA}' \\ &= I(\vec{AA}' \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{B} = I l * a * B \quad (\text{AA}'=l \text{ et } AB=a) \end{aligned}$$

$l \cdot a$ est la surface balayée par AB et $l \cdot a \cdot B$ est le flux de B à travers cette surface. Ce flux $\phi_c = a \cdot l \cdot B$ est appelé flux coupé par AB lors de son déplacement

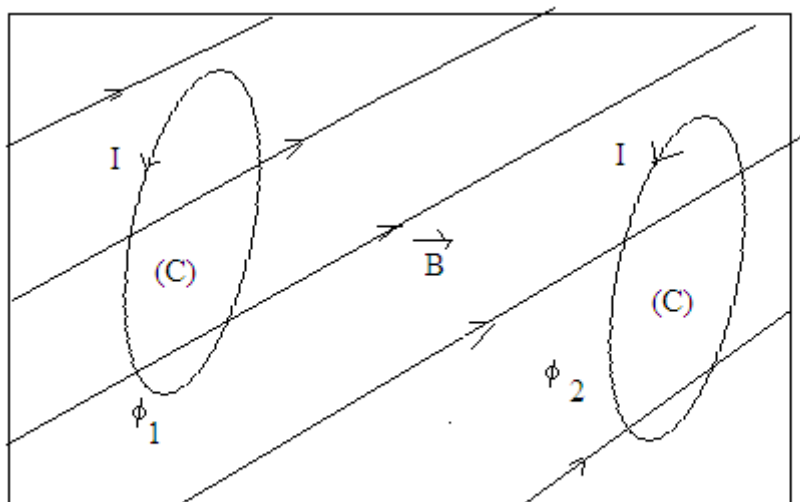
$$T = I\Phi_C$$

Φ_c : Flux coupé c.à.d le flux de \vec{B} à travers la surface balayée par le circuit.

C) Théorème de Maxwell:

« Le travail des forces de Laplace au cours du déplacement d'un circuit (C) indéformable parcouru par un courant constant d'intensité I et placé dans un champ magnétique \vec{B} est égale au produit de I par la variation $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ du flux de \vec{B} à travers le contour constitué par (C) »

$$T = I\Delta\Phi$$

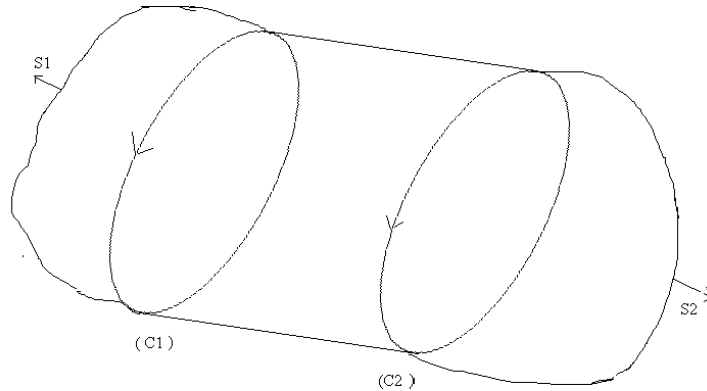


$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

(Φ_2 est le flux de \vec{B} à travers (C) dans sa position finale et Φ_1 est le flux de \vec{B} à travers (C) dans sa position initiale)

Démonstration:

Considérons les surfaces S1 et S2 s'appuyant sur les positions (C1) et (C2) du départ et d'arrivée du circuit (C). Lors de son déplacement (C) engendre une surface coupée Sc orientée par continuité vers S1: S1+Sc+S2 constitue une surface fermée (S)



$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iiint_t \text{div}(\vec{B}) d\tau = 0 \quad (\vec{B} \text{ est à flux conservatif: } \text{div}(\vec{B}) = \text{div}(\text{Rot}(\vec{A})) = \vec{0})$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_c - \Phi_2 = 0 \Rightarrow \Phi_c = \Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$$

$$\text{D'où} \quad T = I\Phi_c = I\Delta\Phi$$

Conséquence:

Le travail des forces magnétiques ne dépend pas du chemin suivi, donc ces forces dérivent d'une énergie potentielle U:

$$\vec{F} = -\text{grad}U$$

$$T = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\text{grad}U \cdot d\vec{l} = -dU \text{ soit } T = -\Delta U$$

$$T = I\Delta\Phi = -\Delta U \Rightarrow \Delta U = -I\Delta\Phi$$

L'énergie potentielle d'interaction relative à une position d'un circuit (C) est $U = -I\Phi$; Φ étant le flux de \vec{B} à travers (C) dans cette position. Donc connaissant Φ dans une position, on peut déduire U. cela nécessite le choix de l'origine des énergies électromagnétiques, c.à.d que U n'est déterminée qu'à une constante arbitraire près.

Remarque:

Pendant un déplacement infinitésimal réversible de (C), l'opérateur fournit un travail dW opposé au travail dT des forces de Laplace:

$$dU = dW = -dT$$

Règle du flux maximal:

Si on relâche le circuit , il se déplacera sous l'effet des forces de Laplace qui fourniront alors un travail dT positif:

$$dT = -dU = Id\Phi \Rightarrow d\Phi > 0$$

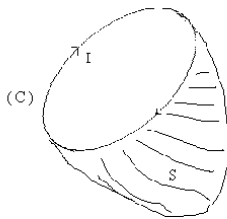
Le circuit se déplace de façon à ce que le flux de B à travers (C) soit maximal.

I-9-Inductance propre d'un circuit et inductance mutuelle de deux circuits (Coefficient d'auto-induction):

I-9-1-induction propre:

a)définition:

Soit un circuit (C) parcouru par un courant I, le flux propre Φ_p est le flux du champ magnétique propre \vec{B}_p de (C) à travers la surface s'appuyant sur (C). Le champ \vec{B}_p étant proportionnel à I , de même le flux est proportionnel à I.



$$\vec{B}_p \sim I \Rightarrow \Phi_p \sim I$$

$$\Phi_p = LI$$

Le coefficient L s'appelle le coefficient d'auto induction ou inductance propre.. L ne dépend que des caractéristiques géométrique de (C), son unité est le Henry: [L]=H

b) exemples:

Cas d'un solénoïde indéfini de section S constitué de n spires par unité de longueur:

$$n = N/l$$

N: nombre de spires

l: longueur du solénoïde (l très grand (infini))

$$B_p = n\mu_0 I ; \text{ Son flux à travers une spire est } \Phi_1 = SB_p = Sn\mu_0 I$$

Le flux total est $\Phi_p = N\Phi_1 = NI\Phi_1$

$$\Phi_p = nl(Sn\mu_0 I) = Sn^2 l\mu_0 I$$

$$\Phi_p = LI$$

$$L = \mu_0 n^2 lS$$

I-9-2 Induction mutuelle de deux circuits:

Soient (C_1) et (C_2) deux circuits parcouru respectivement par I_1 et I_2

* I_1 crée un champ $B_1 \sim I_1$

Le flux de B_1 à travers C_2 est

$$\Phi_{12} = B_1 S_2 = M_{21} I_1$$

Le flux propre est

$$\Phi_{11} = L_1 I_1$$

* I_2 crée un champ $B_2 \sim I_2$

Le flux de B_2 à travers C_1 est

$$\Phi_{21} = B_2 S_1 = M_{12} I_2$$

Le flux propre est

$$\Phi_{22} = L_2 I_2$$

* Le flux à travers C_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

* Le flux à travers C_2 :

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

Remarques:

- a) Les inductances entre C_1 et C_2 ne dépendent que de leur position respective,
On démontre que $M_{12} = M_{21} = M$ appelée inductance mutuelle entre les deux circuits

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

Soit sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

b) Pour n circuits:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & \cdot & \cdot & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & \cdot & \cdot & M_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdot & \cdot & L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$$

Matrice inductance

C)

* L'énergie potentielle d'interaction de deux circuits est donnée par:

$$\begin{aligned}U &= -I_1 \Phi_{21} = -I_2 \Phi_{12} \\ &= -I_1 M_{12} I_2 = -I_2 M_{21} I_1\end{aligned}$$

$$U = - M_{12} I_1 I_2$$

* Généralisation à plusieurs circuits:

A travers C_i le flux envoyé par les autres circuits C_j ($j \neq i$)

est : $\Phi_i = \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j$; M_{ij} : coefficient d'induction mutuelle entre C_i et C_j .

Pour des courants permanents, l'énergie potentielle d'interaction de l'ensemble des circuits est obtenue par sommation des interaction deux à deux soit:

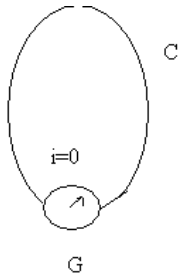
$$U = -\frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} M_{ij} I_i I_j$$

I-10- Phénomène d'induction électromagnétique:

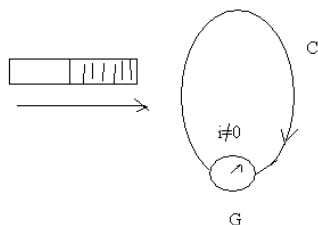
I-10-1- Étude expérimentale:

Le phénomène d'induction électromagnétique a été mis en évidence depuis 1831 par Faraday:

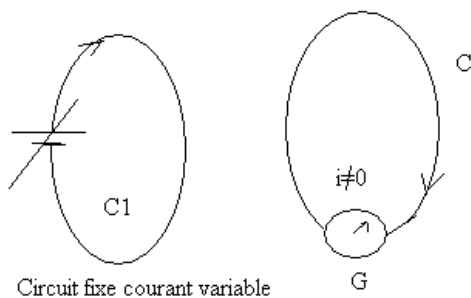
Soit (C) un circuit fermé ne contenant pas de générateur muni d'un galvanomètre:



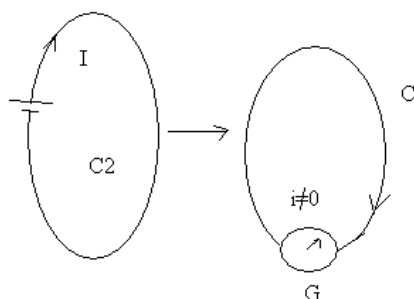
- Lorsque (C) est seul, le galvanomètre n'indique pas la présence d'un courant.



- Lorsqu'on déplace un aimant à côté de (C) le galvanomètre détecte un courant induit i traversant (C).



- De même en présence d'un circuit C_1 parcouru par un courant variable, le galvanomètre indique la présence d'un courant induit i .



- Le déplacement d'un circuit C_2 parcouru par un courant fixe I_2 à côté de C, engendre un courant induit i qui traverse C.

Le circuit **C** est l'**induit** (dans lequel est créée une f.e.m d'induction).

L'aimant, C_1 et C_2 sont les **inducteurs**.

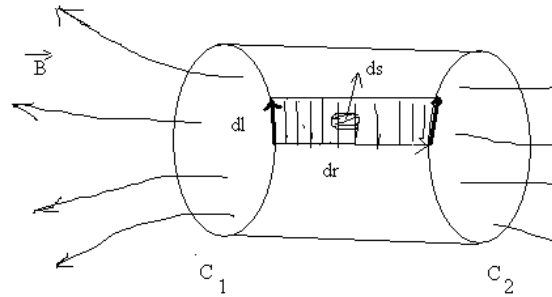
Explication: Les inducteurs créent un champ magnétique et les variations du flux de ce champ à travers C sont à l'origine de cette f.e.m

I-10-2-Interprétation théorique:

Dans tous les cas on définit un champ électromoteur d'induction \vec{E}_m (champ électrique) tel que la f.e.m d'induction est la circulation de \vec{E}_m :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_m d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{Rot} \vec{E}_m ds \quad (\text{stokes}) \quad S : \text{surface s'appuyant sur } C$$

Considérant un induit mobile par rapport à un observateur lié à l'inducteur fixe:



Tout se passe comme étant un circuit C se déplaçant d'une position C_1 à une position C_2 dans un champ B. Une charge dq portée par dl est entraînée avec la vitesse $V=dr/dt$ dans B invariable. Elle est soumise alors à la force de Laplace:

$$d\vec{F} = dq \vec{V} \wedge \vec{B} = dq \vec{E}_m$$

avec $\vec{E}_m = \vec{V} \wedge \vec{B}$ (champ électromoteur d'induction)

Ainsi dans le cas de déplacement de C dans B, la force électromotrice induite est la circulation de E_m :

$$\begin{aligned} e &= \oint_C \vec{E}_m d\vec{l} = \oint_C (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\vec{l} = \oint_C \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} \right) d\vec{l} \\ &= \oint_C \left(d\vec{l} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \vec{B} = - \oint_C \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge d\vec{l} \right) \vec{B} = - \oint_C \frac{d^2 S}{dt} \vec{B} \\ d^2 S \vec{B} &= d^2 \Phi_C \Rightarrow e = - \oint_C \frac{d^2 \Phi_C}{dt} = - \frac{d\Phi_C}{dt} \end{aligned}$$

$$e = - \frac{d\Phi_C}{dt}$$

$d\Phi_C$: Variation de flux d'induction à travers le circuit (flux coupé)

I-10-3 Lois de l'induction:

a) Loi de Faraday: Lorsqu'un circuit (C) est traversé par un flux $\Phi(t)$ qui varie dans le temps, quelque soit la cause de cette variation, il est soumis à une force électromotrice induite:

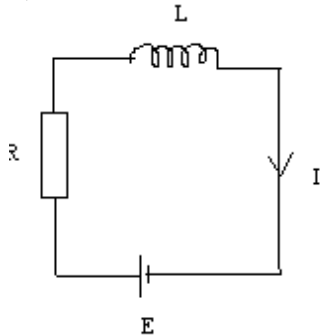
$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

b) Loi de Lenz:

Le sens du courant induit est tel que par ses effets électromagnétiques, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

I-10-4 Énergie électromagnétique:

a) Circuit filiforme unique:



$$E = RI - e = RI + \frac{d\Phi}{dt} = RI + \frac{d}{dt}(LI) = RI + L\frac{dI}{dt}$$

$$\int_0^t E I dt = \int_0^t R I^2 dt + \int_0^I L I dI$$

Energie fournie = Energie dissipée + énergie électromagnétique
par le generateur par effet joule (Wem) emmagasiné e dans L

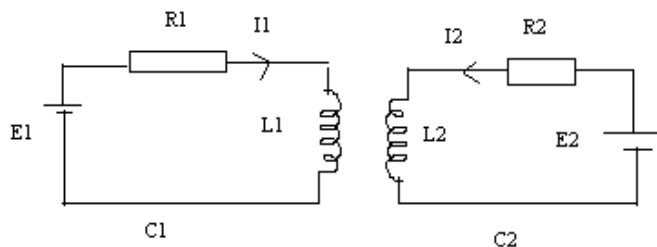
$$W_{em} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Phi$$

W_{em} : énergie électromagnétique emmagasinée par la bobine.

La self (L) est un réservoir d'énergie c.à.d qu'elle absorbe une partie de l'énergie du générateur. S'il y'a baisse de tension, la self restitue, conformément à la loi de Lenz, une partie de cette énergie pour lutter contre la baisse.

b) Cas de deux circuits filiformes:

Soient deux circuits (C₁), (C₂) de résistances R₁ et R₂, d'inductances L₁ et L₂ et de f.e.m E₁ et E₂, tel que à t=0, I₁=I₂=0.



$$E_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

$$E_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

L'énergie fournie par E_1 pendant dt est:

$$dW_1 = E_1 I_1 dt = R_1 I_1^2 dt + L_1 I_1 dI_1 + M I_1 dI_2$$

L'énergie fournie par E_2 pendant dt est:

$$dW_2 = E_2 I_2 dt = R_2 I_2^2 dt + L_2 I_2 dI_2 + M I_2 dI_1$$

L'énergie électromagnétique totale (W_m) :

$$\begin{aligned} dW_m &= L_1 I_1 dI_1 + M I_1 dI_2 + L_2 I_2 dI_2 + M I_2 dI_1 \\ &= \frac{1}{2} d[L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2M I_1 I_2] \end{aligned}$$

Dou

$$W_m = \frac{1}{2} [L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2M I_1 I_2]$$

En fonction du flux:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

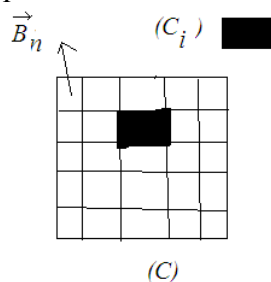
Pour deux circuits:

$$W_m = \frac{1}{2} (\Phi_1 I_1 + \Phi_2 I_2)$$

Pour n circuits:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi_i I_i$$

L'énergie électromagnétique dans le cas de circuit non filiforme:



$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2} \int_i I B_i ds = \frac{1}{2} I \int_{is} (\text{Rot } \vec{A}) ds \\ &= \frac{1}{2} \iint_s \vec{J} ds \oint_{\Gamma} \vec{A} dl = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \vec{A} \vec{J} dt \end{aligned}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \vec{A} \cdot \vec{J} d\tau$$

\vec{J} : Densité de courant volumique.

\vec{A} : Potentiel vecteur.

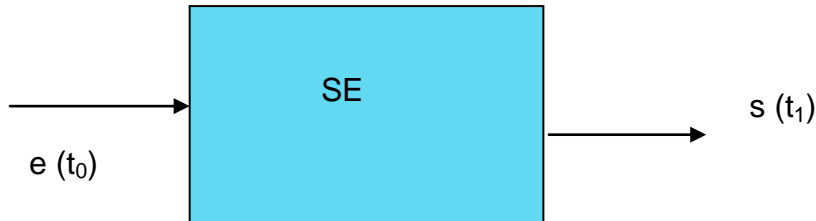
Intégrale étendue au volume total (τ) parcouru par les courants

CH II: Courant continu et alternatif

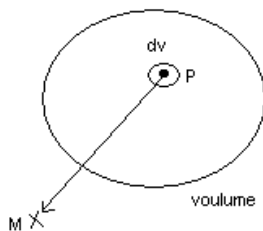
II.1-Generalités:

II-1-1- Approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S)

Soit $t_p = (t_1 - t_0)$ le temps de propagation d'un signal électrique à travers un système électrique SE:



Soit T la période d'évolution dans le temps des sources (ρ, j) des signaux $e(t)$ et $s(t)$ lorsque $t_p \ll T$ on a un régime lentement variable (l'évolution des sources r, J dans le temps est suffisamment lent) Dans ce cas on peut admettre que les potentiels et donc le champs suivent instantanément l'évolution des sources. On peut alors calculer les potentiels à l'aide des mêmes formules qu'en régime stationnaire, valable à chaque instant:



$$\left\{ \begin{array}{l} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{volume}} \frac{\rho(P, t)}{PM} dv \\ A(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{volume}} \frac{J(P, t)}{PM} dv \end{array} \right.$$

Cette approximation est appelée l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S), conditionnée par $t_p \ll T$. Soit (A.R.Q.S) est valable pour des distances $r \ll (\lambda = CT = C/v)$

$$t_p \ll T \iff r \ll (\lambda = CT = C/v)$$

Exemple:

1) Circuit électrique de dimensions inférieure à 1m ($r < 1m$), alimenté par un signal de fréquence ν , pourra être étudié dans l'A.R.Q.S si $\nu = 1/T \ll C/r = (3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1})/1m = 3 \cdot 10^8 \text{Hz}$
 $\nu = 300 \text{Mhz}$.

La plus parts des circuits électriques usuels ne dépassent pas 1m. Donc l'A.R.Q.S est valable dans la majorité des applications électriques même en hautes fréquences.

2) Cas d'un circuit industriel:

Au (Maroc, France, Belgique..) la tension secteur est telle: $V = 220-230V$; $\nu = 50 \text{Hz}$
 $r \ll C/\nu = 310^8/50 = 6000 \text{Km}$ Donc l'A.R.Q.S est valable pour des dimensions importantes. Cette distance est bien supérieure à la plus part des longueurs des circuits de distribution.

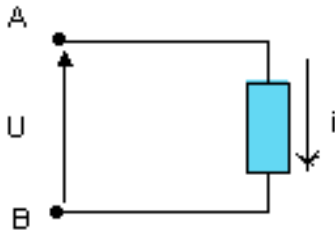
Conclusion:

a) l'A.R.Q.S « Si les dimensions d'un circuit sont petites et les variations des signaux sont lentes alors les lois d'électrocinétiques sont encore valables ».

b) **Conséquence:** Dans les circuits électriques usuels les lois d'électrocinétiques (Ohm, Kirchhoff...) sont valables en régime variable (alternatif) qu'en régime continu.

II-1-2- Dipôles électrocinétiques:

Toute système électrique ne communiquant avec l'extérieur que par deux bornes A,B s'appelle dipôle électrocinétique:

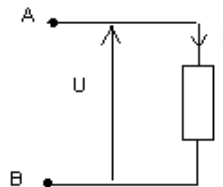


Dans le cadre de l'A.R.Q.S le courant qui entre en A est égal à celui qui sort en B.
Le courant est compté positivement s'il va de A vers B ($i=i_{AB}$).

Nous appellerons tension (ou différence de potentiel aux bornes du dipôle):

$$U=U_{AB}=V_A-V_B \quad (V_A: \text{potentiel en A et } V_B: \text{ potentiel en B}).$$

U est orientée par convention dans le sens opposé à celui de i (on dit que le courant décroît les potentiels)



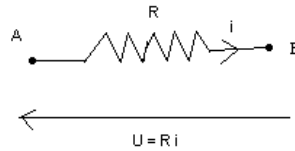
$$U=Z_{AB} i \text{ (Loi d'Ohm)}$$

II-1-3 Circuit en régime transitoire:

Le régime transitoire est le passage de $i=0$ à $i=cte$, pendant le temps de ce passage on a un courant $i(t)$. Pour étudier les différents dipôles concernés on se place dans l'A.R.Q.S.

a- Les composants R-L et C

* Résistance morte R:



$$U = V_A - V_B$$

$$U(t) = Ri(t)$$

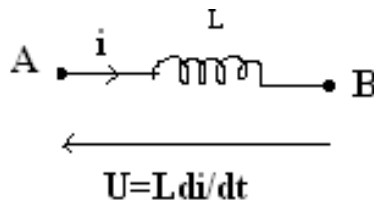
* Inductance L:

La variation du courant qui traverse L ($I=0$ à $I=cte$) entraîne la variation du flux magnétique traversant L. L est alors une source de tension de f.e.m induite

$$e(t) = -d\Phi/dt = -Ldi(t)/dt : \text{loi de Faraday}$$

L est donc un dipôle dont la tension appliquée est

$$U(t) = -e(t) = Ldi(t)/dt : \text{Loi de Lenz (} e(t) \text{ s'oppose à } U(t) \text{)}$$

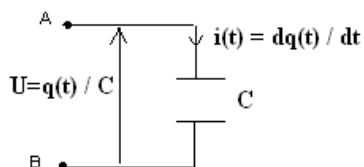


* Condensateur C:

C'est un dipôle dont la tension est donnée par:

$$U(t) = q(t)/C \text{ avec } i(t) = dq(t)/dt$$

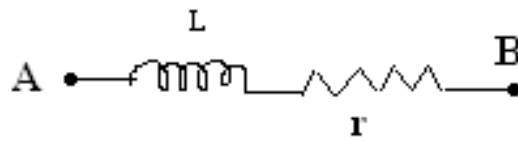
q étant la charge de l'armature reliée à A



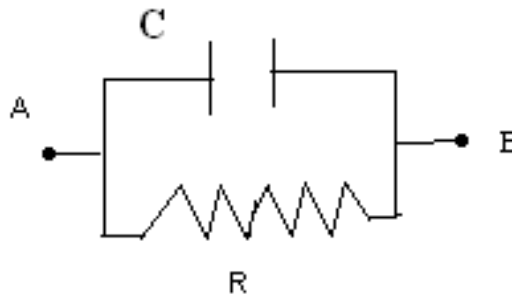
$$q(t) = \int i(t) dt \quad ; \quad U(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Remarque:

Une bobine réelle possède toujours une résistance interne r :

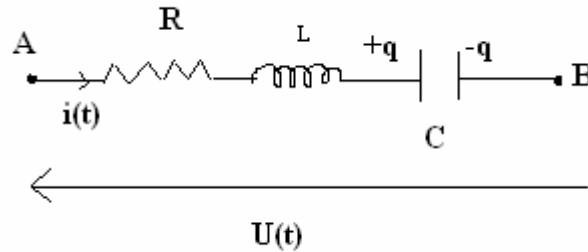


De même un condensateur réel présente une résistance de fuite R due à la conductivité non nulle de son diélectrique:



b- Etude d'un dipôle R.L.C série:

Soit un dipôle R.L.C série soumis à une tension $U(t)$



Loi de mail :

$$U(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\text{or } i(t) = \frac{dq}{dt}$$

La charge q vérifie alors la relation :

$$U(t) = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}q$$

Soi

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U(t) \quad (\text{Eq.1})$$

Toute solution de cette équation différentielle peut se mettre sous forme:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

$q_1(t)$: Solution générale de l'équation homogène (Sans second membre) (Eq.2):

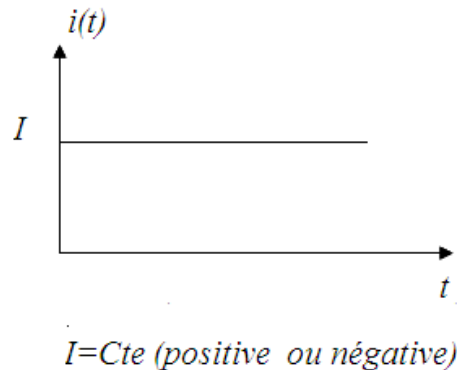
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{Eq.2})$$

$q_2(t)$: une solution particulière de l'équation complète (Eq.1).

II-2- Définitions:

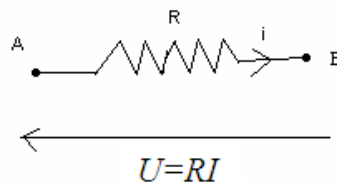
II-2-1- Régime continu (DC ou =):

C'est le régime dont le quel toutes les tensions dans un circuit et tous les courants qui le parcourent sont indépendants du temps:



- Récepteurs:

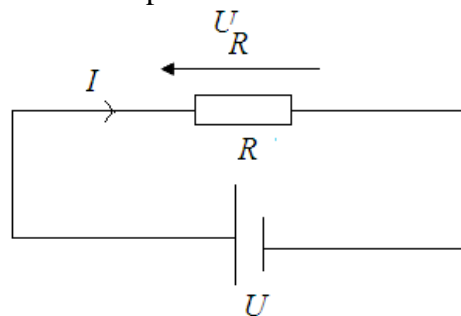
Le seul récepteur existant en régime établi continu est la résistance R dont le fonctionnement est régi par la loi d'Ohm



R en Ohm (Ω)

- Puissance:

Lorsqu'un récepteur électrique en régime continu est soumis à la fois à une tension et à un courant, il est le siège d'une dissipation de puissance. On dit alors que la puissance électrique est fournie par la source et consommée par la résistance.



Le générateur fournit la puissance $P_f = UI$. La résistance reçoit la puissance $P_r = U_R I$.

$P_r = P_f$. La puissance mise en jeu est :

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

II.2.2. Courant alternatif:

a) Grandeur périodique quelconque:

Une grandeur $S(t)$ (courant $i(t)$ ou tension $v(t)$) est périodique de période T (en seconde (s)) est telle que :

$$S(t+T) = S(t)$$

$$f = \frac{1}{T} \text{ est la fréquence de répétition de } S(t) \text{ exprimée en (Hz)}$$

. Valeur moyenne:

La valeur moyenne de $S(t)$ notée $\langle S \rangle$ est :

$$\langle S(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} S(t) dt$$

$\langle S \rangle$ représente la composante continue de $S(t)$

. Valeur efficace:

La valeur efficace (S_{eff}) de $S(t)$ est :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} S^2(t) dt}$$

Remarques:

* C'est la recherche de la puissance dissipée par effet joule due à un courant alternatif qui mène à la notion des valeurs efficaces. La formulation des puissances sera la même en alternatif et en continu à condition d'utiliser les valeurs efficaces dans tous les cas

$$P_{\text{électrique}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

* Les voltmètres et les ampèremètres utilisés en TP (alternatif) nous donnent des valeurs efficaces.

Si $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ alors $\langle i(t) \rangle = \langle i_1(t) \rangle + \langle i_2(t) \rangle$ mais $I_{\text{eff}}(t) \neq I_{1\text{eff}}(t) + I_{2\text{eff}}(t)$
(Voir TP du transformateur)

. Décomposition en série de Fourier d'une grandeur périodique:

Toute grandeur périodique $S(t)$ de période T , peut être écrite sous la forme:

$$\begin{cases} S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \\ \omega_n = n\omega = n \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

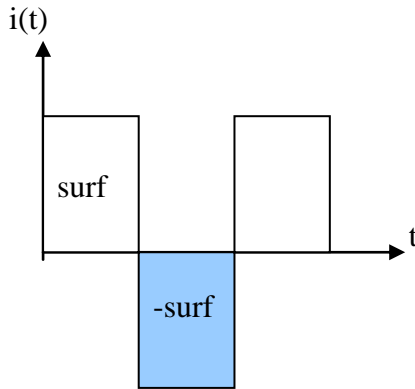
Cette forme s'appelle série de Fourier.

Le terme $a_0 \cos(\varphi_0)$ ($n=0$) est appelé terme fondamental, les autres termes sont des termes harmoniques: 1^{er} harmonique ($n=1$), 2^{ème} harmonique ($n=2$).....

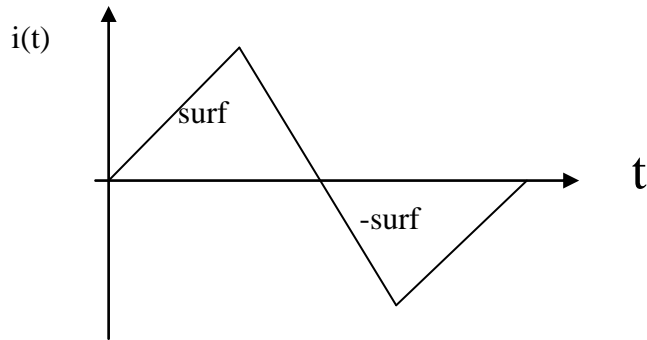
b) Courant alternatif:

C'est un courant périodique dont la valeur moyenne est nulle par exemple les courants :

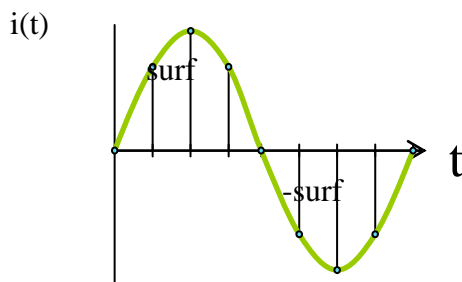
Carré :



triangulaire :



et sinusoïdal:



$$\langle i(t) \rangle = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T i(t) dt \right) = \frac{1}{T} (\text{surf} - \text{surf}) = 0$$

Remarque :

Seulement pour le courant sinusoïdal qu'on a $I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$; pour les autres courant

alternatifs $I_{eff} \neq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$.

* Sinusoïdal : $i(t) = I_{max} \cos(\omega t)$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_{max}^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^T \frac{dt}{2} + \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt$$

$$= \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^T \frac{dt}{2} = \frac{I_{max}^2}{T}$$

Dou $I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

* Carré :

$$i(t) = +I_{\max} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$i(t) = -I_{\max} \quad \text{pour } \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} (+I_{\max})^2 dt + \int_{T/2}^T (-I_{\max})^2 dt \right] = I_{\max}^2$$

Dou $I_{\text{eff}} = I_{\max}$

II-3- Courant sinusoïdale (AC ou ~):

Dans un circuit fonctionnant en régime sinusoïdal, tous les courants et toutes les tensions dans le circuit sont sinusoïdaux, de même pulsation que la source d'alimentation.

II_3_1. Définitions:

a_ Expression analytique:

Une grandeur S(t) qui varie sinusoïdalement en fonction du temps avec une période Test représentée par l'expression générale:

$$S(t) = S_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (1)$$

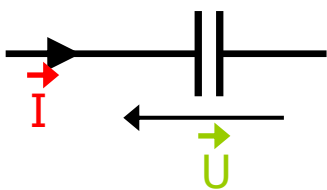
S_{\max} : Amplitude;

φ : phase initiale (à $t = 0$) appelée aussi angle de phase;

$\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$: la phase instantannée.

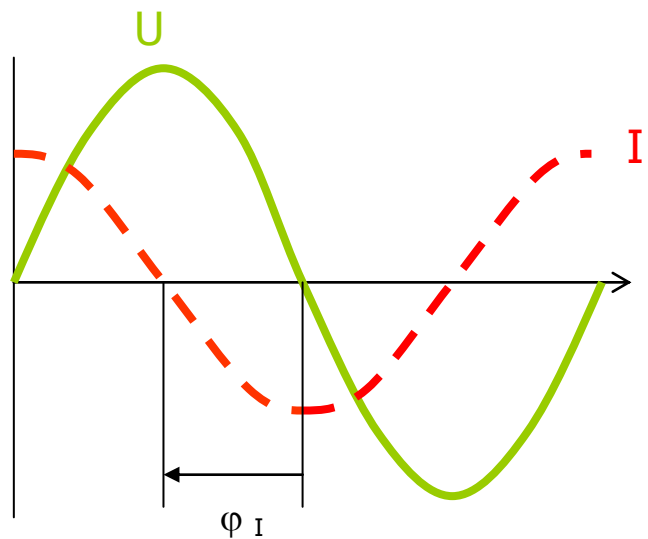
Pour définir une telle grandeur, il suffit de connaître trois paramètres: S_{\max} , T et f

Dipôle capacitif :



Le courant est en quadrature
Avant par rapport à la tension :

Il y a un déphasage



b_ fréquence (f ou v) et pulsation (ω):

$$f = \nu = \frac{1}{T} \quad ; \quad [f] = [Hz] = [s^{-1}] \quad (2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\nu \quad ; \quad [\omega] = [rad. s^{-1}] \quad (3)$$

C_ Valeur crête:

La plus grande valeur d'une grandeur S(t) dans un intervalle de temps spécifié est appelée valeur de crête. On la note \hat{S} .

Pour une grandeur périodique, l'intervalle est la période et la valeur de crête est égale à l'amplitude: $\hat{S} = S_{max}$. Et la valeur crête à Crête $V_{cc} = 2\hat{S}$

C_ Valeur moyenne:

$$\begin{aligned} \langle S(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{S} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T -\hat{S} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) dt \\ &= -\frac{1}{T} \left[\frac{T}{2\pi} \hat{S} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2\pi} \hat{S} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right]_{\frac{T}{2}}^T \\ &= -\frac{\hat{S}}{2\pi} [\cos(\pi + \varphi) - \cos(\varphi)] + \frac{\hat{S}}{2\pi} [\cos(2\pi + \varphi) - \cos(\pi + \varphi)] \\ &= -\frac{\hat{S}}{2\pi} [\cos(\pi + \varphi) - \cos(\varphi) + \cos(2\pi + \varphi) - \cos(\pi + \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

d_ Valeur efficace:

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{S}^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) dt} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{S}^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)}{2} dt} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{S}^2}{T} \left[\int_0^T \frac{dt}{2} - \int_0^T \frac{\cos 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)}{2} dt \right]} = \sqrt{\frac{\hat{S}^2}{T} \int_0^T \frac{dt}{2}} = \sqrt{\frac{\hat{S}^2}{2}} = \frac{\hat{S}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Remarques:

A- On trouvera lors de l'utilisation des appareils de mesure le terme

« RMS »  « Root-Mean-Square » : Valeur efficace en anglais.

B- La notion de valeur efficace est directement liée à celle de la puissance moyenne;

$$\begin{cases} p(t) = v(t).i(t) = \frac{i^2(t)}{R} & (\text{puissance instantanée}) \\ P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{i^2(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{I_{\text{eff}}^2}{R} \end{cases}$$

$$P = V.I = \frac{I^2}{R} \text{ (Continu)} ; \quad P_{\text{moy}} = V_{\text{eff}}.I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{eff}}^2}{R} \text{ (alternatif)}$$

II-3-2-Representation complexe:

a- Définition:

En électronique, on appelle valeur instantanée complexe d'une grandeur sinusoïdale

$$s(t) = \widehat{S} \sin(\omega t + \varphi) \text{ et on la note } \overline{s} \text{ ou } \underline{s}$$

L'expression complexe:

$$\underline{s} = \widehat{S} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$s(t) = \widehat{S} \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{s} = \widehat{S} e^{j(\omega t + \varphi)} = \widehat{S} e^{j\varphi} . e^{j\omega t}$$

En régime sinusoïdal, tous les éléments du circuit varient avec la même pulsation, donc le terme $e^{j\omega t}$ est commun à la représentation de toutes les grandeurs sinusoïdales du circuit et **peut donc être simplifié.**

La grandeur complexe $\overline{S} = \widehat{S} e^{j\varphi}$ s'appelle le phaseur.

Le phaseur contient la valeur essentielle de la valeur efficace et du déphasage par rapport à une origine choisie arbitrairement

b- opérations élémentaires:

Dérivation:

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = \widehat{S} e^{j\varphi} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega \underline{s} \Rightarrow \left[\dot{\underline{s}} = j\omega \underline{s} \right]$$

Intégration:

$$\int \underline{s} dt = \widehat{S} e^{j\varphi} \int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s} \Rightarrow \left[\int \underline{s} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s} \right]$$

$$\text{NB: } j = e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ (imaginair e pure)} \quad j^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

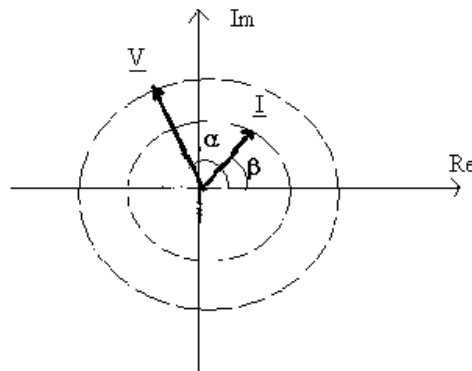
II-3-3- Représentation de Fresnel:

Puisque les phaseurs sont des nombres complexes, il est possible de les représenter graphiquement dans le plan complexe sous forme de demi droite partant de l'origine si et seulement si ils ont la même pulsation. Ce mode de représentation appelé diagramme de Fresnel, permet de mettre en évidence les déphasages relatifs des différentes grandeurs sinusoïdales et d'effectuer des opérations élémentaires (addition, soustraction):

Les valeurs instantannées complexes de la tension

$$\underline{v} = \widehat{V} e^{j(\omega t + \alpha)} = \underbrace{\widehat{V} e^{j\alpha}}_{\underline{V}} e^{j\omega t} \quad \text{et du courant} \quad \underline{i} = \widehat{I} e^{j(\omega t + \beta)} = \underbrace{\widehat{I} e^{j\beta}}_{\underline{I}} e^{j\omega t}$$

Ont pour diagramme de Fresnel:



Remarque:

On appelle déphasage φ la différence entre la phase de la tension et du courant:

$$\varphi = \alpha - \beta$$

L'angle φ est défini à $\pm 2k\pi$ (k entier), on le ramènera toujours à sa valeur principale comprise dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

Lorsque $\varphi > 0$ on dit que la tension est en avance sur le courant .

Lorsque $\varphi < 0$ on dit que la tension est en retard par rapport au courant

si $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ le courant et la tension sont en quadrature de phase

si $\varphi = \pi$ le courant et la tension sont en opposition de phase

II-4- Impédance et admittance complexe:

II-4-1 Définitions:

L'impédance complexe \underline{Z} d'un dipôle en régime permanent sinusoïdal est le quotient de

$$\underline{v} = \widehat{V} e^{j(\omega t + \alpha)} \quad \text{par} \quad \underline{i} = \widehat{I} e^{j(\omega t + \beta)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\widehat{V} e^{j(\omega t + \alpha)}}{\widehat{I} e^{j(\omega t + \beta)}} = \frac{\widehat{V} e^{j\alpha}}{\widehat{I} e^{j\beta}} = \frac{V}{I} = \frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}$$

$$\begin{cases} \underline{Z} = Z e^{j\varphi} \\ Z = |\underline{Z}| & \text{module mesuré en Ohm} \\ \varphi & \text{le déphasage (argument)} \end{cases}$$

L'admetance complexe est l'inverse de l'impédance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{V}}$$

La partie réelle de l'impédance complexe est appelée la résistance R du dipôle correspondant :

$$R = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = \frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} \cos \varphi$$

La partie imaginaire de \underline{Z} est appelée la réactance X du dipôle correspondant :

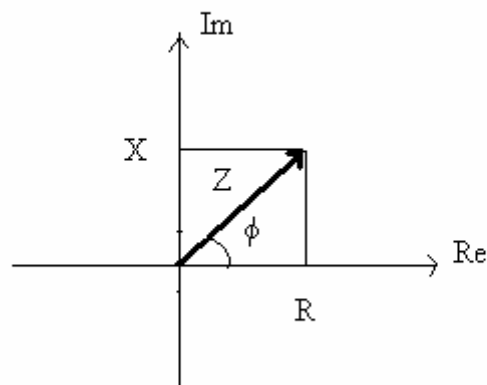
$$X = \operatorname{Im}(\underline{Z}) = \frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} \sin \varphi$$

Donc \underline{Z} peut s'écrire :

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = \frac{V}{I} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\underline{Z} = R + jX \text{ avec } \begin{cases} R = Z \cos \varphi \\ X = Z \sin \varphi \\ Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{X}{R} \end{cases}$$

Le diagramme de Fresnel est le suivant



II-4-2 Impédance complexe des dipôles élémentaire:

a- Résistance:

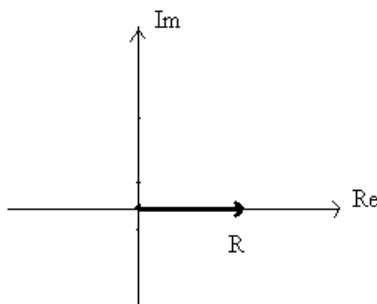
La relation en valeurs instantanée $v(t)=Ri(t)$ entre tension et courant dans une résistance R se traduit pour le régime sinusoïdal en valeur complexe par:

$$\underline{V} = R\underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_R = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R \quad \text{et} \quad \varphi_R = 0$$

L'impédance d'une résistance est indépendante de la fréquence.

$$\text{L'admittance est } \underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{R}$$

Le diagramme de Fresnel est le suivant



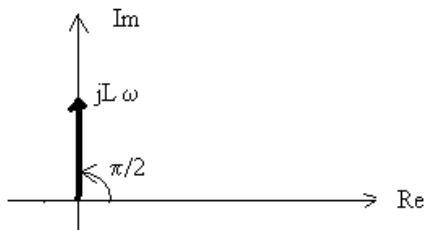
b- Inductance L:

Pour L on a la relation en valeur instantanée $v = L \frac{di}{dt}$ qui se traduit pour le régime sinusoïdal

en valeurs complexes par $\underline{V} = L \frac{d\underline{I}}{dt} = L \underbrace{j\omega\underline{I}}_{\text{dérivation}} \Rightarrow [\underline{V} = jL\omega\underline{I}]$, d'où l'impédance complexe

et le déphasage d'une inductance sont donnés par: $\underline{Z}_L = jL\omega$ et $\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$

Elle est purement imaginaire, le diagramme de Fresnel est le suivant:



L'admittance est $\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$

$|\underline{Z}_L| = L\omega$: Varie linéairement avec la fréquence. Ainsi pour une fréquence nulle (courant continu) $\underline{Z}_L = 0$
Une bobine en continu se comporte comme un fil (court-circuit), pour une fréquence infinie, L se comporte comme un circuit ouvert.

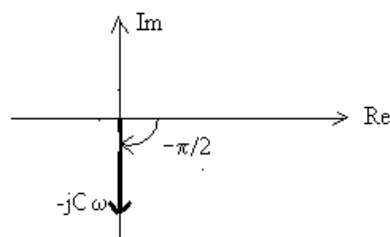
C- Condensateur C:

Pour C on a la relation en valeur instantannées $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$ qui se traduit pour le régime sinusoïdal

en valeurs complexe par $\underline{V} = \frac{1}{C} \int \underline{I} dt = \frac{1}{C} \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_{\text{integration}} \underline{I} \Rightarrow \left[\underline{V} = \frac{\underline{I}}{jC\omega} \right]$, dou l'impedance complexe

et le déphasage d'un condensateur sont donnés par: $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -jC\omega$ et $\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$

Elle est purement imaginaire, le diagramme de Fresnel est le suivant:



L'admettance est $\underline{Y}_C = jC\omega$

$|\underline{Z}_C| = \frac{1}{C\omega}$: est inversement proportionnelle à la fréquence. Ainsi pour une fréquence nulle (courant continu) \underline{Z}_C

Un condensateur en continu se comporte comme un circuit ouvert, pour une fréquence infinie, C se comporte comme un fil (court-circuit)

II-5- Lois d'Ohm et de Kirchhoff en régime sinusoïdal:

II-5-1- les lois (modèle complexe)

Loi d'Ohm:

L'introduction de la notion de l'impedance permet de generaliser la loi d'Ohm

en utilisant la notation complexe: $[\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}]$

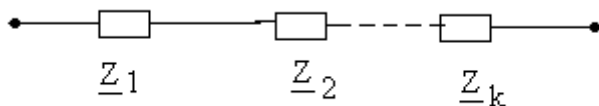
Comme la loi d'Ohm, toutes les lois d'électricité restent valables dans le modèle complexe:

Les Lois de Kirchhoff:

$$\sum_k \underline{I}_k = 0 \text{ (loi des noeuds); } \sum_k \underline{V}_k = 0 \text{ (loi des mailles)}$$

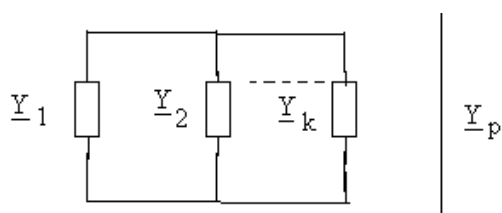
II-5-2-Impédance (admittances) en série et parallèle:

a) Mise en série :



L'impédance série est $\underline{Z}_s = \sum_k \underline{Z}_k$; l'admittance correspondante est $\underline{Y}_s = \frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{\sum_k \underline{Z}_k}$

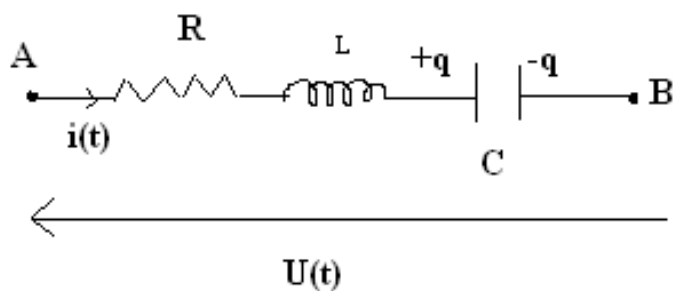
b) Mise en parallèle :



L'admittance parallèle est $\underline{Y}_p = \sum_k \underline{Y}_k$;

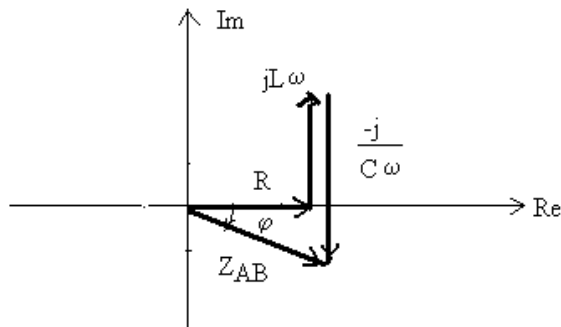
l'impédance correspondante est $\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = \frac{1}{\sum_k \underline{Y}_k}$; autrement $\frac{1}{\underline{Z}_p} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}$

C- exemple1:



$$\underline{Z}_{AB} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

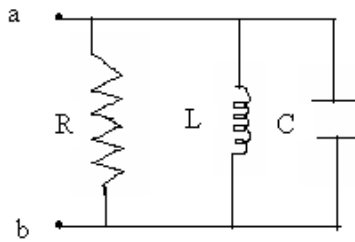
On obtient le diagramme de Fresnel suivant :



Le module $Z_{AB} = |\underline{Z}_{AB}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Le déphasage φ est $\text{tg } \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{Z}_{AB})}{\text{Re}(\underline{Z}_{AB})} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Rightarrow \varphi = \text{Arctg}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$

d- exemple 2:



$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$|\underline{Y}_{ab}| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} ; \text{Arg}(\underline{Y}_{ab}) = \text{Arctg}\left(\frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}\right) = \text{Arctg}R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{1}{\underline{Y}_{ab}} \Rightarrow |\underline{Z}_{ab}| = \frac{1}{|\underline{Y}_{ab}|} \text{ et } \text{Arg}(\underline{Z}_{ab}) = -\text{Arg}(\underline{Y}_{ab})$$

Pour les circuits en parallèles, il est préférable de travailler avec les admittances.

II-6- Puissance et facteur de puissance:

II-6-1 Puissance instantanée $p(t)$ en régime sinusoïdale :

a- Définitions:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t).i(t) = \widehat{V} \cos(\omega t + \alpha) \widehat{I} \cos(\omega t + \beta) \\
 &= \frac{1}{2} \widehat{V} \widehat{I} \left[\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \underbrace{\cos(\alpha - \beta)}_{\varphi} \right] \\
 &= \frac{\widehat{V}}{\sqrt{2}} \frac{\widehat{I}}{\sqrt{2}} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] \\
 &= I_{eff} V_{eff} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] \\
 &= \underbrace{I_{eff} V_{eff} \cos(\varphi)}_{\text{composante constante}} + \underbrace{I_{eff} V_{eff} \cos(2\omega t + \alpha + \beta)}_{\text{Composante fluctuante de fréquence double de celle de } i(t) \text{ et } v(t)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(2\omega t + \alpha + \beta) &= \cos(2\omega t + 2\alpha - \varphi) \\
 &= \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) + \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha)
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 p(t) &= V_{eff} I_{eff} \cos \varphi + V_{eff} I_{eff} \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) + V_{eff} I_{eff} \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha) \\
 &= \underbrace{V_{eff} I_{eff} \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{composante pulsée, toujours } > 0} + \underbrace{V_{eff} I_{eff} \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{composante alternative, sinusoidale}}
 \end{aligned}$$

composante pulsée,
 toujours > 0
 qui oscille autour de la
 valeur moyenne $V_{eff} I_{eff} \cos \varphi$.
 Traduit un échange d'énergie
 unidirectionnel entre une source
 et un charge

composante alternative,
 sinusoidale
 d'amplitude $V_{eff} I_{eff} \sin \varphi$,
 dont la valeur moyenne est nulle.
 Traduit un échange oscillatoire
 et réversible d'énergie
 entre la source et la charge.

II-6-2 Puissance active P:

C'est la valeur moyenne de la puissance instantanée p(t):

$$P = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt \text{ avec } T_p = \frac{T}{2} \text{ est la période de } p(t).$$

$$= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} dt \left[V_{eff} I_{eff} \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + V_{eff} I_{eff} \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha) \right]$$

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi \text{ en effet } \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{T_p} \cos(2\omega t + 2\alpha) dt = 0 \\ \int_0^{T_p} \sin(2\omega t + 2\alpha) dt = 0 \\ 2\omega = \frac{4\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_p} \end{array} \right.$$

II-6-3 Puissance réactive (Q):

C'est l'amplitude de la composante alternative de la puissance instantanée:

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin \varphi \quad [Q] = [VAR]$$

Q est une puissance fictive, qui ne répond pas à une véritable définition physique' mais qui permet de caractériser l'échange d'énergie non convertible apparaissant dans le cas d'une charge réactive.

La notion de puissance réactive est utile pour caractériser la nature d'un utilisateur:

Pour une charge inductive ($X > 0$), $\varphi > 0$ de même $\sin \varphi > 0$ soit $Q > 0$.

Pour une charge capacitive ($X < 0$), $\varphi < 0$ de même $\sin \varphi < 0$ soit $Q < 0$: on dit que la charge capacitive fournit de la puissance réactive

II-6-4 Puissance apparente (S):

La puissance apparente est l'amplitude des fluctuations de la puissance instantanée p(t) par rapport à sa valeur moyenne :

$$S = V_{eff} I_{eff} \quad [S] = [V.A]$$

Elle est reliée aux puissances active P et réactive Q par $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Le produit $V_{eff} I_{eff}$ est apparemment une puissance mais il ne fournit pas nécessairement un travail d'où son nom de puissance apparente.

La puissance apparente est une mesure pratique de l'importance d'un équipement alternatif ou d'une installation électrique.

Les puissances apparentes correspondant à un module, ne peuvent pas être additionnées.

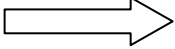
II-6-5- Puissance dans un circuit élémentaire:

a- Résistance pure (R):

$$* P = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi = V_{eff} I_{eff} = \frac{V^2}{R} = R I_{eff}^2 > 0$$

$$* Q = V_{eff} I_{eff} \sin \varphi = 0$$

En régime sinusoïdal une résistance n'introduit pas de déphasage ($\varphi=0$)

$P > 0$  R absorbe de l'énergie électrique qu'elle convertit, par effet Joule, en énergie calorifique

b- Inductance pure (L):

En régime sinusoïdal une inductance introduit un déphasage ($\varphi=+\pi/2$)

$$* P = V_{eff} I_{eff} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$* Q = V_{eff} I_{eff} \sin \frac{\pi}{2} = 0 = V_{eff} I_{eff} = L \omega I_{eff}^2 > 0$$

Par convention, on considère que la puissance réactive est fournie par la source à l'inductance qui la consomme.

Cet échange d'énergie correspond à l'accumulation puis à la libération d'énergie électromagnétique dans L

La valeur moyenne de la puissance active est nulle. Il ne se produit aucun transfert net d'énergie entre une inductance et la source.

c- Capacité pure (C):

En régime sinusoïdal une inductance introduit un déphasage ($\varphi=-\pi/2$)

$$* P = V_{eff} I_{eff} \cos -\frac{\pi}{2} = 0$$

$$* Q = V_{eff} I_{eff} \sin -\frac{\pi}{2} = 0 = -V_{eff} I_{eff} = -C \omega V_{eff}^2 < 0$$

$Q < 0$ conduit à assimiler le condensateur à un générateur de puissance réactive et à considérer par convention que la puissance réactive est fournie par le condensateur à la source qui la consomme.

Cet échange d'énergie correspond à la libération puis l'accumulation d'énergie électrostatique dans le diélectrique du condensateur (charge et décharge de C).

II-6-6 Puissance complexe:

On appelle puissance complexe

$$\underline{S} = P + jQ = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi + jV_{eff} I_{eff} \sin \varphi = V_{eff} I_{eff} e^{j\varphi}$$

Elle permet de regrouper les différentes puissance définies précédemment :

$$P = \text{Re}(\underline{S}) : \text{active}; \quad Q = \text{Im}(\underline{S}) : \text{réactive}; \quad S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} : \text{apparente}$$

en introduisant le phaseur $\underline{V}_{eff} = V_{eff} e^{j\alpha}$ et le conjugué du phaseur \underline{I}_{eff} ,

$$\underline{I}_{eff}^* = I_{eff} e^{-j\beta} \text{ on peut exprimer } \underline{S} \text{ par } [\underline{S} = \underline{V}_{eff} \underline{I}_{eff}^*]:$$

$$\underline{S} = \underline{V}_{eff} \underline{I}_{eff}^* = V_{eff} e^{j\alpha} I_{eff} e^{-j\beta} = V_{eff} I_{eff} e^{j(\alpha-\beta)} = V_{eff} I_{eff} e^{j\varphi}$$

II-6-7 Facteur de puissance (Fp)

On appelle facteur de puissance le rapport entre la puissance active et la puissance apparente:

$$F_p = \frac{P}{S}$$

$$\text{En régime sinusoïdal : } F_p = \frac{V_{eff} I_{eff} \cos \varphi}{V_{eff} I_{eff}} = \cos \varphi$$

Le facteur de puissance est toujours compris entre 0 et 1: $0 \leq F_p \leq 1$.

Il caractérise l'efficacité d'un réseau de distribution d'énergie. Pour un réseau de distribution d'énergie électrique, il est souhaitable d'avoir un facteur de puissance aussi proche que possible de 1

Ch III – Équations de Maxwell dans le vide

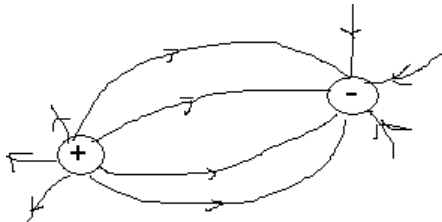
III-1-Définition:

Dans un référentiel d'étude supposé galiléen, une distribution caractérisée par la densité volumique total de charge ρ_{tot} et la densité volumique de courant J_{tot} , crée en tout point M à l'instant t un champs électromagnétique $(\vec{E}(t), \vec{B}(t))$, qui satisfait aux quatre équations suivantes, appelées équations de Maxwell, sur lesquelles repose toute l'électromagnétisme:

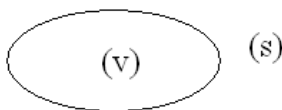
- 1) $div \vec{E}(t) = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$: Equation de Maxwell – Gauss,
- 2) $div \vec{B}(t) = 0$: \vec{B} est un champs de rotationnel,
- 3) $\text{Rot } \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}$: Equation de Maxwell – Faraday;
- 4) $\text{Rot } \vec{B}(t) = \mu_0 \vec{J}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$: Equation de Maxwell - Ampère.

1) $div \vec{E}(t) = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$: Equation de Maxwell – Gauss

Elle indique que les lignes du champ divergent à partir des charges + pour aboutir aux charges - :



Elle traduit le théorème de Gauss généralisé:



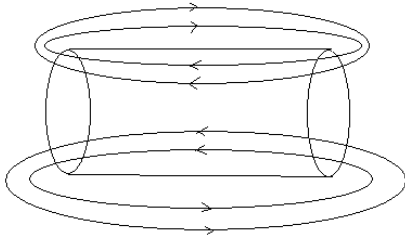
(v) volume limité par la surface fermée (s)

$$\iint_{(s)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_{(v)} div \vec{E} d\tau \quad : \text{Théorème de divergence ou de Gréen-ortrogratsky}$$

$$\iint_{(s)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_{(v)} \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(v)} \rho_{tot} d\tau = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

2) $\text{div} \vec{B}(t) = 0$: \vec{B} est un champ de rotationnel ($\vec{B} = \text{Rot } \vec{A}$)

Elle indique que les lignes de champs \vec{B} sont des courbes fermées et ne peuvent jamais se couper :

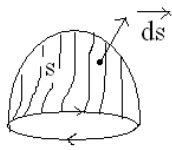


Elle exprime que \vec{B} est à flux conservatif:

$$\oiint_{(s)} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iiint_v \text{div} \vec{B} d\tau = 0$$

3) $\text{Rot } \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}$: Equation de Maxwell - Faraday

Elle exprime le phénomène d'induction magnétique:



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \oiint_s \text{Rot } \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (\text{Théorème rotationnel ou de Stokes - Ampère})$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \oiint_s -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \oiint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} : \text{relation de Faraday}$$

4) $\text{Rot } \vec{B}(t) = \mu_0 \vec{J}_{tot} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$: Equation de Maxwell - Ampère.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oiint_s \text{Rot } \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (\text{théorème})$$

$$= \mu_0 \oiint_s \vec{J}_{tot} \cdot \vec{ds} + \varepsilon_0 \mu_0 \oiint_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \underbrace{\oiint_s \vec{J}_{tot} \cdot \vec{ds}}_{\sum I_i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(E)}{dt}$$

III-2- Récapitulatif et contenu physique des équations de Maxwell:

Équation de Maxwell	Expression Intégrales	Contenu physique
$\text{div} \vec{B}(t) = 0$	$\oiint_{(s)} \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$	B est à flux conservatif
$\text{Rot} \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \oiint_s \vec{B}$	Équation de Faraday
$\text{div} \vec{E}(t) = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$	$\oiint_{(s)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(v)} \rho_{tot} d\tau$	Théorème de Gauss
$\text{Rot} \vec{B}(t) = \mu_0 \vec{J}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \oiint_s (\vec{J}_{tot} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot \vec{ds}$	Théorème d'Ampère généralisé

Si E et B ne dépendent pas de t, on retrouve les équations locales de l'électrostatique et de la magnétostatique:

$$\text{div} \vec{B}(t) = 0 \quad \iff \quad \oiint_{(s)} \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$$

$$\text{Rot} \vec{E}(t) = 0 \quad \iff \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0: \text{pas de f.e.m}$$

$$\text{div} \vec{E}(t) = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \quad \iff \quad \oiint_{(s)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Charges fixes} \\ \text{Th de Gauss} \end{array}$$

$$\text{Rot} \vec{B}(t) = \mu_0 \vec{J}_{tot} \quad \iff \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum I \quad \text{Th d'Ampère}$$

CH IV : Ondes électromagnétiques dans le vide.

1- Equations de Maxwell dans le vide, en l'absence de charge et de courant ; Equation d'onde :

Loin des sources d'un champ électromagnétique (pour $\rho=0$ et $J=0$), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$1) \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{E}(t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(t)}{\partial t} ; \quad 2) \text{div} \overrightarrow{E}(t) = 0 ; \quad 3) \text{div} \overrightarrow{B}(t) = 0 ; \quad 4) \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{B}(t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}(t)}{\partial t}$$

Rappelons que $\overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{\text{Rot}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \Delta$ où Δ est le Laplacien

Formons $\overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{E}$:

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\text{Rot}} \left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{B}) \quad (\text{d'après l'équation 1})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \quad (\text{d'après l'équation 4})$$

$$= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

Soit

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{E} - \Delta \overrightarrow{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

Soit encore, compte tenu de 2) $\text{div} \overrightarrow{E} = 0$

$$\Delta \overrightarrow{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$$

De même formons $\overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{B}$:

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{Rot}} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{d'après l'équation 4})$$

$$= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} \quad (\text{d'après l'équation 1})$$

Soit

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{B} - \Delta \overrightarrow{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}$$

Soit encore, compte tenu de 3) $\text{div} \overrightarrow{B} = 0$

$$\Delta \overrightarrow{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = 0$$

Remarque : Dans le cas de la jauge de Lorenz ($\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$) les potentiels vecteurs \vec{A} et scalaire V obéissent aux équations suivantes :

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Conclusion : En l'absence de charges et de courant, les champs \vec{E} , \vec{B} et \vec{A} et éventuellement le potentiel scalaire V satisfont à la même équation aux dérivées partielles :

$$\Delta F - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Δ : Laplacien vectoriel ou scalaire selon que F est une grandeur vectorielle ($\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}$) ou scalaire (V).

En introduisant l'opérateur de D'Alombert $\square = \Delta - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Cette équation peut s'écrire :

$$\square F = 0$$

Cette équation s'appelle équation d'onde ou équation de D'Alombert. De façon générale, on appelle équation d'onde ou équation de d'Alombert une équation aux dérivées partielles de la forme :

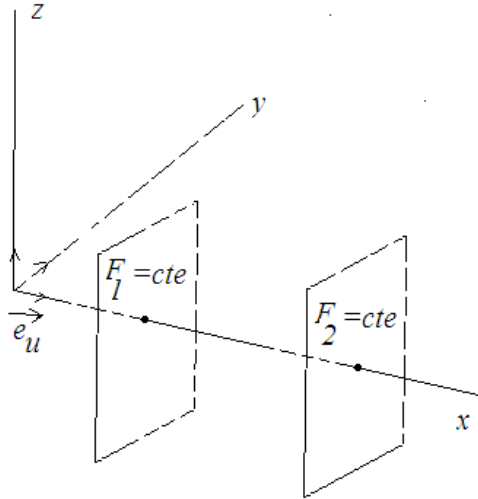
$$\Delta F - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Où C est une constante (dans le temps). Dans le cas où F est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω , C peut éventuellement dépendre de ω . On dit alors qu'il y a dispersion.

2- Etude de quelques solutions de l'équation d'onde.

2-1- Ondes planes :

On dit qu'une onde est plane si à chaque instant la fonction F a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un unitaire \vec{e}_u :



Si nous choisissons cette direction suivant ox (ceci revient à écrire F sous la forme $F(x,t)$); l'équation d'onde s'écrira alors :

$$\text{Posons } u = t - \frac{x}{C} \text{ et } v = t + \frac{x}{C} \Rightarrow x = C \frac{v-u}{2} \text{ et } t = \frac{v+u}{2}$$

$$dx = C \frac{dv}{2} - C \frac{du}{2} \text{ et } dt = \frac{dv}{2} + \frac{du}{2}$$

Soit une fonction $f(x, t)$, la différentielle df est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$= C \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dv}{2} - C \frac{\partial f}{\partial x} \frac{du}{2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dv}{2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{C}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial t} \right] dv - \frac{C}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial t} \right] du$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

$$\text{avec } \frac{\partial}{\partial u} = -\frac{C}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right] \text{ et } \frac{\partial}{\partial v} = \frac{C}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

Revenons à l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

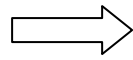
Elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial F}{\partial t} \right] = 0$$

Soit donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{C} \frac{\partial F}{\partial v} \right) - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{C} \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0$$

$$\frac{2}{C} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$



$$\frac{-2}{C} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial F}{\partial v} \right] = 0$$

Une 1^{ère} intégration/u donne :

$$\frac{\partial F}{\partial v} = g_1(v)$$

où $g_1(v)$ est une fonction de la seule variable v (constante/u) ; une seconde intégration/v donne :

$$F = \int g_1(v) dv + f(u) \quad (f(u) \text{ est constante/v})$$

Or $\int g_1(v) dv$, fonction de la seule variable v , peut être notée $g(v)$; Ainsi :

$$F = f(u) + g(v)$$

et la solution générale de l'équation d'onde $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$, s'écrit :

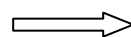
$$F(x, t) = f\left(t - \frac{x}{C}\right) + g\left(t + \frac{x}{C}\right)$$

Interprétation :

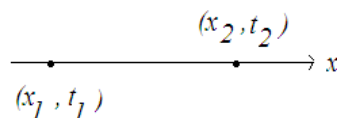
- L'onde plane de direction ox , solution de l'équation d'onde, apparaît comme étant la somme de deux termes : $f\left(t - \frac{x}{C}\right)$ et $g\left(t + \frac{x}{C}\right)$, où f et g sont deux fonctions arbitraires.
- A un instant t donné f et g sont constantes dans tout plans ($x=cte$) : f et g décrivent des ondes planes.
- Remarquons que la fonction f aura la même valeur dans un plan ($x=x_1$) observé à l'instant t_1 et dans un autre plan ($x=x_2$) observé à l'instant t_2 si

$$t_1 - \frac{x_1}{C} = t_2 - \frac{x_2}{C}$$

$$\text{soi } \frac{x_2 - x_1}{C} = t_2 - t_1$$



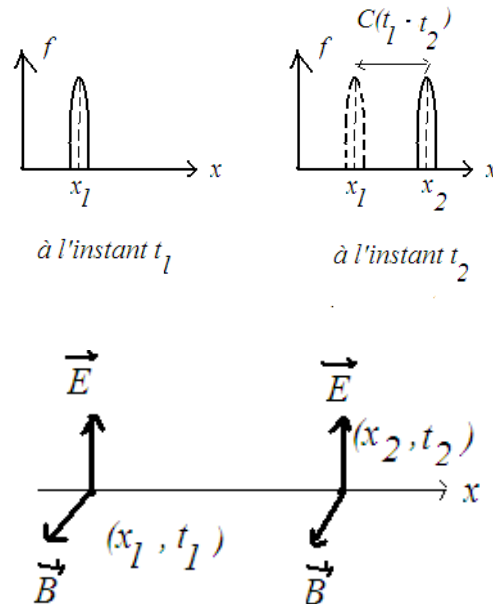
$$x_2 - x_1 = C(t_2 - t_1)$$



On peut interpréter cette relation en disant que si l'on connaît la fonction en tout point à l'instant t_1 , sa valeur à l'instant t_2 s'obtient en effectuant une translation d'amplitude

$$x_2 - x_1 = C(t_2 - t_1)$$

Ceci revient à dire que le phénomène s'est propagé en bloc à la vitesse C le long de l'axe ox :



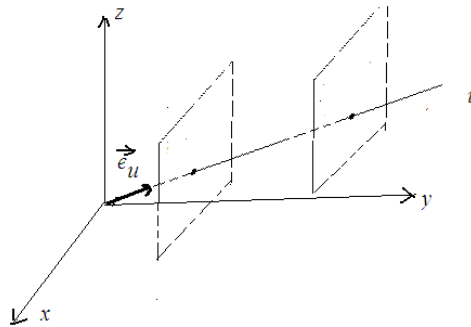
En d'autre terme, la dépendance en $(t - \frac{x}{C})$ traduit une onde plane se propageant suivant ox positif à la vitesse C .

De même la fonction $g(t + \frac{x}{C})$ correspond à une onde plane se propageant suivant ox néгатif à la vitesse C .

Les ondes décrites par f et g sont appelées ondes plane progressives **O.P.P**

L'onde plane la plus générale dans la direction ox est donc la somme de deux ondes planes progressives se propageant en sens opposés sur ox

Remarque : Cas où la direction de propagation est quelconque :



Onde plane dans une direction de vecteur unitaire \vec{e}_u

Une O.P.P dans la direction de l'unitaire \vec{e}_u . u étant la coordonnée d'espace suivant cette direction (r par exemple) est

$$F(u,t) = f\left(t - \frac{u}{C}\right) + g\left(t + \frac{u}{C}\right)$$

$$u = OM = \vec{OM} \cdot \vec{e}_u$$

$$F(OM,t) = f\left(t - \frac{OM}{C}\right) + g\left(t + \frac{OM}{C}\right)$$

Soit a, b et c les composante de \vec{e}_u dans un repère orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{e}_u = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad \text{avec} \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

$$OM = u = \vec{OM} \cdot \vec{e}_u = a.x + b.y + c.z$$

$$F(OM,t) = f\left(t - \frac{a.x + b.y + c.z}{C}\right) + g\left(t + \frac{a.x + b.y + c.z}{C}\right)$$

3- Onde Plane Progressive Electromagnétique (O.P.P.E) :

3-1-Vitesse de propagation des ondes planes électromagnétique dans le vide :

On vu que dans le vide, en l'absence de charges et de courant électrique les champs \vec{E}, \vec{B} étaient solution des équations $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ et $\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$

Il découle de l'équation d'onde ou équation de D'Alombert : $\Delta F - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$

que $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ est homogène à une vitesse C : $C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$; Vitesse de la lumière dans le vide

Les ondes électromagnétiques (O.E) se propagent dans le vide à la vitesse C : $\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$

3-2- Structure d'O.P.P.E

Soit une O.P.P.E se déplaçant dans la direction \vec{e}_u . Pour simplifier, choisisant \vec{e}_u suivant ox (x : positif). Cette onde est caractérisée par le champ électromagnétique :

$\left(\begin{array}{c} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ E_z \end{array} ; \begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \end{array} \right)$, les composantes $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ sont des fonctions qui ne

dépendent que de $u = t - \frac{x}{C}$. Soit F une composante de \vec{E} ou de \vec{B} :

$$F = F(u)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{C} \frac{dF}{du} \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dF}{du} \end{cases}$$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \text{ avec } \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \text{ (Onde Plane)}$$

$$\text{Soit } \text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{1}{C} \frac{dB_x}{du}$$

$$\text{Or } \text{div } \vec{B} = 0 \text{ (Eq 3 de Maxwell)} \Rightarrow \frac{dB_x}{du} = 0 \Rightarrow B_x = Cte$$

Cette constante est un champ magnétostatique qui ne nous intéresse pas ici et qu'on considère alors nulle $\Rightarrow B_x = 0$. Soit donc

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

Ainsi le champ magnétique suivant la direction de propagation est nul : \vec{B} est transversal

De même

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{1}{C} \frac{dE_x}{du}$$

$$\text{Or } \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ (Eq 2 de Maxwell)} \Rightarrow \frac{dE_x}{du} = 0 \Rightarrow E_x = \text{Cte} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow E_x = 0$$

Donc le champ électrique est aussi transversal

L'équation de Maxwell-Farady :

$$\operatorname{Rot} \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \quad (1) \text{ s'écrit}$$

$$-\frac{1}{C} \vec{e}_u \wedge \frac{d\vec{E}}{du} = -\frac{d\vec{B}}{du}$$

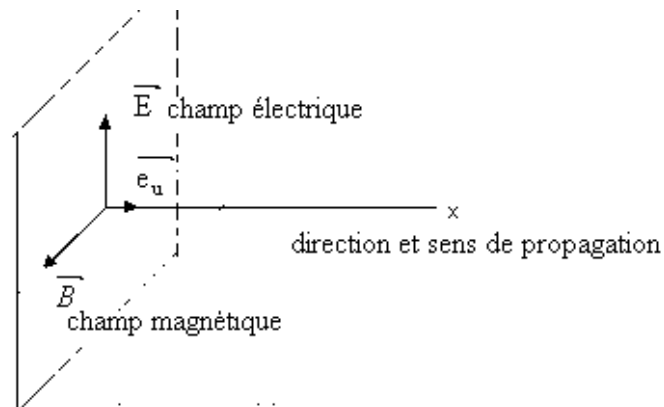
$$\int \frac{d\vec{B}}{du} = \int \frac{1}{C} \vec{e}_u \wedge \frac{d\vec{E}}{du} + \text{cte}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{C} \vec{e}_u \wedge \vec{E} + \text{cte} \quad (\text{avec cte} = 0)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{C} \vec{e}_u \wedge \vec{E}$$

Comme \vec{E} est transversal ($\vec{E} \perp \vec{e}_u$) $\Rightarrow (\vec{e}_u, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct.

En conclusion, la structure d'une O.P.P.E est tel que $(\vec{e}_u, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct :



En fin l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{Rot } \vec{B}(t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \quad (1) \text{ s'écrit}$$

$$-\frac{1}{C} \vec{e}_u \wedge \frac{d\vec{B}}{du} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{du}$$

$$\int \frac{d\vec{E}}{du} = \int -C \vec{e}_u \wedge \frac{d\vec{B}}{du} + cte$$

$$\vec{E} = -C \vec{e}_u \wedge \vec{B} + cte \quad (\text{avec } cte = 0)$$

$$\vec{E} = C \vec{B} \wedge \vec{e}_u$$

Cette relation est identique à la relation précédente. Elle porte le nom de relation de structure d'une O.P.P

En résumé :

Une O.P.P.E dans le sens défini par le vecteur unitaire \vec{e}_u est caractérisée par des vecteurs champ électrique \vec{E} et champ magnétique \vec{B} qui ne dépendent que de la variable $(t - \frac{r \wedge \vec{e}_u}{C})$, vérifiant dans

le vide : $\vec{E} \cdot \vec{e}_u = 0; \vec{B} \cdot \vec{e}_u = 0$; $\vec{B} = \frac{1}{C} \vec{e}_u \wedge \vec{E}$ ou $\vec{E} = C \vec{B} \wedge \vec{e}_u$

Les O.P.P.E sont des ondes transversales (i.e \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à \vec{e}_u) et $(\vec{e}_u, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct.

4- OPPE Monochromatique (ou harmonique) :

4.1- Définition et expression :

Une solution particulière de l'équation de propagation est l'onde plane **dépendante sinusoidalement du temps**. Elle est appelée **Onde Plane Progressive Harmonique**, ou **Monochromatique (O.P.P.H ou O.P.P.M)**.

Considérons une O.E.P.P.H se propageant suivant l'axe xx' , vers les x positifs ; le champ électrique est de la forme

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{C} \right) + \varphi_2 \right] \\ E_z = E_{0z} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{C} \right) + \varphi_3 \right] \end{cases}$$

Ou les amplitudes E_{0y} et E_{0z} ainsi que les phases φ_2 et φ_3 sont des constantes. Le terme en $\omega(t - \frac{x}{C}) + \varphi_{2,3}$ définit la phase de l'onde plane progressive harmonique.

Une O.P.P.H se propageant à la célérité C dans le sens du vecteur unitaire \vec{e}_u est caractérisée par :

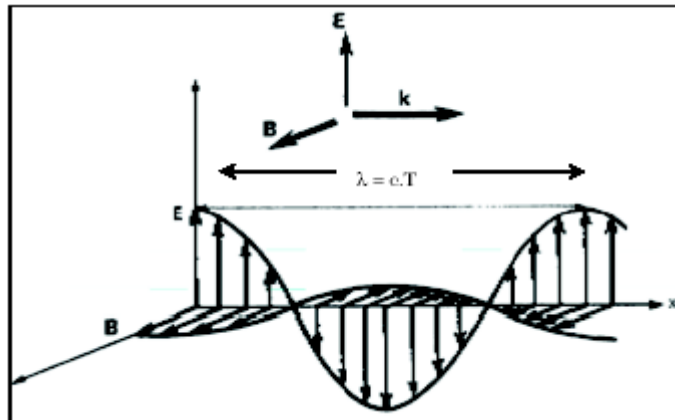
- Fréquence temporelle ν ou sa pulsation temporelle $\omega = 2\pi\nu$

- Sa longueur d'onde $\lambda = CT = \frac{C}{\nu}$ ou son nombre d'onde $\nu = \frac{1}{\lambda}$

- Son vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_u = \frac{\omega}{C} \vec{e}_u$

Une OPPH présente une double périodicité, temporelle de période T et spatiale de période λ . Ainsi pour une OPPH :

- Les champs \vec{E}, \vec{B} sont transversaux ;
- Le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct
- On peut écrire $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$
- Les champs \vec{E} et \vec{B} vibrent en phases.



- Vitesse de phase :

Les points tels que la phase $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi$ est constante définissent à chaque instant un plan perpendiculaire à la direction de propagation définie par le vecteur d'onde \vec{k} , appelé plan équi-phase ou plan d'onde.

On en déduit que le plan équi-phase se déplace à une vitesse appelée vitesse de

phase définie par. $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$

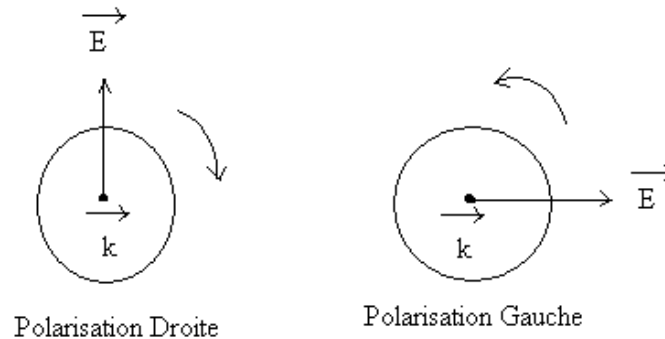
Dans le vide on a $\omega = kC$, la vitesse de phase est donc constante, indépendante de la fréquence de l'onde

$$V_\varphi = C$$

4-2- Polarisation d'une O.P.P.H

La polarisation d'une O.P.P.H est définie à partir de son vecteur \vec{E} . C'est la nature de la courbe décrite par l'extrémité de \vec{E} dans le plan d'onde.

Par convention, le sens de rotation (Gauche ou Droite) est défini pour un observateur qui reçoit l'onde :



Conventionnellement le plan (\vec{k}, \vec{E}) est appelé plan d'oscillation et le plan (\vec{k}, \vec{B}) le plan de polarisation..

Soit une O.P.P.H se propageant suivant l'axe xx' , vers les x positifs. Moyennant un choix judicieux de l'origine des dates, on peut écrire le champ \vec{E} sous la forme :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

Dans le plan $x=0$, l'extrémité de \vec{E} décrit la courbe d'équation $\begin{cases} E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t) \quad ; \quad \frac{E_z}{E_{0z}} = \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

$$(a) \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{E_z}{E_{0z}} - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos(\varphi)$$

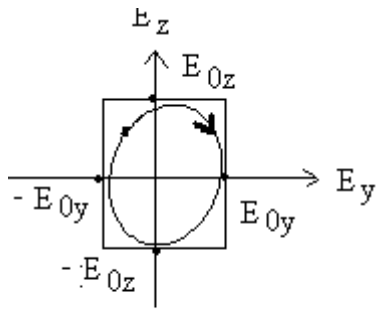
$$(b) \cos(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{0y}} \sin(\varphi)$$

$$(a)^2 + (b)^2 = \sin^2(\varphi) = \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \frac{E_z}{E_{0z}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos(\varphi)$$

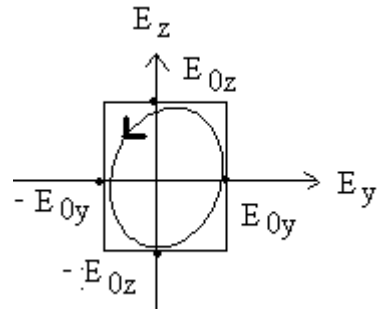
$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \frac{E_z}{E_{0z}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)}$$

Equation d'une ellipse, le sens de parcours dépend du signe de $\sin(\varphi)$

$\sin(\varphi) < 0 :$



$\sin(\varphi) > 0 :$

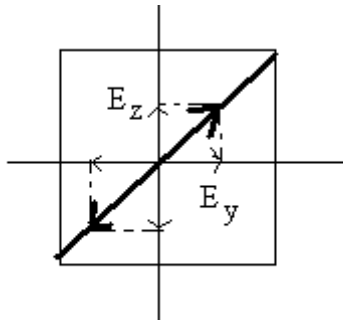


Ainsi dans le cas général, une O.P.P.H est polarisée elliptiquement.

Cas particuliers :

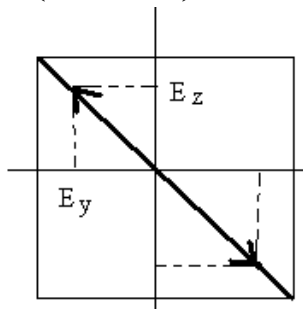
•
 $\varphi = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_z}{E_{0z}} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_z}{E_{0z}} \Rightarrow \frac{E_y}{E_z} = \frac{E_{0y}}{E_{0z}} = Cte > 0$$

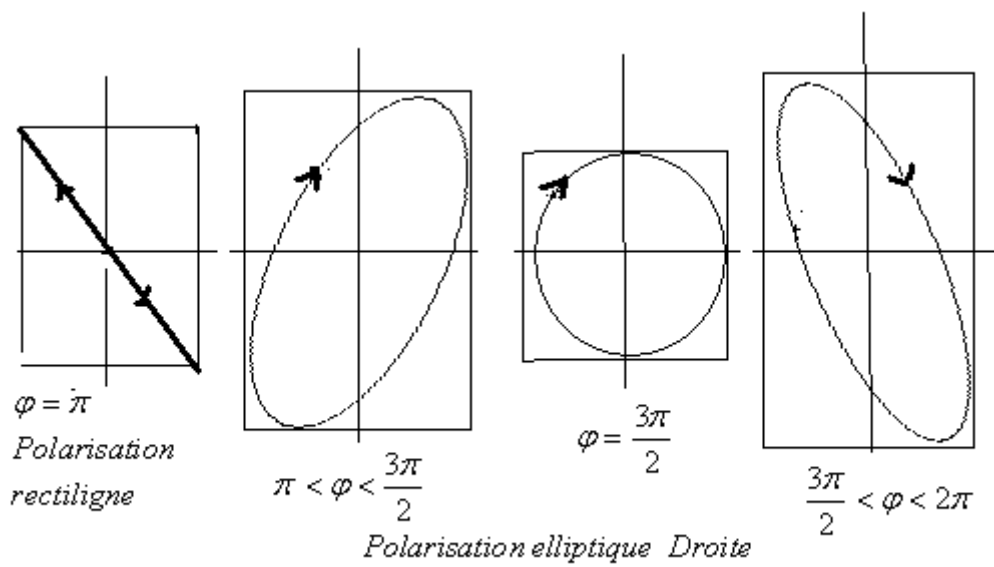
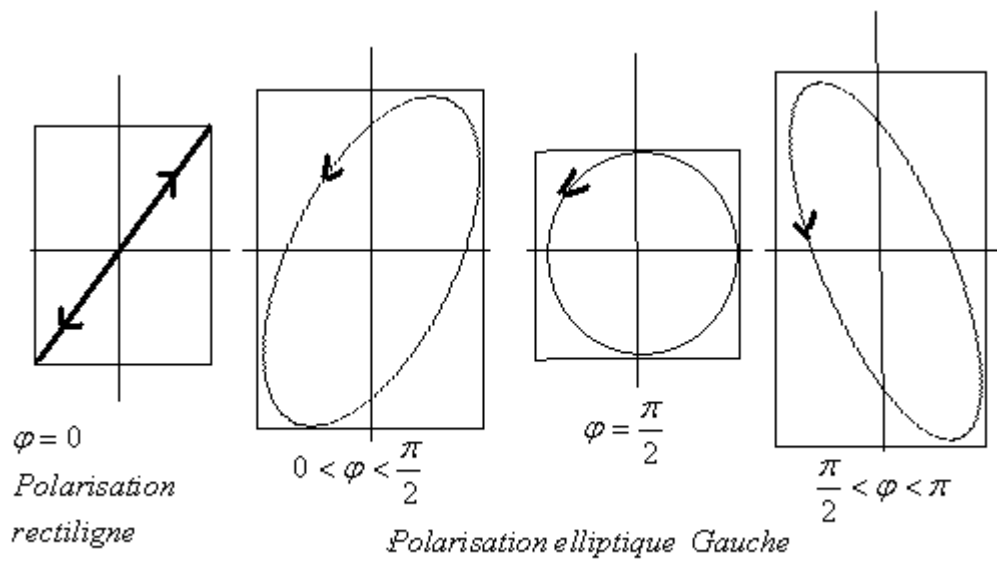


•
 $\varphi = \pi$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{0y}} + \frac{E_z}{E_{0z}} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{E_y}{E_{0y}} = -\frac{E_z}{E_{0z}} \Rightarrow \frac{E_y}{E_z} = -\frac{E_{0y}}{E_{0z}} = Cte < 0$$



4.3-Différents états de polarisation d'une O.P.P.H :



Fin
Bonne chance

B-Enoncés des TD.

Electricité II (Série N°1)

I- Rappels :

a) Analyse vectorielle (Coordonnées Cartésiennes) :

Soit f une fonction scalaire, on définit son vecteur gradient par :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Soit \vec{A} une fonction vectorielle de composantes (A_x, A_y, A_z) , on définit la divergence

par :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

On définit le rotationnel de \vec{A} par :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Le Laplacien vectoriel de \vec{A} est le vecteur ayant pour composantes les Laplaciens scalaires des composantes de \vec{A} :

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k}$$

b) Quelques relations utiles en électromagnétisme :

Soient m et n des nombres complexes, f (M) et g(M) des fonctions scalaires,

$\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$ des fonctions vectorielles en tout point de l'espace :

- | | |
|---|---|
| 1) $\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} f = \vec{0}$ | 2) $\text{div} \vec{\text{rot}} \vec{A} = 0$ |
| 3) $\vec{\text{grad}}(mf + ng) = m \vec{\text{grad}}(f) + n \vec{\text{grad}}(g)$ | 4) $\text{div}(m\vec{A} + n\vec{B}) = m \text{div}(\vec{A}) + n \text{div}(\vec{B})$ |
| 5) $\vec{\text{grad}}(fg) = f \vec{\text{grad}}(g) + g \vec{\text{grad}}(f)$ | 6) $\text{div}(\vec{\text{grad}}(f)) = \Delta f$ |
| 7) $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{B})$ | 8) $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ |
| 9) $\text{div}(f \vec{A}) = f \text{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{\text{grad}}(f)$ | 10) $\vec{\text{rot}}(f \vec{A}) = f \vec{\text{rot}}(\vec{A}) + \vec{\text{grad}}(f) \wedge \vec{A}$ |

II- Exercices :

Exercice 1 : En utilisant les coordonnées cartésiennes, établir les relations 1), 2), 9) et 10) ci-dessus.

Exercice 2 : Soient $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormée et $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ vecteur unitaire.

Calculer $\text{div} \vec{u}$ et $\vec{\text{rot}} \vec{u}$.

Exercice 3 : On donne les deux champs de vecteurs $\vec{A}_1 = (3x - 2y)\vec{i} + (5x + y + z)\vec{j} + 8z\vec{k}$ et $\vec{A}_2 = \vec{i}e^{x+y} + \vec{j}e^{x+y} + \vec{k}e^z$, calculer $\text{div}(\vec{A}_1)$, $\text{div}(\vec{A}_2)$, $\vec{\text{rot}}(\vec{A}_1)$ et $\vec{\text{rot}}(\vec{A}_2)$

Electricité II (Série N°2)

Exercice1 : Soit une spire filiforme de rayon R , de centre O , parcourue par un courant d'intensité I . Calculer le champ magnétique \vec{B} créée en un point M de l'axe de la spire situé à une distance x de O .

Exercice2 : On considère un solénoïde de longueur L comportant N spires jointives de même rayon R qui sont régulièrement réparties.

- 1- Déterminer le champ magnétique créée en un point quelconque de l'axe du solénoïde en fonction des angles θ_1 et θ_2 sous les quels du point considéré on voit les faces terminales du solénoïde.
- 2- Que devient l'expression du champ magnétique dans le cas du solénoïde infiniment long ($L \gg R$).

Exercice 3 : Soit un segment P_1P_2 parcouru par un courant I . On appellera α_1 et α_2 les angles entre la perpendiculaire au fil issu d'un point $M(x)$ situé à la distance x du segment et les droites joignant M aux extrémités P_1 et P_2 .

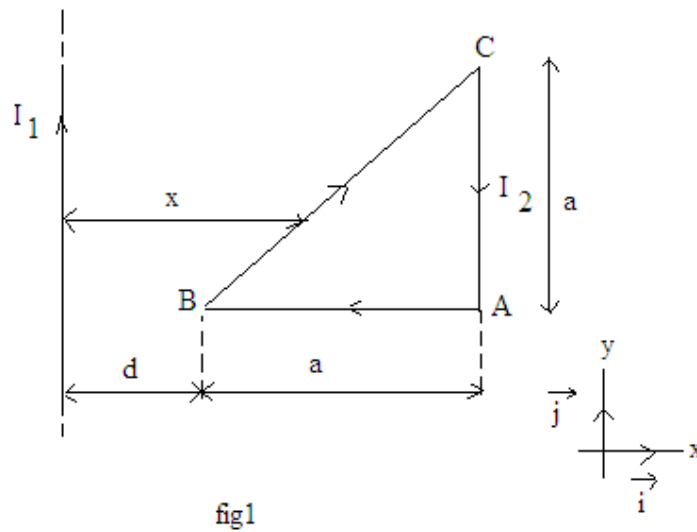
- 1- Calculer le champ magnétique créée par ce segment en tout point $M(x)$.
- 2- En déduire le champ magnétique créer par un fil indéfini.

Exercice 4 : Soit un fil rectiligne infiniment long de diamètre $2R$ et d'axe oz , de vecteur unitaire \vec{k} , parcouru par un courant d'intensité i , supposé uniformément dans la section du conducteur.

- 1- trouver le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M situé à la distance r de l'axe du fil ($r \leq R$ et $r \geq R$).
- 2- Représenter l'évolution de $B(r)$ sur un graphe.
- 3- Sachant que le potentiel vecteur s'écrit $\vec{A}(M) = A(r)\vec{k}$ et en utilisant la symétrie cylindrique, montrer que $B(r) = -\frac{\partial A(r)}{\partial r}$.
- 4- Trouver l'expression de $A(r)$ ($r \leq R$ et $r \geq R$).

Exercice 5 : Un cadre ayant la forme d'un triangle rectangle isocèle ($AB=CA=a$), est placé tel que son angle non droit B située à la distance d d'un fil indéfini parcouru par un courant d'intensité I_1 . L'ensemble est placé dans le vide (fig1).

- 1- Exprimer à l'aide du théorème d'Ampère le champ magnétique $\vec{B}_1(x)$ créée par le fil en tout point situé à la distance x du fil.
- 2- Exprimer le flux magnétique capté par le cadre en fonction de μ_0 , I_1 , a , et d .
- 3- Le cadre est maintenant parcouru par un courant d'intensité I_2 , déterminer les forces \vec{F}_{AC} , \vec{F}_{AB} et \vec{F}_{BC} s'exerçant respectivement sur les côtés AC, AB et BC.



Electricité II (Série N°3)

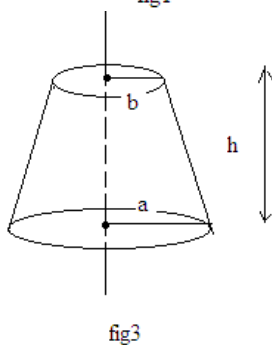
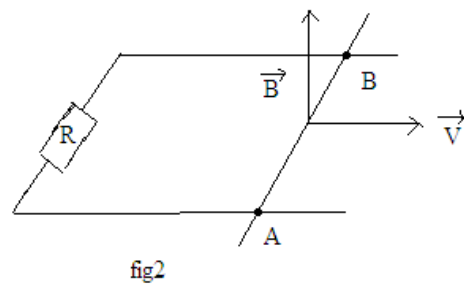
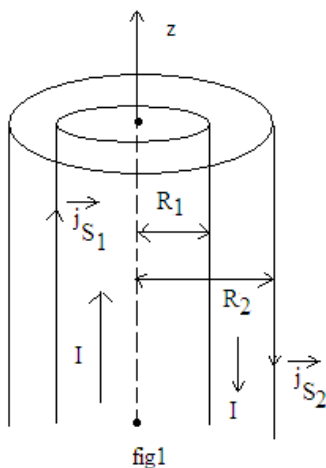
Exercice 1 : soit un câble coaxial formé de deux cylindres de longueur infinie, de rayons R_1 et R_2 , parcourus par des courants surfaciques \vec{j}_{S1} et \vec{j}_{S2} colinéaires à l'axe oz des deux cylindres. Le cylindre intérieur est alimenté par une intensité I , qui ressort par le cylindre extérieur (fig1).

- 1- Calculer le champ magnétique \vec{B} dans tout l'espace.
- 2- En déduire la densité volumique d'énergie magnétique dans tout l'espace.
- 3- Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans l'espace situé entre deux plans de côtes z et $z+L$.
- 4- En déduire l'induction propre \mathcal{L} par unité de longueur de ce câble coaxial.

Exercice 2 : On déplace une barre AB de longueur L , à vitesse \vec{V} sur deux rails horizontaux, la résistance électrique de la barre et des rails est négligeable devant la résistance R introduite dans le circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire au plan des rails (fig2).

- 1- Déterminer le champ électromoteur \vec{E}_m
- 2- Calculer l'intensité dans le circuit.
- 3- Calculer la puissance dissipée par effet joule dans la résistance R .

Exercice 3 : Calculer la résistance d'un conducteur tronconique de résistivité ρ de rayons a et b et de hauteur h (fig. 3).



Exercice 4 :

Soit un milieu de résistivité ρ comprise entre deux demis sphères S_1 et S_2 de rayons a et b ($b > a$). Déterminer la résistance de la portion située entre S_1 et S_2 si les lignes de champs sont radiales (fig.4)

Exercice 5 :

On réalise le circuit représenté sur la figure 5. Le générateur a une résistance interne négligeable.

- 1- A l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur k . Déterminer les courants i_1 dans la résistance R et i_2 dans la bobine. Au bout d'un temps très long, on ouvre l'interrupteur k .
- 2- Calculer le courant i circulant dans la bobine.
- 3- Calculer la ddp V_A-V_B .
- 4- Montrer que pendant un laps de temps assez bref devant $\tau = \frac{L}{R+r}$, V_A-V_B peut être supérieur à E si les paramètres sont bien choisis.

Exercice 6 :

On considère le circuit de la figure 6. L'ensemble des deux enroulements couplés par mutuelle inductance est un transformateur idéal ($M^2 = L_1 * L_2$). On néglige la résistance des enroulements. L'impédance \bar{Z} est l'impédance de charge du secondaire.

- 1- Calculer l'impédance d'entrée définie par $\bar{E} = \bar{Z}_e \bar{I}_p$. Simplifier son expression dans le cas où \bar{Z} est négligeable devant $jL_2\omega$
- 2- Calculer la tension U aux bornes du circuit secondaire.

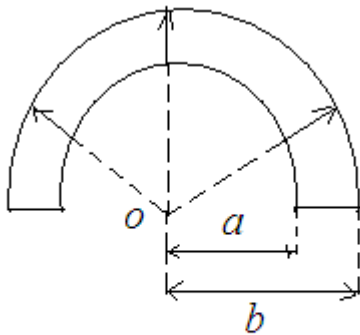


Fig.4

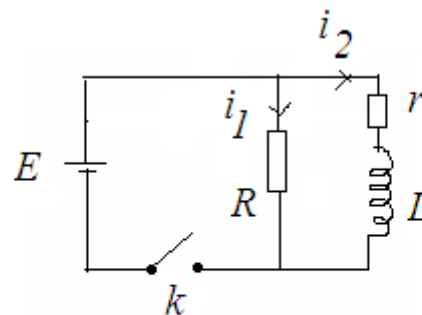


Fig.5

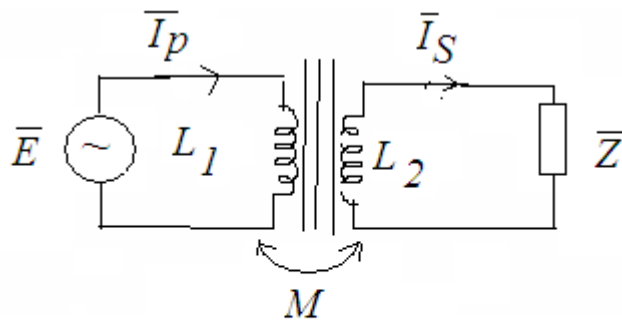


Fig.6

Electricité II (Série N°4)

I- On constitue un montage à l'aide de trois impédances \bar{Z}_A, \bar{Z}_B et \bar{Z}_C branchées comme indiqué sur le schéma (fig.1). Ce montage est alimenté par une source de tension sinusoïdale $u(t) = u_0 \cos \omega t$

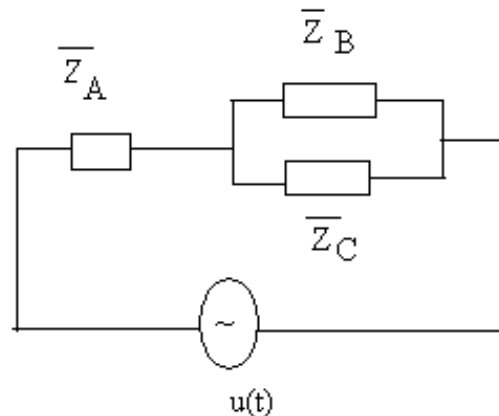


Fig. 1

- 1) Déterminer en fonction de $\bar{u}, \bar{Z}_A, \bar{Z}_B$ et \bar{Z}_C le courant \bar{i}_A qui circule dans l'impédance \bar{Z}_A
 - 2) Déterminer en fonction de $\bar{u}, \bar{Z}_A, \bar{Z}_B$ et \bar{Z}_C le courant \bar{i}_C qui circule dans l'impédance \bar{Z}_C
 - 3) Comment peut-on construire \bar{Z}_A, \bar{Z}_B pour que le courant \bar{i}_C soit indépendant de \bar{Z}_C
- II-On considère le circuit électrique présenté sur la fig.2

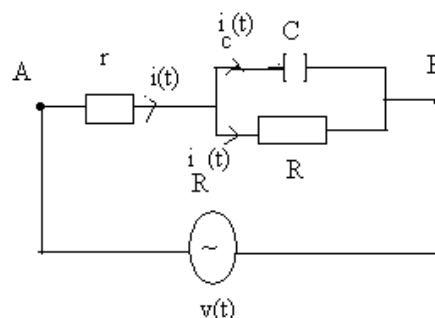


Fig. 2

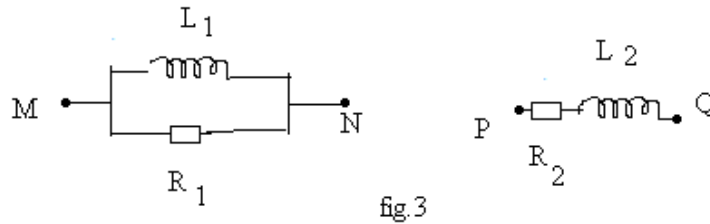
- 1) Etablir l'expression de l'impédance complexe \bar{Z}_{AB} de ce circuit (module et argument).
- 2) Entre les bornes A et B on applique la tension sinusoïdale $v(t) = V_{\max} \cos \omega t$, déterminer par la méthode des nombres complexes, le courant principal $i(t)$, on posera $i(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$, φ représente le déphasage du courant par rapport à la tension.

3) Déterminer la tension $V_{MB}(t)$ aux bornes de l'association de R et C en parallèle en fonction de r, R, C, et ω .

4) Déterminer le courant $i_C(t) = I_{CM} \cos(\omega t + \theta)$.

5) Entre les bornes A et B on superpose maintenant à la tension sinusoïdale précédente une tension continue V_0 soit $v(t) = V_0 + V_{\max} \cos \omega t$. Déterminer les courants $i_C(t)$ et $i_R(t)$

III- 1) On dispose de deux dipôles (fig.3): le dipôle MN constitué d'une résistance R_1 et d'une inductance pure L_1 associées en parallèle, et le dipôle PQ constitué d'une résistance R_2 et d'une inductance pure L_2 associées en série. Et d'une tension sinusoïdale de pulsation ω .



- En régime sinusoïdal, déterminer R_2 et L_2 en fonction de R_1 , L_1 et ω pour que ces deux dipôles soient équivalents.
 - Indiquer alors la pulsation ω_0 pour laquelle on a $\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2}$
 - Calculer ω_0 si $R_1=100\Omega$ et $L_1=0.01H$.
- 2) On associe les deux dipôles équivalents précédents en série comme indiqué sur la fig.4. On applique aux bornes de MQ une tension sinusoïdale $u(t) = U_M \cos \omega t$. On écrira les expressions demandées sous la forme la plus simple en tenant compte des hypothèses et en fonction des grandeurs U_M , R_1 et L_1 .
- Déterminer l'impédance complexe du dipôle ainsi constitué.
 - Donner l'expression de l'intensité $i(t)$ sous forme : $i(t) = I_M \cos(\omega t + \Phi)$
 - Déterminer en fonction de \bar{U} les expressions de \bar{U}_1 et \bar{U}_2 , grandeurs complexe associées aux tensions $u_1(t) = u_{MN}$ et $u_2(t) = u_{NQ}$
 - Déterminer les grandeurs complexe associées aux intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$
- 3) Calculer la capacité que l'on doit mettre en série dans ce circuit pour que l'intensité $i(t)$ soit en phase avec la tension $u(t)$ pour la pulsation ω_0

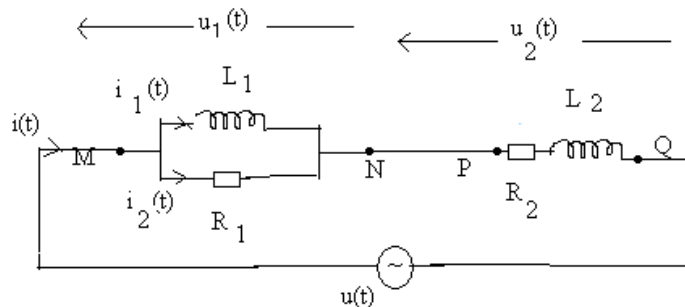
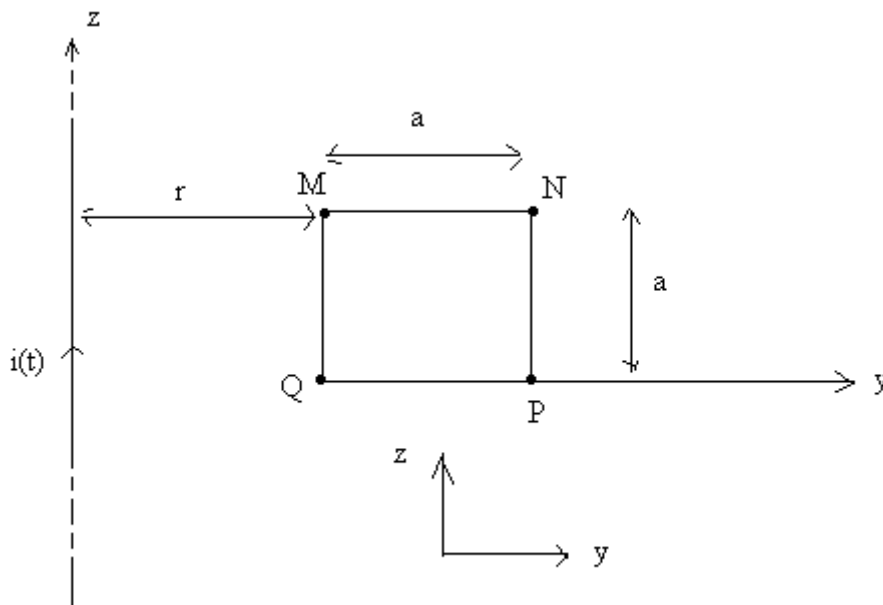


Fig.4

Electricité II (Série N°5)

Exercice1 : On considère un fil conducteur rectiligne placé dans le vide, parcouru par un courant alternatif de basse fréquence ω , d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

- 1- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ créé par le fil à l'instant t en un point M .
- 2- En déduire le champ électromoteur $\vec{E}_m(M, t)$:
 - a- par l'intermédiaire du potentiel vecteur.
 - b- à l'aide de l'équation de Maxwell Faraday..
- 3- Dans le plan défini par le fil et le point M situé à la distance r du fil, on place une petite boucle conductrice carrée, de côté a et de résistance R . Etablir l'expression de la force électromotrice $e(t)$ induite dans la boucle :
 - a- à partir de l'expression de E_m
 - b- à partir du flux magnétique.
- 4- En déduire le courant qui circule dans la boucle.



Exercice2 : On superpose dans le vide deux ondes planes monochromatiques de même fréquence, se propageant dans la même direction ox et dans le même sens \hat{i} , l'une circulaire droite, l'autre circulaire gauche, on demande d'étudier l'onde résultante dans l'hypothèse de composantes sur oy en phase.