Université Mohamed Premier

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

$$\iint \vec{B} . d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l}$$

Examens d'électromagnétisme avec corrections

Filières:
SMPC,SMA(S3)
SMI S4

2015/2016

Najim MANSOUR
Pr. Rachid El BOUAYADI

APPROVED

Examen d'électromagnétisme
Session normale
Durée : 1H 30min

Exercice 1. Un fil infini d'axe Oz est parcouru par un courant I. Un circuit carrée $PQRS$ de côté a est placé dans le plan xOz (Fig.1).

1. Calculer le champ magnétique créé par le fil infini en un point M situé à la distance x du fil. Indiquer le sens du champ $\vec{B}$.
2. On oriente le circuit selon le sens horaire, le vecteur normal est $\vec{n} = \vec{e_y}$. Déterminer le flux du champ magnétique créé par le fil infini à travers la spire carrée.
3. Le cadre s'éloigne du fil avec une vitesse $\vec{v}$ constante, telle que $\vec{v} = v\vec{e_x}$, deux des côtés de la boucle restent parallèles au fil. De quel type d'induction s'agit-il ? Déterminer la force électromotrice d'induction dans la boucle, le résultat est à exprimer en fonction de $x(t)$ et $v(t)$.
4. Enoncer la loi de modération de *Lenz*. Préciser le sens du courant i induit, justifier votre réponse.
5. On note R la résistance électrique de la spire et on néglige son inductance. Déterminer l'expression de i en fonction de $x(t)$ et $v(t)$.
6. Déterminer la force de *Laplace* exercée par le fil sur le côté PQ de la spire carrée.
7. En déduire l'expression de la résultante $\vec{F}$ des forces de Laplace exercées sur la boucle. Le sens de cette résultante était-il prévisible ? justifier votre réponse.
8. Calculer le travil élementaire dW de la force résultante $\vec{F}$ lors d'un déplacement dx. En déduire l'expression de la puissance des forces de Laplace.

Exercice2. Etude temporelle en sinus forcé : On soumet le circuit de la figure 2 à une source de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos\omega t$.

1. Etablir l'équation différentielle temporelle vérifiée par $i(t)$. Est-il simple de résoudre directement l'équation ?
2. Pour simplifier la résolution de l'équation, on va utiliser la notation complexe. Préciser dans quel contexte on peut utiliser cette méthode.
3. Résoudre l'équation différentielle précédente en utilisant la méthode complexe. A quoi correspond cette solution ?
4. Redonner la solution temporelle correspondant à cette solution complexe.
5. Résoudre l'équation différentielle par la construction de *Fresnel*
6. Quel est alors l'intérêt de la représentation de Fresnel ?

UNIVERSITÉ MOHAMMED PREMIER — Filière : SMPC-SMA (S 3)
FACULTÉ PLURIDISCIPLINAIRE DE NADOR — Année 2015/2016

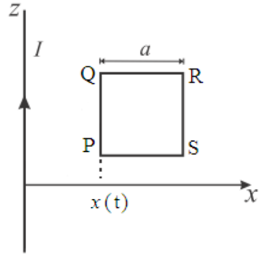


FIGURE 1 –

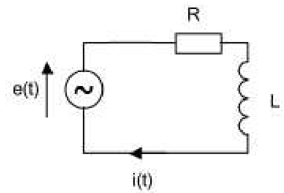


FIGURE 2 –

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filières : SMPC-SMA (S3), année 2015/2016

Session normale

Exercices 1.

1. Voir TD. $\left\{B_{fil} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\right\}$ ou $\left\{\vec{B}_{fil} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{e}_y\right\}$

2. $\Phi = \iint \vec{B}_{fil}.d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.dx.dy = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_{x(t)}^{x(t)+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}[\ln x]_{x(t)}^{x(t)+a}$

$$\rightarrow \left\{\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{x(t)+a}{x(t)}\right).\right\}$$

3. $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dx}.\frac{dx}{dt}\Phi = -v(t)\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{x(t)+a}{x(t)}\right)\right) = -v(t).\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(\frac{x+a}{x}\right)'.\frac{x}{x+a}$

$$\rightarrow \left\{e = \frac{\mu_0 Ia^2}{2\pi}v(t).\left(\frac{1}{x(x+a)}\right)\right\}.$$

4. La boucle s'éloigne du fil, donc $\vec{B}$ est de plus en plus faible. Le courant induit doit donc créer un champ $\vec{B}_{ind}$ qui va compenser la diminution du $\vec{B} = \overrightarrow{B_{fil}}$. Le $\vec{B}_{ind}$ doit être suivant $\vec{e}_y$, le courant induit est donc dans le sens horaire.

5. $e = Ri \rightarrow$ $\left\{i = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R}v(t).\left(\frac{a}{x(x+a)}\right)\right\}$.

6. $\vec{F}_{PQ} = i\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{B} = ia.\vec{e}_z\wedge\frac{\mu_0 I}{2\pi x}.\vec{e}_y$; $\vec{B} = \overrightarrow{B_{fil}}$

$$\left\{\vec{F}_{PQ} = -\frac{\mu_0 i.Ia}{2\pi x}\vec{e}_x\right\}.$$

7. $\vec{F}_{QR} + \vec{F}_{SP} = 0$

Donc : $\vec{F} = \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{RS}$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 iIa}{2\pi x}\vec{e}_x + \frac{\mu_0 iIa}{2\pi(x+a)}.\vec{e}_x$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 iIa}{2\pi}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}\right)\vec{e}_x$$

$$\left\{\vec{F} = -\frac{\mu_0 iIa^2}{2\pi}.\frac{1}{x(x+a)}.\vec{e}_x\right\}$$

Le sens de $\vec{F}$ est selon $-\vec{e}_x$, $\vec{F}$ freine le cadre, on pouvait s'y attendre d'après la loi de Lenz : la boucle doit être parcourue par un courant induit dont les effets s'opposeront aux causes qui lui ont donnée naissance.

1.

$$\left\{dW = \vec{F}.d\vec{x} = -\frac{\mu_0 iIa^2}{2\pi}.\frac{1}{x(x+a)}dx\right\}$$

$$\left\{P = \frac{dW}{dt} = -\frac{\mu_0 iIa^2}{2\pi}.\frac{1}{x(x+a)}.v(t)\right\}$$

Exercice 2.

$e(t) = E\cos\omega t$

1. $e(t) = Ri + L\frac{di}{dt}$ Ou $L\frac{di}{dt} + Ri = E\cos\omega t$ (1), il est possible de résoudre analytiquement cette équation, sauf qu'elle est un peu dure.
2. Méthode complexe utilisable en régime sinusoïdale forcé avec une excitation sinusoïdale.

3. $e(t) = E\cos\omega t$, le courant doit forcément s'écrire : $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi)$

$\tilde{\imath} = Ie^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\tilde{e} = Ee^{j\omega t}$

L'équation (1) donne :

$$-LI\omega\sin(\omega t+\varphi) + RI\cos(\omega t+\varphi) = E\cos\omega t$$

$$LI\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + RI\cos(\omega t+\varphi) = E\cos\omega t$$

En notation complexe, cette dernière équation devient : $LI\omega e^{j\varphi}e^{j\frac{\pi}{2}} + RIe^{j\varphi} = E$ (2)

$$\rightarrow jLI\omega(\cos\varphi + j\sin\varphi) + RI(\cos\varphi + j\sin\varphi) = E$$

$$\rightarrow jLI\omega\cos\varphi - LI\omega\sin\varphi + RI\cos\varphi + jRI\sin\varphi = E$$

$$\rightarrow \begin{cases} RI\cos\varphi - LI\omega\sin\varphi = E & (a) \\ LI\omega\cos\varphi + RI\sin\varphi = 0 & (b) \end{cases}$$

$$(b) \rightarrow \tan\varphi = -\frac{LI\omega}{RI} \quad \rightarrow \quad \left\{\varphi = -Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right\}$$

$$(a)^2 + (b)^2 \quad \rightarrow \quad R^2I^2 + L^2I^2\omega^2 = E^2$$

$$\rightarrow \left\{I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\right\}$$

L'équation (2), peut également être résolue de la manière suivante :

$$LI\omega e^{j\varphi}e^{j\frac{\pi}{2}} + RIe^{j\varphi} = E$$

$$\rightarrow \quad (RI + jLI\omega)e^{j\varphi} = E$$

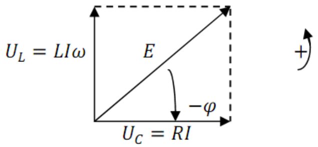
C.-à-d.: $Ee^{-j\varphi} = I(R + jL\omega)$

$$\rightarrow \begin{cases} E = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \\ -\varphi = Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \left\{ I = \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \right\} \quad \text{Et} \quad \left\{ \varphi = -Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right) \right\}$$

4. $i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right)$

5. On a : $i = I\cos(\omega t + \varphi)$, donc $U_L = L\frac{di}{dt} = LI\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ et
   $U_R = Ri = RI\cos(\omega t + \varphi)$
   La loi des mailles vectorielle est : $\vec{u} = \overrightarrow{u_L} + \overrightarrow{u_R}$, le doagramme des Fresnel est donc :



$$\rightarrow -\tan\varphi = \frac{L\omega}{R} \quad (1) \qquad \rightarrow \varphi = -Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

$$R^2I^2 + L^2I^2\omega^2 = E^2$$

$$\rightarrow \left\{ I^2 = \frac{E^2}{R^2 + L^2\omega^2}. \right\}$$

6. La Méthode de Fresnel facilite la résolution de l'équation différentielle en régime sinusoïdale forcé

Examen d'électromagnétisme
Session de rattrapage
Durée : 1H 30 min

– Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.
– Les notations employées dans l'énoncé doivent être respectées.

Exercice 1. On considère deux solénoïdes (1 et 2) très longs et co-bobinés (c'est à dire co-enroulés dans le même sens sur un même cylindre, mais n'ayant entre eux aucune connection électrique, car ils sont recouverts d'un vernis isolant). Ces deux solénoïdes, dont les nombres totaux de spires sont respectivement N_1 et N_2, ont donc tous deux le même rayon r et on supposera qu'ils ont également la même longueur l. Le solénoïde 1 est parcouru par le courant i_1.

1. Trouver l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde 1 en un point M de son axe.
2. On suppose que les deux solénoïdes sont "infini", déterminer les expressions de L_1 et L_2, les coefficients d'auto-induction des solnoïdes 1 et 2.
3. Déterminer les expressions de M_{12} et de M_{21}, les coefficients d'inductance mutuelle entre 1 et 2.
4. Quelle relation existe-t-il entre le produit $L_1 * L_2$ et M_{12}.
5. Calculer numériquement ces quatres coefficients dans le cas où : $r = 2,5cm$, $l = 40,7cm$, $N_1 = 200$ et $N_2 = 100$. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}H/m$.
6. Pour utiliser ce système comme transformateur, on alimente le solénoïde 1 avec un générateur de tension alternative qui impose entre ses bornes la tenion $v_1 = V_0 \cos \omega t$. Sachant que $v_i = \frac{d\phi_i}{dt}$ (en négligeant la résistance interne des deux solénoïdes), trouver l'expression de la tension v_2 aux bornes du solénoïde 2 en fonction de N_1, N_2 et v_1.
7. L'énergie magnétique stockée dans le circuit entier est $\xi_{mag} = \iiint\limits_V \frac{B^2}{2\mu_0}\, dV$, avec $B = B_1 + B_2$, exprimer ξ_{mag} en fonction de L_1, L_2, i_1, i_2 et M_{12}.

Exercice 2. On associe en série un condensateur de capacité $C = 10nF$ et un conducteur ohmique de résistance $R = 1k\Omega$. Cette association est parcourue par un courant sinusoïdale $i = I_0 \cos \omega t$ de fréquence $f = 10kHz$.

1. Calculer les amplitudes et les déphasages par rapport à l'intensité des tensions u_R et u_c. $I_0 = 2,66mA$
2. En utilisant les notations complexes calculer le module et l'argument de l'impédance équivalente Z_{eq} de l'ensemble des deux dipôles.
3. Tracer les vecteurs de Fresnel représentatifs des tension u_R, u_c et $u = u_R + u_c$. En déduire le module et l'argument de Z_{eq}.

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filière : SMPC (S3), année 2014-2015

Session de rattrapage

Exercice 1.

1. Voir votre TD $\vec{B}_{sol.} = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2l}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\vec{u}_z$

2. $\vec{B}_{Sol.Infini} = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{l}\vec{u}_z$

$$\Phi_{11} = N_1.\iint \frac{\mu_0 I_1 N_1}{l} dS_1 = \frac{\mu_0 I_1 {N_1}^2}{l}.\pi {R_1}^2 = L_1 I_1$$

$$\rightarrow \left\{L_1 = \frac{\mu_0 {N_1}^2 \pi {R_1}^2}{l}\right\} \quad et \quad \left\{L_2 = \frac{\mu_0 {N_2}^2 \pi {R_2}^2}{l}\right\}$$

3.

$$\Phi_{12} = N_{2.}\iint \vec{B}_1.d\vec{S}_2 = N_2 B_1 S_2 = N_2\left(\frac{\mu_0 I_1 N_1}{l}\right)\pi R^2, \qquad (R_1 = R_2 = R)$$

$$\Phi_{12} = \mu_0.\frac{N_1 N_2}{l}.I_1 \pi R^2 = M_{12} I_1 \quad \rightarrow \quad M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R^2}{l}$$

De même pour Φ_{21}, on trouve finalement :

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R^2}{l}$$

4.

$L_1.L_2 = \frac{\mu_0 N_1^2 \pi R^2}{l}.\frac{\mu_0 N_2^2 \pi R^2}{l}$, donc : $\sqrt{L_1.L_2} = \frac{\mu_0 \pi R^2}{l} N_1 N_2 = M = M_{12} = M_{21}.$

5.

$$\left.\begin{array}{c} R = 2{,}5\,cm \\ l = 40{,}7cm \\ N_1 = 200 \\ N_2 = 100 \\ \mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 = \dfrac{4\pi.10^{-7} \times (200)^2.\pi(2{,}5.10^{-2})^2}{40{,}7.10^{-2}} \approx 0{,}24\,mH \\ \\ et\ L_2 = 0{,}06\,mH \\ \\ M = \dfrac{4\pi.10^{-7} \times (100 \times 200).\pi(2{,}5.10^{-2})^2}{40{,}7.10^{-2}} \approx 0{,}12mH \end{array}\right.$$

6.

Système transformateur u_1, u_2 ?

$$u_1 = U_0 \cos\omega t$$

En négligeant les résistances des deux bobines $r_1\ et\ r_2$

$$\left\{\begin{array}{l} v_1(t) = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \quad (1) \\ v_2(t) = L_2\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \quad (2) \end{array}\right. \qquad car \quad v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} + r_1 i_1 \quad avec\ r_1 = 0.$$

De la relation (2) , on a :

$$\rightarrow \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L_2}\left(v_2 - M\frac{di_1}{dt}\right) = \frac{v_2}{L_2} - \frac{M}{L_2}.\frac{di_1}{dt}$$

L'équation (1) devient :

$$v_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}\left(v_2 - M\frac{di_1}{dt}\right)$$

$$\rightarrow v_1(t) = \frac{M}{L_2}v_2(t) + \frac{di_1}{dt}\underbrace{\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2}\right)}_{=0} \quad car\ M = \sqrt{L_1 L_2}$$

et

$$\frac{M}{L_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R^2}{l} \times \frac{l}{\mu_0 {N_2}^2 \pi R^2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\rightarrow \quad v_1(t) = \frac{N_1}{N_2} v_2(t) \quad \rightarrow \quad v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} v_1(t).$$

7.

$$dE_{mag.} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \rightarrow \quad E_{mag.} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dv$$

$$E_{mag.} = \frac{(B_1 + B_2)^2}{2\mu_0}.S.l$$

$$E_{mag.} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l} + \frac{\mu_0 N_2 i_2}{l}\right)^2.S.l$$

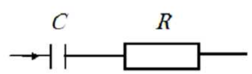
$$E_{mag.} = \frac{\mu_0}{2l^2}\left({N_1}^2{i_1}^2 + {N_2}^2{i_2}^2 + 2N_1 N_2 i_1 i_2\right).S.l$$

$$E_{mag.} = \frac{\mu_0 {N_1}^2 {i_1}^2\,\pi R^2}{2l} + \frac{\mu_0 {N_2}^2 {i_2}^2\,\pi R^2}{2l} + \frac{\mu_0 N_1 N_2\, i_1 i_2\,\pi R^2}{l}$$

$$\left\{E_{mag.} = \frac{1}{2}L_1{i_1}^2 + \frac{1}{2}L_2{i_2}^2 + M i_1 i_2\right\}$$

Exercice 2.

1)



$$i = I_0 \cos\omega t \ ; \qquad C = 10nF \quad et \quad R = 1k\Omega$$

- $u_R = Ri = RI_0 \cos\omega t \qquad \left\{\begin{array}{c} U_R = RI_0 = 10^3.2{,}66.10^{-3} = 2{,}66V \\ \varphi_R = 0 \end{array}\right\}$
- On a $i_C = C.\frac{du_C}{dt}$

$\rightarrow u_C = \frac{1}{C}\int i_C\,dt = \frac{1}{C}\int I_0 \cos\omega t\ dt$, car $i_C = i$

$$u_C = \frac{I_0}{C\omega}\sin\omega t \quad \rightarrow \quad \left\{u_C = \frac{I_0}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\begin{cases} U_C = \frac{I_0}{C\omega} = \frac{2{,}66.10^{-3}}{10.10^{-9}.2\pi.10^4} = \frac{2{,}66.10^1}{2\pi} \approx 4{,}43V \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2)

$$\tilde{u} = \tilde{u}_R + \tilde{u}_C = RI_0 e^{j\omega t} + \frac{I_0}{C\omega} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

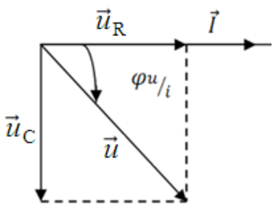
$$\tilde{u} = I_0 e^{j\omega t}\left(R + \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\left\{\tilde{u} = I_0\left(R - \frac{j}{C\omega}\right) e^{j\omega t}\right\}$$

$$\left\{Z_{eq} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{\imath}} = R - \frac{j}{C\omega}\right\}; \quad \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \approx 1879{,}6\Omega; \end{cases}$$

$$\varphi = Actg(Z_{eq}) = -Actg\left(\frac{1}{RC\omega}\right) \approx -57{,}83° = -1rad.$$

3)



En utilisant le théorème de Pythagore : $U^2 = {U_R}^2 + {U_C}^2$

$$\begin{cases} |Z| = \frac{|u|}{|i|} = \frac{U}{I_0} = \frac{\sqrt{{U_R}^2 + {U_C}^2}}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{cases}$$

et

$$\tan\varphi = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{1}{RC\omega} \quad \rightarrow \quad \varphi = -Actg\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

Examen d'électromagnétisme
Session normale
Durée : 1H 30min

Exercice1. Considérons un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension E. Initialement, la bobine n'est traversée par aucun courant et le condensateur C est déchargé. A l'instant $t = 0$ on ferme linterrupteur.

1. Etablir l'équation différentielle que vérifie $q(t)$ la charge du condensateur C.
2. Ecrire l'équation différentielle que vérifie $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse L.
3. Donner une relation entre R, L et C pour que le régime du circuit soit critique.
4. Quelle doit être la condition entre R, L et C pour que le régime soit pseudo-périodique ? Dans ce cas, donner les expressions de la pseudo-pulsation ω, de la pseudo-fréquence f et de la pseudo-période T. On indiquera à cette occasion les unités de ω, f et T.

Exercice 2. On considère un solénoïde d'axe (Oz), de rayon R_1 , de longueur l, constitué de N_1 spires régulières et jointives, chacune étant parcourue par une intensité i_1 (figure 2).

1. Calculer le champ magnétique créé par une seule spire du solénoïde en un point M sur l'axe (Oz) en fonction de α.
2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde au point M en fonction des angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit les faces terminales du solénoïde depuis le point considéré.
3. On suppose que la longueur l du solénoïde est très grande devant ses extrémités (solénoïde infini). Déterminer le flux propre du solénoïde. En déduire l'expression de son inductance propre L_1. Calculer L_1 si $N_1 = 200$, $l = 40,7cm$ et $R_1 = 2,5cm$. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}H/m$.
4. Une spire (C) enlace le solénoïde précedent (figure 2).
   (a) Déterminer le flux magnétique créé par le solénoiïde à travers la spire (C). En déduire l'expression de l'inductance mutuelle M de ces deux circuits. On suppose que le champ créé par le solénoïde n'existe qu'à l'intérieur de celui-ci (il est nul à son extérieur).
   (b) La spire de résistance R est fermée sur elle-même. Supposons que le solénoïde est parcouru par un courant variable $i_1 = I_0 \cos \omega t$. Déterminer le courant i_2 dans la spire (On néglige son inductance propre).

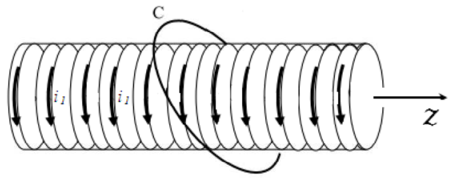


Figure 1 –

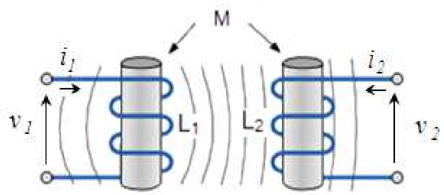


Figure 2 –

Exercice 3. On considère deux circuits fixes et indéformables : v_1, L_1 et v_2, L_2 couplés par mutuelle inductance M (figure 2).

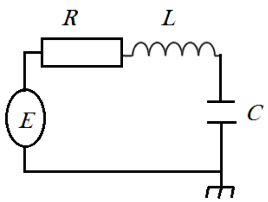
1. Déterminer le flux ϕ_1 du champ magnétique à travers la bobine 1 en fonction de L_1 et M. En déduire la force électromotrice induite dans la bobine 1.
2. Montrer que la puissance reçue par l'ensemble des deux bobines peut se mettre sous la forme $P = \frac{d}{dt} \sum M_{jk} I_j I_k$
3. Définir l'énergie magnétostatique. Déterminer son expression dans le cas des deux circuits de la figure 2.

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filière : SMPC (S3), année 2014/2015

Session normale

Exercice 1.

1)



$E = u_L + u_C + u_R = L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri$ (1)

$$\left\{E = L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}\right\} \qquad ou \qquad \left\{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}\right\}$$

2) On dérive l'équation (1) , on obtient:

$$\rightarrow \left\{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0\right\} \qquad \rightarrow equation\ carat.\ : \quad \left\{ \quad r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0\right\}$$

3) Pour que le régime soit critique, il faut que : $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \rightarrow \left\{R^2 = \frac{4L}{C}\right\}$$

4) Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0 \quad \rightarrow R^2 < \frac{4L}{C}$

$\rightarrow$ La pseudo-pulsation est donnée par $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ car $r = -\lambda \pm i\omega$

$$\left\{\omega = \frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}{2} \ \left(\frac{rad}{s}\right)\right\}$$

$$\left\{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}{4\pi} \ (Hz)\right\}$$

$$\left\{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}} \ (s)\right\}$$

Exercice 2.

1) Voir TD : $\left\{\vec{B}_{spire} = \frac{\mu_0 i_1}{2R_1}\sin^3\theta\ \vec{u}_z\right\}$; $\theta = \alpha$

2) Voir TD aussi :

$$\left\{\vec{B}_{sol} = \frac{\mu_0 i_1 N_1}{2l}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\ \vec{u}_z\right\}$$

3)

$$\left\{\vec{B}_{sol.inf.} = \frac{\mu_0 i_1 N_1}{l}\ \vec{u}_z\right\}$$

$$\Phi_{propre} = N_1.\iint \vec{B}_{Sol1}.d\vec{S}_1 = N_1\vec{B}_1\vec{S}_1$$

$$\Phi_{propre} = N_1.\left(\frac{\mu_0 i_1 N_1}{l}\right).\left(\pi {R_1}^2\right)$$

$$\left\{\Phi_{propre} = \mu_0.\frac{{N_1}^2\pi {R_1}^2}{l}.i_1\right\}$$

Sachant que $\Phi_{propre} = L_1 i_1 \quad \rightarrow \quad \left\{L_1 = \mu_0.\frac{{N_1}^2\pi {R_1}^2}{l}\right\}$

A.N. :

$$\left\{L_1 = \frac{4\pi 10^{-7}.(200)^2.\pi.(2{,}5.10^{-2})^2}{40{,}7.10^{-2}} \approx 0{,}24mH\right\}$$

4)

$\left\{\Phi_{12} = \iint \vec{B}_1.d\vec{S}_2 = \left(\frac{\mu_0 i_1 N_1}{l}\right).\pi {R_1}^2\right\}$; ! Il ne faut pas prendre le rayon de la spire car : $B_{sol} = 0 \quad si\ x > R_1$

Sachant que : $\Phi_{12} = Mi_1$, alors :

$$M = \frac{\mu_0 N_1 \pi {R_1}^2}{l}$$

5) $i_1 = I_0\cos\omega t$; $i_2 =$?

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{22} + \Phi_{12}) = -\frac{d}{dt}\left(L_2\frac{di_2}{dt} + Mi_1\right)$$

$L_2 = 0$

$$\rightarrow \quad e_2 = -\frac{d}{dt}(Mi_1) \quad \rightarrow \quad i_2 = \frac{e_2}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 N_1 \pi {R_1}^2}{l}.i_1\right)$$

$$\left\{i_2 = \frac{\mu_0 N_1 \pi {R_1}^2}{lR}\omega I_0\sin\omega t\right\}$$

Examen d'électricité 2 - électromagnétisme
Session de rattrapage
Durée : 1H 30min

Exercice 1. Un fil infiniment long, d'axe Oz, est parcouru par un courant I (Fig.1). Un circuit carrée $CDEF$, de côté a et de coefficient d'auto-inductance L négligeable, est placé dans le plan xOz.

1. Calculer le champ magnétique créé par le fil infini en un point M situé à la distance b du fil.
2. Déterminer par un calcul direct la force de Laplace exercée par le fil sur la spire carrée.
3. Déterminer le flux du champ magnétique créé par le fil infini à travers la spire. En déduire une nouvelle détermination de la force de Laplace exercée sur le cadre carré.
4. Qu'appelle t-on flux coupé ?
5. Déterminer le flux coupé par la spire carrée pendant l'intervalle de temps δt.
6. En déduire l'expression de la force exercée par le fil sur la spire par application du théorème de Maxwell.

Exercice 2. Une bobine (1) de forme sphérique (de rayon R_1), composée de $N1$ spires, est parcourue par le courant I_1. Prenons le centre de la sphère comme origine des coordonnées. Les plans des spires sont perpendiculaires à l'axe (Oz), comme le montre la figure 2. Le champ magnétique crée par la bobine (1) au centre O est donné par :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{3\pi R_1}\vec{e_z}$$

Une deuxième bobine (2), homothétique au première, de même centre O et de rayon R_2, composée de N_2 spires, est parcourue par le courant I_2. La condition suivante doit être respectée : $R_2 < R_1$.

1. Déterminer le flux induit par la bobine (1) au travers une seule spire de la deuxième bobine en fonction de I_1, N_1, R_1, R_2 et θ.
2. Déterminer le flux élémentaire induit par la bobine (1) au travers un nombre infinitésimal de spires dN_2 de la bobine (2).
3. En déduire le flux total induit par la bobine (1) au travers la deuxième bobine.
4. Déterminer l'expression de l'inductance Mutuelle M ?

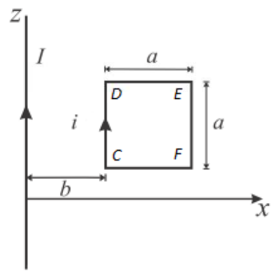


Figure 1 –

Exercice3. On considère un circuit RLC série. A l'instant $t = 0$, on alimente le circuit par un générateur de tension continue $E = 100V$, le condensateur étant initialement déchargé. On donne : $L = 0,1H$ et $C = 50\mu F$.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.
2. Etablir l'équation caractéristique associée et en déduire l'expression et la valeur de la résistance critique R_c. Quelle est l'importance de cette résistance ?
3. Quelles sont les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristiques (écrire les racines en fonction de λ et ω). Prenons $\lambda = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ et $R = 5\Omega$.
4. Quelle est la diffférence entre ω et ω_0 ? Calculer la pseudo-période.
5. Les solutions de l'équation différentielle précédente sont de la forme : $\exp(-\lambda t)(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$. Déterminer les constantes A et B et donner l'expression du courant circulant dans le circuit en fonction du temps.
6. Quel type de régime transitoire obtient-on ?

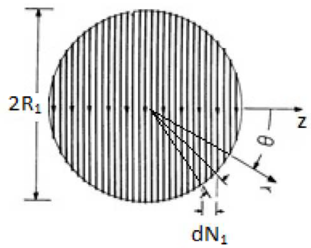


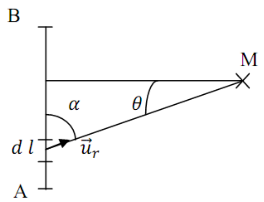
Figure 2 –

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme, Filières SMPC-SMI (S3), année 2013/2014

Session de rattrapage

Exercice 1.

1) $\vec{B}$ créé par un segment



D'après la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{Id\vec{l}\wedge\vec{u}_r}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\cos\alpha}{r^2}\ ;\ \sin\alpha = \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{l}{b} \ \rightarrow \ dl = \frac{b}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad et \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{b^2}$$

$$\rightarrow \ dB_{seg.} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,d\theta \quad \rightarrow \quad B_{seg.} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}[\sin\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}.$$

$$\left\{B_{seg.} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\right\} \quad \rightarrow \quad \left\{B_{fil.} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\right\}$$

2)

$$\vec{f} = \vec{f}_{CD} + \vec{f}_{EF}$$

$$d\vec{f}_{CD} = \left(id\vec{l}\wedge\vec{B}\right) = idz\,\vec{e}_z\wedge\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ \vec{e}_y$$

$$d\vec{f}_{CD} = -\frac{\mu_0 iI}{2\pi b}\,dz\,\vec{e}_x \quad \rightarrow \quad \left\{\vec{f}_{CD} = -\frac{\mu_0 iIa}{2\pi b}\ \vec{e}_x\right\}$$

$$\vec{f}_{tot} = -\frac{\mu_0 iIa}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a}\right)\vec{e}_x$$

$$\left\{\vec{f}_{tot} = -\frac{\mu_0 iIa^2}{2\pi b}\left(\frac{1}{b+a}\right)\vec{e}_x\right\}$$

3) $\Phi = \iint \vec{B}_{fil.}d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx.dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\iint\frac{dx}{x}.dz$

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_b^{b+a}\frac{dx}{x} \qquad \rightarrow \qquad \left\{\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{b}\right)\right\}$$

$dw = id\Phi$

$$\vec{F}.db.\vec{u}_x = \frac{i\mu_0 Ia}{2\pi}.\frac{-a/b^2}{\frac{b+a}{b}}db$$

$$\left\{\vec{F} = -\frac{\mu_0 iIa^2}{2\pi b}\left(\frac{1}{b+a}\right).\vec{u}_x\right\}$$

4) Flux coupé (cours).

5)

$$\delta\Phi_C = \underbrace{\delta\Phi_{C,CD}}_{segment\ CD} + \underbrace{\delta\Phi_{C,EF}}_{segment\ EF}$$

$$\delta\Phi_{C,CD} = \int\frac{\mu_0 I}{2\pi b}(\vec{v}\,\delta t\wedge d\vec{z}).\vec{e}_y$$

$$\delta\Phi_{C,CD} = -\int\frac{\mu_0 I}{2\pi b}v\,\delta t\,dz = -\frac{\mu_0 I}{2\pi b}v\,\delta t\,.a$$

$$\delta\Phi_C = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}.v.\delta t.a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a}\right)$$

$$F_x = -\frac{\mu_0 Iia}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a}\right)$$

Si $\quad b \gg a$

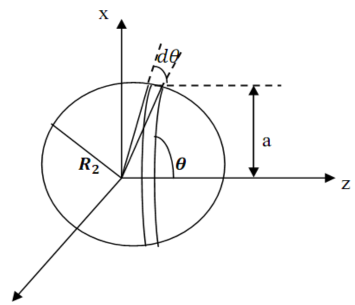
$$\rightarrow \quad \left\{F_x = -\frac{\mu_0 Iia^2}{2\pi b^2}\right\}$$

Exercice 2.

Bobinage (B_1), composé de N_1 spires de rayon R_1, est parcourue par un courant I_1. Le centre de la sphère est l'origine des coordonnées O. On donne :

$$\left\{\vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{3\pi R_1}\vec{u}_z\right\}$$

Les plans des spires sont perpendiculaires à l'axe (oz)



Un 2ème bobinage (B_2) homothétique au premier, N_2, R_2, I_2 avec $R_2 \ll R_1$

1) $f_{12} = ?$

$$a = R_2\sin\theta \quad \rightarrow \quad S = \pi a^2 = \pi\,R_2^2\sin^2\theta$$

Le flux est donc :

$$f_{12} = \vec{B}_1(0).\vec{S} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{3\pi R_1}\ \vec{u}_z\ .\pi\ R_2^2\ \sin^2\theta\ \vec{u}_z$$

$$\left\{ f_{12} = \frac{\mu_0 N_1\ R_2^2\ \sin^2\theta}{3R_1}.I_1 \right\}$$

2) dN =? en déduire $\delta\Phi_{12}$

Le nombre de spires balayées est dN =?

$$2\pi R_2 \to N_2$$
$$d\theta R_2 \to dN$$
$$\to \quad dN = \frac{d\theta R_2 N_2}{2\pi R_2} = \frac{N_2 d\theta}{2\pi}$$
$$\to \quad \left\{ d\Phi_{12} = dN.f_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{6\pi R_1}\ \mathrm{I}_1 \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta \right\}$$

3) Φ_{12} =? en déduire M ?

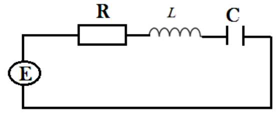
$$\Phi_{12} = \int d\Phi_{12}$$
$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{6\pi R_1}\mathrm{I}_1 \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta}_{=\frac{\pi}{2}}$$
$$\left\{ \Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{12 R_1} I_1 = \mu_0 \underbrace{\frac{N_1 N_2 R_2^2}{12 R_1}}_{M} .I_1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{(1-\cos 2\theta)}{2} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2\theta\ d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi) - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}[\sin 2\theta]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 3.

1)



$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$
$$\frac{d}{dt} \quad \to \quad 0 = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}i$$
$$\to \quad \left\{ \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \right\}$$

2) $\left\{ r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0 \right\}$ est l'équation caractéristique.

R_C Correspond au régime critique $\to \Delta = 0$.

$$\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{LC}\right) = 0 \quad \to \quad \frac{R^2}{L^2} = 4\frac{1}{LC} \quad \to \frac{R^2}{L} = \frac{4}{C}$$
$$\to \quad R^2 = \frac{4L}{C} \quad \to \quad \left\{ R_C = R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right\}$$
$$\left\{ A.N.R_C = 2\sqrt{\frac{0,1}{50.10^{-6}}} \approx 89,4\Omega \right\}$$

→ Faire la séparation entre le régime apériodique et le régime pseudo-périodique amorti.

3) Δ=?

Réécrire l'équation caractéristique en fonction de ω_0 et λ

$\to \quad r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = (2\lambda)^2 - 4\omega_0^2$, avec λ facteur d'amortissement $\lambda = \frac{R}{2L} = 25$ et

$\omega_0^2 = 2.10^5\ (\frac{rad}{s})^2$

→ $\{\Delta < 0\}$ → Deux racines complexes !

Et donc :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-2\lambda - j\sqrt{-\Delta}}{2} \\ r_2 = \dfrac{-2\lambda + j\sqrt{-\Delta}}{2} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} r_1 = -\lambda - j\omega \\ r_2 = -\lambda + j\omega \end{cases}$$

4)

ω_0 est la pulsation des oscillations en absence d'amortissement.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad \left\{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{446{,}5} = 0{,}0140s\right\}$$

Avec $\omega_0^2 = 2.10^5 \ (\frac{rad}{s})^2$ et $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \approx 199375 \ (\frac{rad}{s})^2$

$$\rightarrow \{\omega = 446{,}5\ rad/s\}$$

5)

$$i(t) = \exp(-\lambda t)(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

a) $i(0) = 0 = A \quad \rightarrow \{\ A = 0\}$

b) D'après la loi des mailles

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

à $t = 0 \quad \rightarrow \quad i = 0\ \ et\ q = 0$

$\rightarrow \quad 100 = 0 + 0{,}1.\frac{di}{dt} + 0 \quad \rightarrow \quad \left\{\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = 1000\right\}$

Or $i(t) = B\exp(-25t)\sin\omega t$

$\rightarrow$

$$\frac{di}{dt} = -25.B\exp(-25t)\sin\omega t + B.\omega.\exp(-25t)\cos\omega t$$

$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = 1000 \quad \rightarrow \quad B.\omega = 1000 \ \rightarrow B = \frac{1000}{\omega} \quad \rightarrow \quad \left\{B = \frac{1000}{446.5} \approx 2{,}24\right\}$

$\rightarrow$

$$\{i(t) = 2{,}24\exp(-25t)\sin(446{,}5t)\}$$

6) Régime pseudo-périodique.

Examen d'électricité 2 - électromagnétisme
Durée : 1H 30 min

Exercice 1. Un solénoïde est un enroulement serré de fils fins parcourus par un courant sur une surface cylindrique d'axe Oz, de centre O, de rayon R et de longueur L, correspondant à l'association de N spires (voir Fig. 1). Il comporte donc n spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant d'intensité I.

1. Déterminer le champ magnétique au point M, de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z)$, créé par une seule spire du solénoïde, exprimer le résultat en fonction de l'angle θ sous lequel on voit de M le rayon de la spire.
2. Afin de calculer le champ magnétique, le solénoïde sera décomposé en portions élémentaires de longueur $dL = dz$. Donner la contribution dB en fonction de n, dz et θ.
3. Exprimer le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ au point M de l'axe Oz en fonction de n et des deux angles θ_1 et θ_2.
4. Calculer en fonction de N, L et R le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ au point O. Envisager le cas où $R >> L$.
5. Déterminer l'expression du champ magnétique si le solénoïde devient infini.
6. En supposant que le champ est uniforme dans tout le solénoïde, donner l'allure des lignes de champ. Expliquer pourquoi une bobine traversée par un courant est assimilée à un aimant.
7. Calculer la valeur du champ à l'intérieur du solénoïde infini, si $I = 1A$, $R = 1cm$ et $n = 1000$ spires/m. On donne $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$.

Exercice 2. Un transformateur idéal est constitué de deux solénoïdes considérés comme infinis, leur rayon a est très petit devant leur longueur l. Les deux bobinages, reliés par un circuit magnétique, sont respectivement parcouru par les courants d'intensité i_1 et i_2 et leur nombres de spires sont N_1 et N_2.

1. Quel est le rôle du circuit magnétique ?
2. pourquoi emploie-t-on le terme de transformateur idéal ?
3. Calculer le flux de $\vec{B_1}$ au travers le solénoïde (1). En déduire l'expression de l'inductance propre L_1.
4. Déterminer l'expression de l'inductance mutuelle M des deux circuits et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$.
5. En utilisant les lois de l'électrocinétique, donner l'expression de la tension $v_1(t)$ aux bornes du circuit primaire en fonction du flux Φ_1, de la résistance r_1 de la bobine (1) et du courant i_1.

6. On néglige la résistance interne des deux bobinages, déterminer le rapport des tensions $\frac{v_2(t)}{v_1(t)}$ en fonction de N_1 et N_2.
7. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique.
8. En déduire l'expression de l'énergie magnétique accumulée à l'intérieur du solénoïde (1). Montrer qu'elle peut se mettre sous cette forme :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Exercice3.

1. On soumet le circuit de la figure 2 à un échelon de tension $U(t)$.
   (a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.
   (b) Résoudre l'équation dans le cas où $i(0^+) = 0$ et $U(t) = E$.
   (c) A quoi correspond la solution sans second membre de l'équation ?
   (d) A quoi correspond la solution particulière de l'équation ?
   (e) Faire de même pour $i(0^+) = E/R$ et $U(t) = 0$. Commenter.

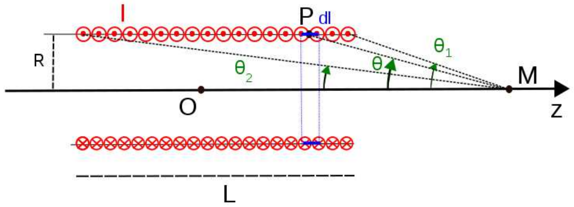


Figure 1 –

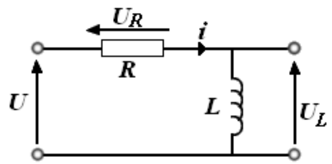


Figure 2 –

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filières SMPC-SMI (S3), année 2013/2014

Session normale

Exercice 1.

1) Voir TD. $\left\{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\,\vec{u}_z\right\}$

2) $\left\{dB = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\left(\frac{N}{L}\right).dz = \frac{\mu_0 I}{2R}.n.\sin^3\theta.dz\right\}$

3) Sachant que $\tan\theta = \frac{R}{Z}$ $\rightarrow$ $z = R.cotg.\theta$ donc $dz = -\frac{R}{sin^2\theta}d\theta$

$dB = \frac{\mu_0 In}{2R}.\sin^3\theta\left(-\frac{R}{sin^2\theta}\right)d\theta \rightarrow dB = -\frac{\mu_0 In}{2}.\sin\theta.d\theta$

$$\vec{B} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = \frac{\mu_0 In}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1).\vec{u}_z$$

4) Si $M \equiv O$

$$\rightarrow \quad \cos\theta_2 = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}} = -\cos\theta_1$$

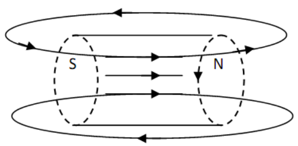
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 In}{2}\left(\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}\right)\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 InL}{2}.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}\vec{u}_z = \frac{\mu_0 IN}{2}.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}\vec{u}_z$$

Si $R \gg L$ $\rightarrow$ $\left\{\vec{B} \approx \frac{\mu_0 IN}{2R}\vec{u}_z\right\}$

5) Solénoïde infini : $\theta_2 = 0$ $et\ \theta_1 = \pi$ $\left\{\rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 I\,n\,\vec{u}_z\right\}$

6)



On retrouve le spectre d'un aimant droit

7) $\{B = \mu_0 In = 4\pi 10^{-7}.1.10^3 \approx 12{,}5610^{-4}T\}$

Exercice 2 : Transformateur Idéal

1) - canaliser les lignes des champs magnétiques
-amplifier l'intensité des champs.

2) Pas de pertes (magnétique et électrique)

3) $\vec{B}_1 = \mu_0.\frac{N_1}{l}.i_1.\vec{u}_z$

$$\varphi_1 = \vec{B}_1.\vec{S}_1 = \vec{B}_1(\pi a^2\vec{u}_z) = \frac{\mu_0 N_1 \pi a^2}{l}i_1$$

$$\Phi_{11} = flux\ propre = N_1\varphi_1$$

$$\left\{\Phi_{11} = \frac{\mu_0 {N_1}^2 \pi a^2}{l}i_1\right\}$$

Sachant que $\Phi_{11} = L_1 i_1$ $\rightarrow$ $\left\{L_1 = \frac{\mu_0 {N_1}^2\pi a^2}{l}\right\}$

4) On calcul $\varphi_{12} = \iint \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \vec{B}_1\vec{S}_2 = \frac{\mu_0 N_1 \pi a^2}{l}i_1$

Sachant que :

$$\begin{cases}\Phi_{12} = N_2\varphi_{12} = \dfrac{N_1 N_2 \mu_0 \pi a^2}{l}i_1 \\ \Phi_{12} = Mi_1\end{cases}$$

$$\rightarrow \left\{M = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi a^2}{l}\right\} \quad et \quad \left\{M = \sqrt{L_1 L_2}\right\}$$

5) $\begin{cases} v_1(t) = \frac{d\Phi_1}{dt} + r_1 i_1(t) \\ v_2(t) = \frac{d\Phi_2}{dt} + r_2 i_2(t)\end{cases}$

6) r négligeable $\rightarrow$ $\begin{cases} v_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad (1) \\ v_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \quad (2)\end{cases}$

De (2) $\rightarrow$ $\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L_2}\left(v_2 - M\frac{di_1}{dt}\right) = \frac{v_2}{L_2} - \frac{M}{L_2}\frac{di_1}{dt}$

En injectant cette relation dans l'équation (1), on obtient :

$$v_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}\left(v_2 - M\frac{di_1}{dt}\right)$$

$$v_1(t) = \frac{M}{L_2}v_2(t) + \frac{di_1}{dt}\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2}\right)$$

et

$$\frac{M}{L_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a^2}{l} . \frac{1}{\mu_0 N_2^2 \pi a^2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\rightarrow \quad \left\{ \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \right\}$$

7)

$$dE_{mag.} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad et \ \ E_{mag.} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} . dv$$

$$E_{mag.} = \frac{(B_1 + B_2)^2}{2\mu_0} . S. l$$

$$E_{mag.} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 + \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2 \right)^2 .S. l$$

$$E_{mag.} = \frac{\mu_0}{2l^2} (N_1^2 . i_1^2 + N_2^2 . i_2^2 + 2 N_1 N_2 i_1 i_2). S. l$$

$$\left\{ E_{mag.} = \frac{\mu_0 N_1^2 . i_1^2 \pi a^2}{2l} + \frac{\mu_0 N_2^2 . i_2^2 \pi a^2}{2l} + \mu_0 \frac{N_1 N_2 i_1 i_2 \pi a^2}{l} \right\}$$

$$\left\{ E_{mag.} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right\}$$

<u>Exercice 3.</u>

a)

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (1)$$

$$(2) \quad i_H = A \exp\left(- {}^{R}/_{L} . t\right) \quad et \ \ i_p = \frac{E}{R}$$

b)

$$\left\{ i = \frac{E}{R} + A \exp\left(- {}^{R}/_{L} . t\right) \right\}$$

$$i(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = - {}^{E}/_{R} \quad \rightarrow \quad \left\{ i = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(- {}^{R}/_{L} . t\right)\right) \right\}$$

c) La solution sans second membre : régime transitoire (disparait au bout de 3τ)
d) Solution particulière : régime permanent.
e) Si $i(0^+) = \frac{E}{R}$ $\quad \rightarrow \quad$ $i = i_H = \frac{E}{R} \exp\left(- {}^{R}/_{L} . t\right)$
Que la solution sans second membre. Le régime permanent correspond à $i = 0$.

Examen d'électricité 2
Durée : 1H 30

Exercice 1. On considère un solénoïde d'axe (Oz), de rayon R_1, de longueur l_1, constitué de N_1 spires régulières et jointives, chacune étant parcourue par une intensité i_1 (figure 1a).

1. Calculer le champ magnétique créé par une seule spire du solénoïde au point M situé sur l'axe (Oz).
2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde au point M en fonction des angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit les faces terminales du solénoïde depuis le point considéré.
3. En utilisant l'approximation de solénoïdes infinis, déterminer le flux propre à travers le solénoïde.
4. En déduire la valeur du coefficient d'auto-inductance L_1 si $N_1 = 1000$, $l_1 = 10cm$ et $R_1 = 18cm$.
5. A l'intérieur de solénoïde 1, on place un petit solénoïde de rayon R_2 , de longueur l_2, et constitué de N_2 spires (figure 1b). L'angle entre les axes des deux solénoïdes est θ et les courants dans les deux solénoïdes sont orientés dans le même sens. Déterminer le flux magnétique provoqué par le grand solénoïde à travers le petit (solénoïde 2).
6. En déduire le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.
7. Déterminer l'énergie magnétique propre du solénoïde 1.
8. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique.
9. Déterminer l'énergie magnétique propre du solénoïde 1 en utilisant cette fois-ci l'expression de la question précédente et en supposant qu'il n'existe que le champ magnétique produit par le solénoïde 1.

Exercice 2. Un dispositif, que nous ne décrirons pas ici, permet de faire circuler dans le circuit de la figure 1a un courant d'intensité $i(0) = I_0$ à l'instant $t_0 = 0$.

1. Partie I
   (a) Donner l'équation différentielle qui régit l'intensité $i = i(t)$ en fonction du temps.
   (b) En déduire l'expression de i en fonction du temps. Donner la valeur de i à l'instant $t = 3L/R$.
   (c) Quelle est l'énergie d'origine magnétique W_0 emmagasinée dans la bobine à l'instant $t_0 = 0$.
   (d) Calculer l'énergie W_R dissipée sous forme de chaleur dans la résistance totale du circuit $R' + r$ pendant un temps très long $(t \to \infty)$ à partir de l'instant initiale $t_0 = 0$. Conclure.

2. Partie II
   Dans le circuit précédent on ajoute entre les deux points O et A une batterie de f.é.m. E constante (figure 2b), en série avec un interrupteur ouvert depuis longtemps et qui sera fermé à un nouvel instant initial $t_0 = 0$.
   (a) Ecrire la nouvelle équation différentielle à laquelle obéit maintenant l'intensité $i = i(t)$ du courant dans le circuit.
   (b) En déduire la nouvelle expression de l'intensité $i = i(t)$ en fonction du temps.
   (c) Représenter la courbe $i = i(t)$ entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 3L/R$ à l'échelle $5cm$ pour $1A$ et $1cm$ pour $1ms$.

Données : $L = 40mH$, $r = R' = 10\Omega$, $I_0 = 1A$ et $E = 12V$.

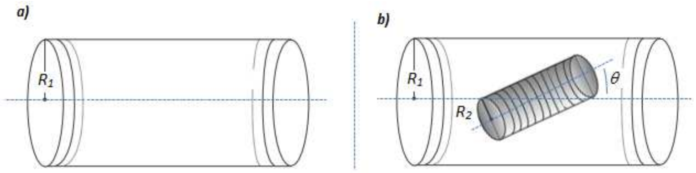


Figure 1 – Couplage magnétique

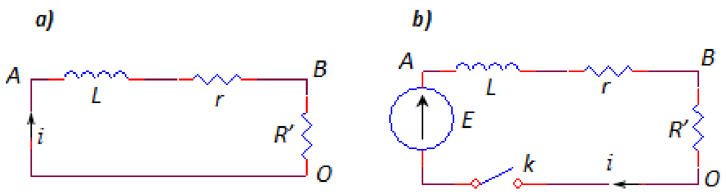


Figure 2 – Régime transitoire

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filière SMPC (S3), année 2012/2013

Session normale

Exercice 1.

1) Voir votre TD $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2R_1}(\sin\alpha)^3\,\vec{u}_z$
2) TD $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2l_1}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,\vec{u}_z$
3) Solénoïde infini $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l_1}\vec{u}_z$

   Le flux propre est donné par $\Phi_{11} = N_1 \iint \vec{B}_1 d\vec{S}_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 i_1 S_1}{l_1}$
4) $\Phi_{11} = N_1 \iint \vec{B}_1 d\vec{S}_1 = L_1 i_1 \quad \rightarrow \quad L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l_1} = 1{,}27H$
5) $\Phi_{12} = N_2 \iint \vec{B}_1 d\vec{S}_2 \quad \rightarrow \quad \Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2 i_1}{l_1}\cos\theta$
6) Or $\Phi_{12} = M i_1 \quad \rightarrow \quad M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1}\cos\theta$
7) $W_{mag1} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l_1}\right) i_1^2$
8) $dW = \frac{B^2}{2\mu_0}$
9) S'il n'existe que le solénoïde 1, $W_{mag} = \iiint \frac{B_1^2}{2\mu_0}dv = \frac{\mu_0 N_1^2 i_1^2}{2l_1^2}S_1 l_1$

$$W_{mag} = \frac{\mu_0 N_1^2 i_1^2 S_1}{2l_1}$$

Or

$W_{mag} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 \quad \rightarrow \quad L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l_1}$ On retrouve l'expression de la question 4.

Exercice 2.

1) Partie I.
   a) La bobine tend à prolonger le courant I_0 dans le circuit dans le même sens en réponse à la suppression de l'échelon de courant :
      $V_A - V_O = L\frac{di}{dt} + ri + R'i = 0 \quad \rightarrow \quad L\frac{di}{dt} + Ri = 0$, en prenant $R = r + R'$.
   b) La solution est de la forme :
      $i(t) = I_0 \exp\left(-t/\tau\right)$; Avec $\tau = \frac{L}{R} = 2ms$.
      Au temps $t = 3\tau$, nous obtenons : $i(t = 6ms) = 49{,}8mA$
   c) L'énergie magnétique à $t = 0$ est : $W_0 = \frac{1}{2}LI_0^2$, soit $W_0 = 0{,}02\,J$
   d) L'énergie dissipée par effet Joule est : $W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2}LI_0^2$;
      L'énergie W_0 emmagasinée par la bobine a été entièrement dissipée par effet Joule.
2) Partie II.
   a) L'équation associée au circuit de la figure 2b est :

$$E = L\frac{di}{dt} + ri + R'i \quad \rightarrow \quad E = L\frac{di}{dt} + Ri$$

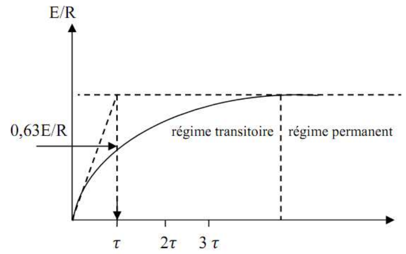


Figure 1

   b) La solution particulière est : $i_p = \frac{E}{R} = 0{,}6A$. cette solution correspond à l'établissement d'un régime permanent $\left(\frac{di}{dt} = 0\right)$.
      La solution générale est $i(t) = i_p + A\exp(-t/\tau)$;
      Pour $t = 0$, $i(0) = 0$; la bobine assure la continuité du courant dans le circuit, ce qui conduit à : $i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau))$.
   c) Voir la courbe de la figure 1.

Examen d'électromagnétisme
Durée : 1H 30

Exercice 1. Une bobine rectangulaire de N spires et de grand axe z est enroulé sur un cylindre de même axe, de rayon a et de hauteur b. Cet ensemble, appelé rotor, se déplace dans l'entrefer d'un aimant. Le champ magnétique créé par cet aimant a une composante radiale B_r dont la variation en fonction de la position dans l'entrefer est donnée à la figure 1. Sa composante verticale est nulle.
La bobine a une résistance R et est connectée vers l'extérieure par l'intermédiaire de deux points A et C par un système de balai-collecteur, de manière que le brin de spire situé à droite de l'axe y soit toujours en relation électrique avec A et que celui situé à gauche soit en relation avec C, quelle que soit la position de la bobine dans l'entrefer. On notera J le moment d'inertie par rapport à l'axe z du rotor et $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ son vecteur rotation. On négligera les phénomènes d'auto-induction dans la spire. On notera $i(t)$ le courant traversant la bobine orienté de A vers C.
Lors de la rotation, la bobine est soumise à un couple de frottement fluide dont le moment est du type $\vec{\Gamma}_f = -\beta\vec{\Omega}$, où β est une constante positive.

1. rappeler l'expression du champ électromoteur $\vec{E}$ dans le cas de l'induction de Lorentz. Déterminer $\vec{E}$ pour le brin vertical de la bobine situé à droite[1].
2. Montrer que la force électromotrice $e(t)$ induite par le mouvement du rotor dans le champ magnétique peut s'écrire $e(t) = -\Phi_0\Omega(t)$, où Φ_0 est une grandeur à exprimer en fonction de B_0, a et b.
3. Déterminer la force de Laplace $\vec{f_d}$ subie par le brin droit de la bobine, en déduire son moment Γ_d.
4. Montrer que le moment $\vec{\Gamma}_{Lap}$, par rapport à l'axe de rotation, des forces électromagnétiques s'exerçant sur le rotor peut s'écrire $\vec{\Gamma}_{Lap} = \Phi_0 i(t)\vec{e}_z$.
5. On connecte entre A et C une résistance R' et on entraîne la spire par un motor tournant à la vitesse angulaire Ω supposée constante. Déterminer le courant $i(t)$. Ce courant est-il continu ou variable ?
6. En appliquant le théorème du moment cinétique scalaire[2], quel couple Γ_{meca} doit délivrer le moteur pour maintenir la vitesse de rotation constante ?
7. Calculer la puissance mecanique fournie par le couple extérieure au rotor. Conclure.

1. Rappelons que pour un mouvement circulaire uniforme : $\vec{v} = a\Omega\vec{e}_\theta$
2. $J\frac{d\Omega}{dt} = \sum\Gamma_i$

Exercice2.

1. Dans le circuit de la figure 2, l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps, on le ferme à l'instant $t = 0$.
   (a) Préciser sans calcul $i_1\,(t \to \infty)$ et $i_2\,(t \to \infty)$.
   (b) Déterminer i_1 et i_2 ; on introduira les constantes de temps τ_1 et τ_2.
2. On attend que le régime permanent précédent soit établi et on ouvre l'interrupteur K à un instant que l'on choisira comme nouvelle origine des temps. On décide d'utiliser $i = i_1$ pour l'intensité du circuit ainsi réalisé.
   (a) Etablir l'équation différentielle relative à l'intensité du courant i du nouveau circuit.
   (b) Préciser les différents régimes possibles à l'aide d'une condition sur R.
   (c) on se place dans le cas où $\tau_1 = \tau_2 = \tau$: de quel type de régime s'agit-il ?
   (d) Montrer que $i(0^+) = \frac{E}{R}$ et $\frac{di}{dt}|_{0^+} = -\frac{E}{L}$. Déterminer i en fonction de E, R, τ et t pour $t > 0$.

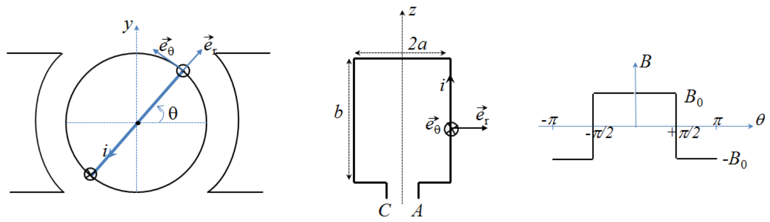


FIGURE 1 –

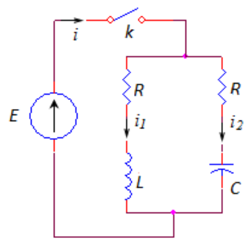


FIGURE 2 –

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filière : SMI (S3), année 2012/2013

Session normale

Exercice 1.

1) Il s'agit bien de l'induction de Lorentz : $\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$; pour le brin vertical situé à droite : $\vec{E}_d = \vec{v} \wedge \vec{B} = a\Omega\vec{e}_\theta \wedge B_0\vec{e}_r$

$$\vec{E}_d = -aB_0\Omega\vec{e}_z$$

2) La f.é.m. induite est la somme des tensions induite par les deux brins (droit e_d et gauche e_d) ; avec $e_d = \int_b \vec{E}_d . d\vec{l} = \int -aB_0\Omega\vec{e}_z . dl . \vec{e}_z$;
Donc $e_d = -NabB_0\Omega$
Idem, $E_g = a\Omega\vec{e}_\theta \wedge -B_0\vec{e}_r = +aB_0\Omega\vec{e}_z$;
L'induction $e_g = \int_b \vec{E}_g . d\vec{l} = \int aB_0\Omega\vec{e}_z . (-dl) . \vec{e}_z$;
Ce qui donne $e_g = -NabB_0\Omega$
La f.é.m. totale est donc : $e_{tot} = e_d + e_g = -2NabB_0\Omega = -\Phi_0\Omega$; avec $\Phi_0 = 2NabB_0$

3) La force de Laplace subie par le brin droit est :
$\vec{f}_d = i\vec{l} \wedge \vec{B} = ibN\vec{e}_z \wedge \vec{B}_0\vec{e}_r$
$\vec{f}_d = NibB_0\vec{e}_\theta$
$\vec{\Gamma}_{Lap_d} = a\vec{e}_r \wedge NibB_0\vec{e}_\theta = NabB_0 i\vec{e}_z$

4) De même , $\vec{\Gamma}_{Lap_g} = NabB_0 i\vec{e}_z$, donc le moment total est
$\vec{\Gamma}_{Lap_{tot}} = 2NabB_0 i\vec{e}_z = \Phi_0 i\vec{e}_z$.

5) Le schéma électrique équivalent est donné à la figure 1. On peut donc écrire que :
$$i = \frac{e}{R+R'} = \frac{-\Phi_0}{R+R'} . \Omega$$
Ω Est continue donc i est un courant continu.

6) Le théorème du moment cinétique scalaire nous donne :
$J\frac{d\Gamma}{dt} = \vec{\Gamma}_{Lap} + \vec{\Gamma}_f + \vec{\Gamma}_{meca} = 0$ Car Ω est constante.

$$\vec{\Gamma}_{meca} = \beta\Omega - \Phi_0 i = \Omega\left(\beta + \frac{{\Phi_0}^2}{R+R'}\right)$$

7) La puissance mécanique est donnée par : $P_{meca} = \vec{\Gamma}_{meca} . \vec{\Omega}$
$$P_{meca} = \left(\beta + \frac{{\Phi_0}^2}{R+R'}\right)\Omega^2.$$
La puissance est positive quelque soit le signe de Ω, ce qui veut dire qu'il faudrait fournir de l'énergie mécanique au dynamo pour qu'il puisse à son tour fournir de l'énergie électrique.

Exercice 2.

1) Regardez votre cours (chapitre 1) :
$$i_1(t \to \infty) = \frac{E}{R} \quad et\ i_2(t \to \infty) = 0.$$

Pour la première maille : $E = L\frac{di}{dt} + Ri_1$, ce qui donne $i_1 = \frac{E}{R} + \lambda \exp(-t/\tau_1)$; avec $\tau_1 = L/R$.

Le courant i_1 est continu $i_1(0^+) = i_1(0^-)$, on a donc : $i_1 = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau_1))$; $\tau_1 = \frac{L}{R}$

Pour la deuxième maille, on a : $E = v_C + Ri_2 = v_C + RC\frac{dv_C}{dt}$; avec $v_C(0^+) = v_C(0^-)$,

On obtient : $v_C = E(1 - \exp(-t/\tau_2))$; avec $\tau_2 = RC$.

Sachant que $i_2 = C\frac{dv_C}{dt} \quad \to \quad i_2 = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau_2)$.

2)

a. Le condensateur est initialement chargé, d'après la loi des mailles (figure 2) :
$L\frac{di}{dt} + 2Ri - v_C = 0$; avec $i = -C\frac{dv_C}{dt}$! (condensateur en convention générateur),
$$\to \quad \frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

b. $\Delta = \frac{4}{L^2}\left(R^2 - \frac{L}{C}\right)$
$\Delta > 0 \ si\ R > \sqrt{L/C}$: Régime apériodique
$\Delta < 0 \ si\ 0 \le R < \sqrt{L/C}$: Régime pseudo-périodique
$\Delta = 0 \ si\ R = \sqrt{L/C}$: Régime critique

c. Si $\tau_1 = \tau_2 \quad \to \quad \frac{L}{R} = RC \quad \to \quad R = \sqrt{L/C}$, on est donc en régime critique.

d. La bobine impose la continuité du courant, donc :
$i(0^+) = i_1(t \to \infty) = \frac{E}{R}$. De même, le condensateur impose la continuité de la tension : $v_C(0^+) = v_C(t \to \infty) = E$. La loi des mailles impose :
$L\left[\frac{di}{dt}\right]_{0^+} + 2R\frac{E}{R} - E = 0 \quad \to \quad \left[\frac{di}{dt}\right]_{0^+} = -\frac{E}{L}$

La solution de l'équation différentielle en régime critique est donnée par :
$$i(t) = (A + Bt)\exp(-t/\tau) \ ; \ \tau_1 = \tau_2 = \tau$$
$$i(0^+) = \frac{E}{R} \ \to \ A = \frac{E}{R}$$
$$\left[\frac{di}{dt}\right]_{0^+} = -\frac{E}{L} \ \to \ B = 0$$

Finalement : $i(t) = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau)$.

Examen d'électricité 2 - électromagnétisme
Session de rattrapage
Durée : 1H 30

Exercice 1. Un dipôle magnétique de moment $\vec{M} = M\vec{e_x}$ (constant et positif) est mobile le long de l'axe (Ox) d'une spire de rayon R parcourue par le courant i constant (figure 1).

1. Calculer le champ magnétique créé par la spire en un point de son axe.
2. Déterminer l'expression de la force subie par le dipôle. En déduire l'amplitude maximale de cette force.
3. Trouver l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et la spire.
4. En déduire la position d'équilibre du dipôle. Cette position est-elle stable ?

Exercice 2. Considérons deux circuits couplés par mutuelle inductance M (figure 2).

1. Ecrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé.
2. En déduire deux équations différenetielles découplées vérifiées par $I(t)$ et $J(t)$ en passant par un changement de variables simple $I = i_1 + i_2$ et $J = i_1 - i_2$.
3. Déterminer les expressions de $I(t)$ et $J(t)$ en prenant $\tau_1 = (L+M)/R$, $\tau_2 = (L-M)/R$ et en supposant que $i_1(t=0) = i_2(t=0) = 0$.
4. En déduire les expressions de i_1 et i_2
5. Donner les expressions de i_1 et i_2 en régime permanent.
6. Trouver les nouvelles expressions de i_1 et i_2 dans le cas où $L = M$.

Exercice3. Le champ électrique d'une onde plane sinusoïdale qui se propoge dans le vide dans la direction de l'axe (Oz) a la forme suivante : $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$.

1. En utilisant une des équations de Maxwell, exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ associé, dans cette onde, au champ électrique précédent.
2. En exploitant les équations de Maxwell, trouver la relation qui relie k à la pulsation ω.
3. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie de l'onde étudiée. En déduire la moyenne temporelle de cette énergie.

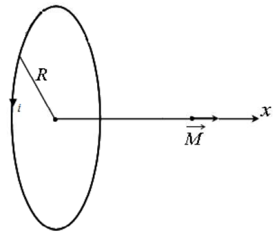


Figure 1 –

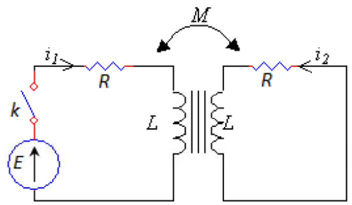


Figure 2 –

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filières : SMPC-SMI (S3), année 2012/2013

Session de rattrapage

Exercice 1.

1) Voir votre TD $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2R}(\sin\alpha)^3 \vec{e}_x$
2) $dw = F.dx = M.dB$

$$\rightarrow F = M.\frac{dB}{dx}$$

Avec

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2}.\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{3}{2}.M.\mu_0 i R^2.\frac{x}{(R^2+x^2)^{5/2}}\,\vec{u}_x$$

F_{max} correspond à $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$;c.-à-d. si $x = \pm R/2$

$$|F_{max}| = \frac{24\mu_0 i M}{5^{5/2}.R^2}$$

3) $\vec{E}_p = -\vec{M}\vec{B}$

$$E_p = -\frac{\mu_0 i M R^2}{2}.\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

4) La position d'équilibre correspond à $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$; c.-à-d. si $x = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 3\frac{\mu_0 i M}{2R^3} > 0$$

La position d'équilibre est donc stable

Exercice 2.

1)

$$E = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$0 = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

2) En prenant $I = i_1 + i_2$ et $J = i_1 - i_2$ on obtient :

$$E = RI + (L+M)\frac{dI}{dt}$$
$$E = RJ + (L-M)\frac{dJ}{dt}$$

3)

$$I = \frac{E}{R}(1-\exp(-t/\tau_1)); \;\; J = \frac{E}{R}(1-\exp(-t/\tau_2))$$

4)

$$i_1 = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\exp(-t/\tau_1) - \frac{1}{2}\exp(-t/\tau_2)\right); \;\; i_2 = \frac{E}{2R}(\exp(-t/\tau_2) - \exp(-t/\tau_1))$$

5) En régime permanent $i_1 = \frac{E}{R}$ et $i_2 = 0$.

6) Si $L = M$, alors $J(t) = \frac{E}{R}$ et $I(t)$ reste inchangé.

Exercice 3.

1)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\vec{E} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -kE_0\sin(\omega t - k.z)$$

$$\rightarrow \;\; B_y = \int -kE_0\sin(\omega t - k.z)dt \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \frac{k}{\omega}E_0\cos(\omega t - k.z)\vec{e}_y$$

2) L'équation de Maxwell-Ampère dans le vide impose :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = C^2\overrightarrow{rot}\vec{B} = -\frac{k^2C^2}{\omega^2}E_0\sin(\omega t - k.z)\vec{e}_x$$

Or

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0\sin(\omega t - k.z)\vec{e}_x$$

D'où

$$k = \frac{\omega}{C}$$

3)

$$\xi_{vol} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{2\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\right)cos^2(\omega t - k.z)$$
$$\xi_{vol} = \varepsilon_0 E_0^2 cos^2(\omega t - k.z)$$

Sa moyenne temporelle est :

$$\langle \xi_{vol} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

car :

$$\langle \xi_{vol} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \xi_{vol}(t)dt.$$

Examen d'électricité 2 - électromagnétisme
Session de rattrapage
Durée : 1H 30

Exercice 1. On considère deux circuits fixes et indéformables : v_1, L_1 et v_2, L_2 couplés par mutuelle inductance M (figure 1).

1. Déterminer le flux ϕ_1 du champ magnétique à travers la bobine 1. En déduire la force électromotrice induite dans la bobine 1.
2. Donner l'expression de la puissance reçue par l'ensemble des deux bobines.
3. En déduire l'expression de l'énergie magnétostatique.

Exercice 2. Sur deux rails horizontaux, parallèles, distants de a et respectivement reliés à chacun des deux pôles d'un générateur, on pose perpendiculairement un barreau rectiligne conducteur. L'ensemble, qui constitue ainsi un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité I, est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et perpendiculaire au plan des rails (figure 2).

1. Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur le barreau en précisant le sens du mouvement.
2. Calculer le flux coupé pendant le déplacement élémentaire de le barre de MN à $M'N'$. En déduire l'expression de le force de Laplace en utilisant le théorème de Maxwell.

Exercice3. Un dipôle, constitué d'une résistance R et d'une bobine L, est alimenté par un générateur de **tension sinusoïdale** : $e(t) = E_m \cos \omega t$

1. En utilisant la loi des mailles, établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.
2. La solution particulière est de la forme $i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$, en utilisant les notations complexes déterminer les expressions de ϕ et de I_m.
3. Donner la solution totale de l'équation différentielle précédente.

UNIVERSITÉ MOHAMMED PREMIER Filière : SMPC-SMI (S 3)
FACULTÉ PLURIDISCIPLINAIRE DE NADOR Année 2011/2012

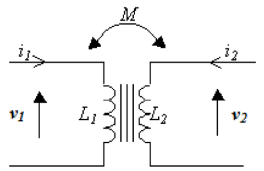


FIGURE 1 –

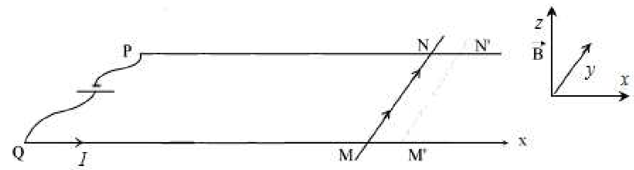


FIGURE 2 –

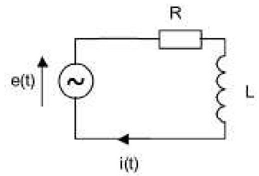


FIGURE 3 –

Corrigé examen d'électromagnétisme. Filières : SMPC SMI (S3), année 2011/2012

Session de rattrapage

Exercice 1.

1) $\Phi_1 = L_1.I_1 + M.I_2$.

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d(L_1.I_1 + M.I_2)}{dt}$$

2) $P = U.I = -e.I$.

Pour l'ensemble des deux bobines :

$$P = I_1\frac{d\Phi_1}{dt} + I_2\frac{d\Phi_2}{dt} = I_1\frac{d(L_1.I_1 + M.I_2)}{dt} + I_2\frac{d(L_2.I_2 + M.I_1)}{dt}$$

Ce qui donne :

$$P = \frac{d\left(\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M.I_1I_2\right)}{dt}$$

3)

$$W_{ma} = \int_0^t P.dt = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M.I_1I_2$$

Exercice 2.

1) $d\vec{F} = Id\vec{l}\wedge\vec{B} = IBdy.\vec{e}_y\wedge\vec{e}_z = IBdy.\vec{e}_x$.

$$\vec{F} = \int_0^a d\vec{F} = IaB.\vec{e}_x$$

2)

$\delta\Phi_C = \int_M^N d\delta\Phi_C = \int_M^N \vec{B}\ \overrightarrow{d\delta S_C} = \vec{B}\ \int_M^N\ \vec{v}\ \delta t \wedge d\vec{y}$

$$\delta\Phi_C = B\ a\ v\ \delta t = Ba.dx$$

Le théorème de Maxwell : $\delta w = I\ \delta\Phi_C$

$$\vec{F}d\vec{x} = IBa.dx$$

Ce qui donne finalement :

$$\vec{F} = IBa.\vec{e}_x$$

Exercice 3.

1) $Ri + L\frac{di}{dt} = E_m\cos\omega t$.

2) En utilisant les notations complexes et en remplaçant dans l'équation différentielle $i(t)$ par la solution particulière, on obtient :

$$E_m\exp(j\omega t) = RI_m\exp(j(\omega t + \varphi)) + j\omega LI_m\exp(j(\omega t + \varphi))$$

$$E_m = (RI_m + j\omega LI_m)\exp(j\varphi)$$

$$E_m = (RI_m + j\omega LI_m)(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$E_m = (RI_m\cos\varphi - \omega LI_m\sin\varphi) + j(RI_m\sin\varphi + \omega LI_m\cos\varphi)$$

Ce qui donne :

$$0 = RI_m\sin\varphi + \omega LI_m\cos\varphi$$

$$E_m = RI_m\cos\varphi - \omega LI_m\sin\varphi$$

De la dernière équation on en déduit :

$$\tan\varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

En enlevant au carré les deux égalités précédentes et en faisant la somme, on obtient :

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

3) La solution homogène est obtenue en résolvant l'équation :

$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$. Ceci nous donne :

$$i(t) = K\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

La solution totale est donne :

$$i(t) = K\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi)$$

Examen d'électricité 2 / Électromagnétisme
Durée : 1H 30

Exercice 1. Un dipôle RL, constitue d'une bobine idéale d'inductance $L = 1,1H$ et d'une résistance $R = 50\Omega$, est branché aux bornes d'un générateur de tension continue (E=6,0V). A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Schématiser le montage électrique.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit.
3. Montrer que la solution de l'équation différentielle précédemment établie peut être mise sous la forme : $i(t) = K(1 - \exp(-mt))$. Identifier K et m.
4. Donner la valeur de l'intensité du courant lorsque le régime permanent est établi, justifier la réponse.

Exercice 2. On considère un solénoïde d'axe (Oz), de rayon R_1, de longueur l, constitué de N_1 spires régulières et jointives, chacune étant parcourue par une intensité i_1 (figure 1).

1. Calculer le champ magnétique créé par une seule spire au point M en fonction de α.
2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde au point M en fonction des angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit les faces terminales du solénoïde depuis le point considéré.
3. On suppose que la longueur l du solénoïde est très grande devant ses extrémités (solénoïde infini). Déterminer l'inductance propre L_1 du solénoïde. Quelle est sa valeur si $N_1 = 5000$, $l = 10cm$ et $R_1 = 1,26cm$. $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}H/m$.
4. Une bobine de N_2 spires enlace le solénoïde précedent (figure 2).
   (a) Calculer l'inductance mutuelle M de ces deux circuits. On suppose que le champ créé par le solénoïde n'existe qu'à l'intérieur de celuici (il est nul à son extérieur).
   (b) La bobine de résistance R est fermée sur elle-même. Supposons que le solénoïde est parcouru par un courant variable $i_1 = i_0 \cos \varpi t$. Déterminer le courant i_2 dans la bobine. On néglige l'inductance propre de la bobine.

UNIVERSITÉ MOHAMMED PREMIER Filière : SMP-SMI (S 3)
FACULTÉ PLURIDISCIPLINAIRE DE NADOR Année 2010/2011

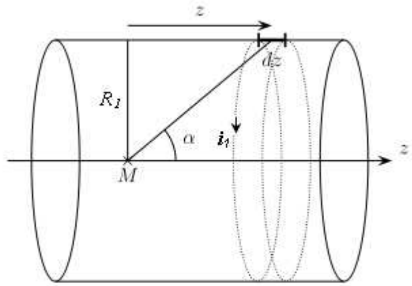


FIGURE 1 – Solénoïde

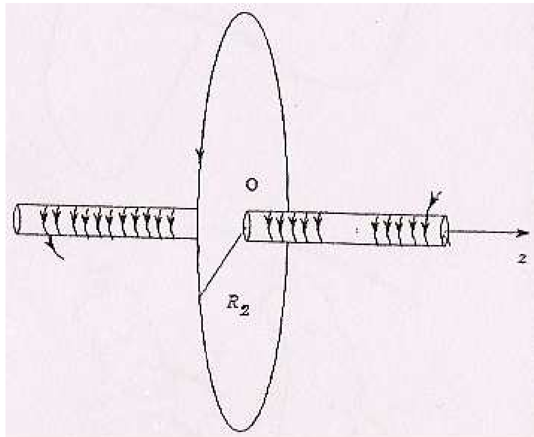


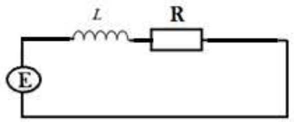
FIGURE 2 – Couplage magnétique

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filières : SMP-SMI (S3), année 2010/2011

Session normale

Exercice 1 : circuit RL

1)



2) La loi des mailles :

L'équation différentielle $\rightarrow \left\{E = L\frac{di}{dt} + Ri\right\}$

3) -Solution homogène :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\rightarrow \left\{i_H = A.e^{-\frac{R}{L}.t}\right\}$$

-solution particulière : $i = cte \quad \rightarrow \quad Ri = E \quad \rightarrow \quad i_p = \frac{E}{R}$

$$\rightarrow \quad i = A.e^{-\frac{R}{L}.t} + \frac{E}{R}$$

A l'instant $t = 0 \quad \rightarrow \quad i(t = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{E}{R}$

$$\rightarrow \left\{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}.t}\right)\right\}$$

C.-à-d. que $k = \frac{E}{R}$ et $m = \frac{R}{L}$

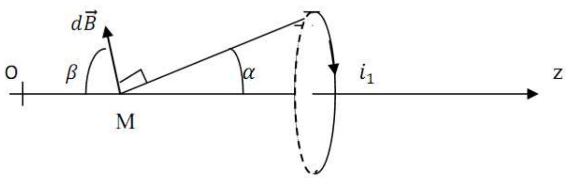
4) La constant du temps $\tau = \frac{1}{m} = \frac{L}{R}$

Le régime permanant est atteint lorsque le courant est à 95% de $\frac{E}{R}$ c.-à-d. au but de 3τ.

$$\left\{i(t = 3\tau) = \frac{6V}{50}\left(1 - e^{\frac{-3\tau}{\tau}}\right) \approx 0{,}114\ A\right\}$$

Exercice 2.

1) Champ créé par une seule spire :



Suivant l'orientation de i dans la spire le champ est suivant $\overrightarrow{oz}$

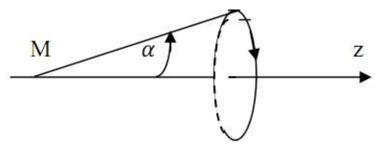
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}.\frac{dl}{r^2}\sin\frac{\pi}{2},$$

$$dB' = dB.\cos\beta; \quad avec \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$dB' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}.\frac{dl}{r^2}\sin\alpha\,; \quad \frac{R_1}{r} = \sin\alpha$$

$$\rightarrow \left\{B' = \frac{\mu_0 i_1}{2R_1}sin^3\alpha\right\}$$

2)



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R_1}sin^3\alpha\,\frac{N_1}{l}dz\,\vec{u}_z$$

Avec : $dz = \frac{R_1}{sin^2\alpha}d\alpha$

Donc :

$$dB = \frac{\mu_0 I N_1}{2l}\sin\alpha.d\alpha \quad \rightarrow \quad \left\{B = \frac{\mu_0 i_1 N_1}{2l}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\right\}$$

3) L'inductance propre du solénoïde "L_1"

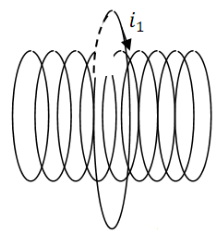
$$\Phi_{propre} = L_1 i_1 = N_1 \iint \vec{B}_{sol}.d\vec{S} = N_1 \vec{B}\vec{S}_1$$

$$\rightarrow \ L_1\,i_1 = N_1.\underbrace{\left(\frac{\mu_0\ i_1\ N_1}{l}\right)}_{infini}.\pi R_1^2 \quad \rightarrow \quad \left\{L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2}{l}.\pi R_1^2\right\}$$

A.N. : $\{L_1 \approx 0{,}157H\}$

a) L'inductance mutuelle : M

On suppose que le champ n'existe qu'à l'intérieur du solénoïde (nul à l'extérieur)



$$\left\{\vec{B}_{sol} = \frac{\mu_0 N_1}{l} i_1 \vec{e}_z\right\}$$

$$\rightarrow \Phi_{12} = \underbrace{N_2}_{\substack{bobine\ de \\ N_2 spires}} \iint \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = N_2 \iint \vec{B}_1 \quad d\underbrace{\vec{S}_1}_{\substack{que\ la\ surface \\ traversé\ par \\ le\ champ}}$$

$$\left\{\Phi_{12} = N_2 \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l} . \pi R_1^2\right\}$$

- Le courant i_2 dans la bobine.

$$e_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{22} + \Phi_{12})$$

$$e_2 = -\frac{d}{dt}\left(\underbrace{L_2 \frac{di_2}{dt}}_{\substack{=0 \\ car\ L_2\ est\ négligeable \\ bobine \approx résistance \\ i_2 = \frac{e_2}{R}}} + M i_1\right) \quad \rightarrow \quad e_2 = -\frac{d}{dt}(M . i_1)$$

$$\rightarrow i_2 = \frac{e_2}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2}{l}\right)(i_0 \cos \omega t)$$

$$\left\{i_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2}{lR} \omega i_0 \sin \omega t\right\}$$

Examen d'électricité 2 / Électromagnétisme
Session de rattrapage
Durée : 1H 30

Exercice 1. Un dipôle RC, constitue d'un condensateur de capacité $C = 50\mu F$ et d'une résistance $R = 200k\Omega$, est branché aux bornes d'un générateur de tension continue (E=200V). A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Schématiser le montage électrique.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur.
3. Donner la solution de l'équation différentielle précédemment établie.
4. Calculer la constante de temps du circuit.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la charge du condensateur atteigne 90% de sa valeur finale.
6. Donner la valeur de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur à l'instatnt $t = RC$.

Exercice 2. On considère un fil conducteur rectiligne de longueur h et parcouru par un courant I (figure 1).

1. Calculer le champ magnétique créé par le courant I circulant dans ce conducteur au point N situé à la distance a du fil.
2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par un fil infini.
3. Donner la valeur du champ si le point N est appartient au plan médian du conducteur de longueur h.
4. Un fil infiniment long, d'axe Oz, est parcouru par un courant I. Un circuit carré, de côté b et de coefficient d'auto-inductance L négligeable, est placé dans le plan xOz.
   (a) Qu'appelle t-on flux coupé ?
   (b) Déterminer le flux coupé par la spire carrée pendant l'intervalle de temps δt.
   (c) En déduire l'expression de la force exercée par le fil sur la spire par application du théorème de Maxwell.
   (d) Supposons que la spire n'est parcourue par aucun courant et on lui communique un mouvement uniforme de vitesse $v = \frac{dx}{dt}$. La résistance électrique de la spire étant R. Calculer le flux magnétique créé par le fil infini à travers la spire. En déduire l'intensité du courant qui circule dans la spire.

UNIVERSITÉ MOHAMMED PREMIER — Filière : SMP-SMI (S 3)
FACULTÉ PLURIDISCIPLINAIRE DE NADOR — Année 2010/2011

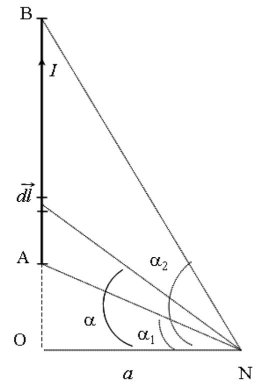


FIGURE 1 – Champ créé par un fil

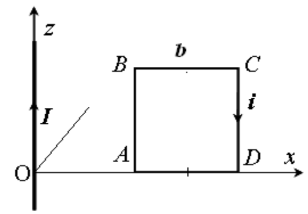


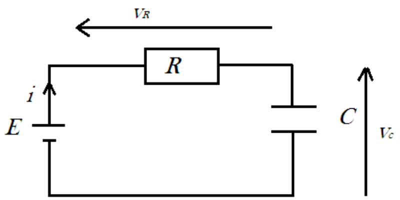
FIGURE 2 – Phénomène d'induction

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filières SMP-SMI (S3), année 2010/2011

Session de rattrapage

Exercice 1.

1) Loi des mailles :



2) $E = Ri + \frac{q}{C} \quad \rightarrow \quad \left\{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E\right\}$ (1)

3) Solution : $q(t) = CE\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

4) $\tau = RC = 10s$ constante de temps du circuit

5) Le temps nécessaire pour que $Q = 90\%$ de sa valeur finale

$$Q_{max} = CE$$

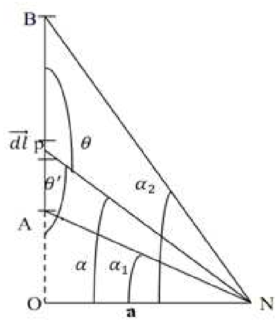
$$0{,}90CE = CE\left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad \rightarrow \quad \{t = 23s\}$$

6)

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2}; \quad q = CE(1 - e^{-1}) = 0{,}623CE$$

$$\{E_C \approx 0{,}4J\}$$

Exercice 2.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}_r}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\sin\theta' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\cos\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{cos^2\alpha}d\alpha\cos\alpha.\frac{cos^2\alpha}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.\cos\alpha\,.\,d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\,.\,d\alpha$$

$$\left\{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\right\}$$

car :

$$\begin{cases}\sin\theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \\ et\ \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha\end{cases}$$

Et

$$\left\{l = a\tan\alpha \quad \rightarrow \quad d\alpha = \frac{a}{cos^2\alpha}d\alpha \quad et \quad \cos\alpha = \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = \frac{cos^2\alpha}{a^2}\right\}$$

- Fil infini : $\alpha_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ $et\ \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

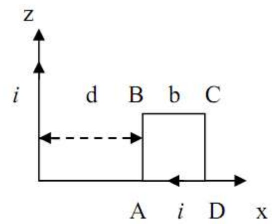
$$\left\{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right\}$$

- $\delta\Phi_c = \delta\Phi_{c_{AB}} + \delta\Phi_{c_{CD}}$

$$\delta\Phi_{c_{AB}} = \int_A^B \vec{B}\ \vec{v}\ \delta t \wedge d\vec{z}$$

$$\rightarrow \delta\Phi_{c_{AB}} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(\vec{v}\delta t \wedge d\vec{z})\vec{e}_y$$

$$\delta\Phi_{c_{AB}} = -\int \frac{\mu_0 I}{2\pi d}v\delta t dz$$



$$\delta\Phi_{c_{AB}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}v\delta t b \quad \rightarrow \quad \left\{\delta\Phi_c = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}v\delta t b\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+b}\right)\right\}$$

- $\delta w = i\delta\Phi_c = \vec{F}\vec{v}\delta t$

$$\delta\Phi_c = \frac{F_x v\delta t}{i} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}v\delta t b\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+b}\right)$$

$$F_x = -\frac{\mu_0 I i b}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+b}\right) \quad si \quad d \gg b \quad \rightarrow \quad \left\{F_x = -\frac{\mu_0 I i b^2}{2\pi d^2}\right\}$$

- La spire ABCD n'est parcourue par aucun courant

$$d\Phi = Bb.dx$$

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.b.dx$$

$$\left\{d\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}.\frac{dx}{x}\right\}$$

$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}.\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\log\frac{x+a}{x}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x}\right)v \quad \rightarrow \quad e = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ivb^2}{x(x+b)}$$

$$\left\{i = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{Ivb^2}{x(x+b)}\right\}$$

Examen d'électricité 2 - Session Normale
Durée : 1H 30

Exercice 1.

1. Calculer le potentiel vecteur créé par une boucle de courant en un point M dans l'approximation dipolaire[1].

2. Montrer que le champ magnétique créé par le dipôle au point M s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}\cos\vartheta\ \vec{u_r} + \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\sin\vartheta\ \vec{u_\vartheta}$$

On donne : Le théorème de Kelvin $\int f\vec{dr} = \iint \vec{ds}\wedge \vec{grad}f$.
En coordonnées sphériques, on a : $\vec{u_z} = (\cos\vartheta\ \vec{u_r} - \sin\vartheta\ \vec{u_\vartheta})$ et
$\vec{rot}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\ A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\vec{u_r} + \left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{u_\vartheta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]\vec{u_\varphi}$.

Exercice 2. On considère le système schématisé à la figure 1. Un dipôle de moment magnétique $\vec{M}$ est placé au point O de l'axe Ox à la distance x d'une spire circulaire de rayon a et de résistance R . Le dipôle se trouve sur l'axe de la spire de centre A.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 1, donner l'expression du champ $\vec{B}$ créé par le dipôle au point A.
2. On déplace la spire parallèlement à l'axe Ox avec une vitesse v constante, donner l'expression du flux ϕ créé par le dipôle à travers la spire.
3. Déterminer la force électromotrice e induite dans la spire en fonction de $\frac{dx}{dt}$. En déduire l'expression du courant induit i.
4. La spire est assimilée à un dipôle, déterminer le moment dipôlaire $\vec{M'}$ de la spire. En déduire le champ $\vec{B'}$ produit par la spire au point O en fonction de $\vec{M'}$.
5. En utilisant la relation de l'énergie potentielle d'interaction, déterminer la force exercée par la spire (considérée comme un dipôle) sur le dipôle (supposé être un aimant placée au point O).

1. Le potentiel est à exprimer en fonction de $\vec{M}$(moment dipolaire magnétique).

Université Mohammed Premier — Filière : SMP (S 3)
Faculté Pluridisciplinaire de Nador — Année 2010/2011

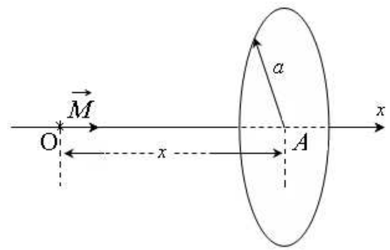


Figure 1 –

Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filière SMP(S3), année 2009/2010

Session normale

Exercice 1.

1) Voir votre cours : $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^2}\vec{u}_\varphi$

et

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}\cos\theta\ \vec{u}_r + \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}\sin\theta\ \vec{u}_\theta$$

Exercice 2.

1) D'après le premier exercice :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi x^3}\ \vec{u}_x$$

2) Le flux est donné par :

$$\Phi = \vec{B}\,\vec{S} = \frac{\mu_0 M a^2}{2x^3}$$

3) En utilisant la loi de Faraday, la force électromotrice e induite dans la spire est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

d'où :

$$e = \frac{3\mu_0 M a^2}{2x^4}\frac{dx}{dt}$$

Le courant induit $i = {}^{e}/_{R}$; R est la résistance de la spire.

Donc :

$$i = \frac{3\mu_0 M a^2}{2Rx^4}\frac{dx}{dt}$$

4) Le moment dipolaire de la spire est : $\overrightarrow{M'} = i\vec{S}$.

$$\overrightarrow{M'} = \frac{3\mu_0 M a^4 \pi}{2Rx^4}\frac{dx}{dt}\ \vec{u}_x$$

En utilisant la première question :

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 M'}{2\pi x^3}\vec{u}_x$$

5) On utilise la relation : $dw = -dE_p$; $E_p = -\vec{B}'\vec{M}$ est l'énergie potentielle.

Donc :

$Fdx = -dE_p$, la force est : $F = -\frac{dE_p}{dx} = \frac{d(\vec{B}'\vec{M})}{dx}$.

$$F = \frac{d}{dx}\left(\frac{3\mu_0^2 M^2 a^4}{4Rx^7}\frac{dx}{dt}\right)$$

Avec, $\frac{dx}{dt} = v = cste.$

Finalement :

$$\boxed{F = -\frac{21\mu_0^2 M^2 a^4}{4Rx^8}\frac{dx}{dt}}$$

EXAMEN DE RATTRAPAGE D'ÉLECTRICITÉ 2
DURÉE : 1H 30

PARTIE A

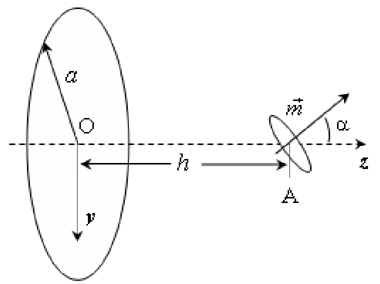
On considère une spire circulaire de rayon a, parcourue par un courant constant I.
1. Calculer le champ magnétique créé par ce courant au point A, de son axe de révolution (Oz), en fonction de I, a et h (h étant la distance entre le centre de la spire et le point A).

PARTIE B

Une petite spire de surface s_2 négligeable devant les distances a et h (assimilée donc à un dipôle magnétique $\vec{m}$) est placé au point A. La grande spire, de centre O, possède une résistance R et un coefficient d'auto-inductance L. On suppose que le dipôle tourne autour d'un axe Ox perpendiculaire à Oz à une vitesse angulaire ω constante.

Nous supposons qu'au départ, aucun courant ne parcourt la grande spire. Mais, lorsque le dipôle commence à tourner, le flux du champ qu'il crée à travers la grande spire fait apparaître une force électromotrice et donc un courant i_1(t) dans la grande spire.

1. En utilisant la question 1 de la partie A, calculer ϕ_{12} : le flux du champ créé par la grande spire à travers la petite spire.
2. En déduire l'expression de M (conductance mutuelle).
3. Calculer ϕ_{21}, le flux du champ créé par le dipôle à travers la grande spire, en fonction de a, h, m et ω.
4. Donner l'expression du flux totale à travers la grande spire.
5. En utilisant la loi de Faraday, trouver l'équation différentielle vérifiée par le courant i_1 qui parcourt la grande spire.
6. Résoudre cette équation différentielle.

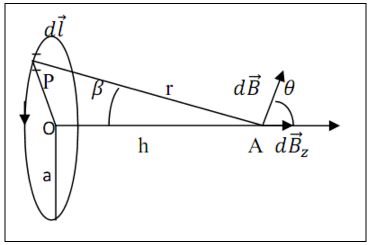


Corrigé de l'examen d'électromagnétisme. Filière : SMP (S3), année 2008/2009

Session de rattrapage

Partie 1.

D'après Biot et Savart :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}_r}{r^2}$$

$$r = PA \text{ et } \alpha = (\overrightarrow{dl}, \overrightarrow{PA})\ ; \quad \rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\, sin\alpha}{r^2}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Pour des raisons de symétrie, $\vec{B}$ est porté par l'axe (oz)

$$\rightarrow \ dB_z = dB\cos\theta\ ; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}.\sin\beta \quad \rightarrow \quad dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}dl\sin\beta.\frac{sin^2\beta}{a^2}$$

car $\sin\beta = \frac{a}{r} \ \rightarrow \ \frac{1}{r^2} = \frac{sin^2\beta}{a^2}$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}dl\ sin^3\beta$$

$$\rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\ sin^3\beta\int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\ sin^3\beta.2\pi a$$

$$\left\{B_z = \frac{\mu_0 I}{2a}\ sin^3\beta\right\}$$

Avec $\sin\beta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}$

$$\rightarrow \ B_z = \frac{\mu_0 I}{2a}\frac{a^3}{(h^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\left\{B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(h^2+a^2)^{3/2}}\right\}$$

Partie 2.

1)

$$\Phi_{12} = \iint \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \vec{B}_1\vec{S}_2 = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{a^2}{(h^2+a^2)^{3/2}}S_2.\cos\alpha$$

2) En déduire l'expression de M ?

Sachant que $\Phi_{12} = Mi_1$

$$\rightarrow \ \left\{M = \frac{\mu_0}{2}.\frac{a^2}{(h^2+a^2)^{3/2}}S_2.\cos\omega t\right\}$$

3)

$$\Phi_{21} = Mi_2 = \frac{\mu_0}{2}.\frac{a^2}{(h^2+a^2)^{3/2}}S_2.\cos\omega t.\ i_2 = \frac{\mu_0}{2}.\frac{a^2 m}{(h^2+a^2)^{3/2}}.\cos\omega t.$$

car $m = S_2 i_2$

4)

$$\Phi_{tot} = \Phi_{11} + \Phi_{21}\ ,\ \ avec\ \ \Phi_{11} = Li_1$$

$$\rightarrow \ \left\{\ \Phi_{tot} = Li_1 + \frac{\mu_0}{2}.\frac{a^2 m}{(h^2+a^2)^{3/2}}.\cos\omega t.\right\}$$

5)

La loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt}$ $\ et\ \ e = Ri_1\ \ avec\ R$ résistance de la bobine

$$Ri_1 = -\frac{d}{dt}\left(Li_1 + \frac{\mu_0}{2}.\frac{a^2 m}{(h^2+a^2)^{3/2}}.\cos\omega t.\right)$$

D'où l'équation différentielle :

$$\left\{L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = \frac{\mu_0}{2}.\frac{ma^2\omega}{(h^2+a^2)^{3/2}}.\sin\omega t.\right\}$$

6)

$i_1 =?$ Résolution de l'équation différentielle

- Solution homogène → $\left\{i_h(t) = ke^{-\frac{R}{L}t}\right\}$
- Solution particulière sous forme $i_p(t) = A.\sin(\omega t + \omega)$

  Il faut trouver $A\ \ et\ \varphi$?

  Utilisons les nombres complexes pour résoudre l'équation différentielle.

  $\tilde{\imath}_p = A.e^{j(\omega t+\varphi)}$ On injectant cette solution dans l'équation différentielle

$$LAj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + RAe^{j(\omega t+\varphi)} = \underbrace{\frac{\mu_0 m a^2\omega}{2(h^2+a^2)^{3/2}}}_{B}e^{j\omega t}$$

$$\rightarrow A(jL\omega + R)e^{j\varphi} = B$$

$$\begin{cases} A(R\cos\varphi - L\omega\sin\varphi) = B & (1) \\ L\omega\cos\varphi + R\sin\varphi = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) $\rightarrow \left\{\tan\varphi = -\frac{L\omega}{R}\right\}$

Pour trouver l'équation de A ; $(1)^2 + (2)^2$:

$$\rightarrow \quad R^2 + L^2\omega^2 = \frac{B^2}{A^2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{B}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

La solution de l'équation différentielle est finalement :

$$\left\{ i_1(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mu_0 m a^2 \omega}{2(h^2 + a^2)^{3/2}\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} . \sin(\omega t + \varphi) \right\}$$