Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Physique
Année : 2006/2007
SMP

Contrôle n°1
Physique 3: Electricité II
(S3, Durée : 2h)

Questions de cours :

Partie I (3pt)

1- Rappeler l'énoncé du théorème d'Ampère en magnétostatique.

2- Expliquer comment ce théorème et les symétries permettent de trouver le champ magnétique créé par un fil rectiligne, de longueur infinie, de rayon r_1 et de paroi d'épaisseur négligeable, parcouru par un courant de densité uniforme d'intensité I. Indiquer sur un schéma le champ magnétique en divers points de l'espace.

Partie II (4pt)

1- Rappeler la formule de Biot et Savart donnant le champ magnétique créé, en un point M de l'espace, par un circuit quelconque parcouru par un courant I. N'oublier pas de donner la signification de chacun des symboles qui figurent dans la formule que vous avez écrite.

2- D'un point O à une distance r d'une portion rectiligne d'un circuit traversé par un courant I, les extrémités de celle-ci sont vues sous les angles θ_1 et θ_2 (voir la figure 1 ci-dessous) :

a- Calculer le champ magnétique créé par ce morceau du circuit en O.

b- Quelle vérification immédiate de votre résultat pouvez vous imaginer ?

c- Pouvez vous utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique créé par ce morceau de circuit ? Expliquer.

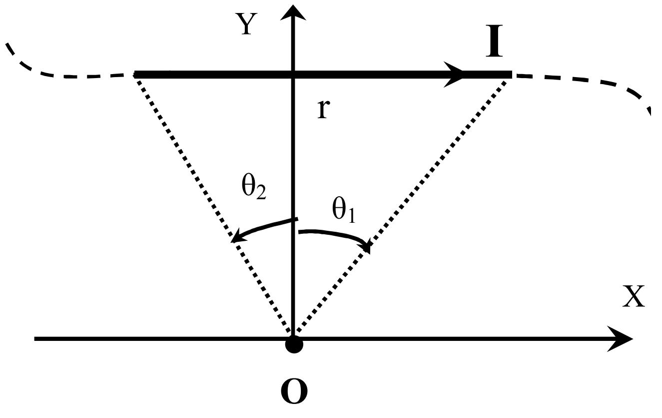


Figure 1

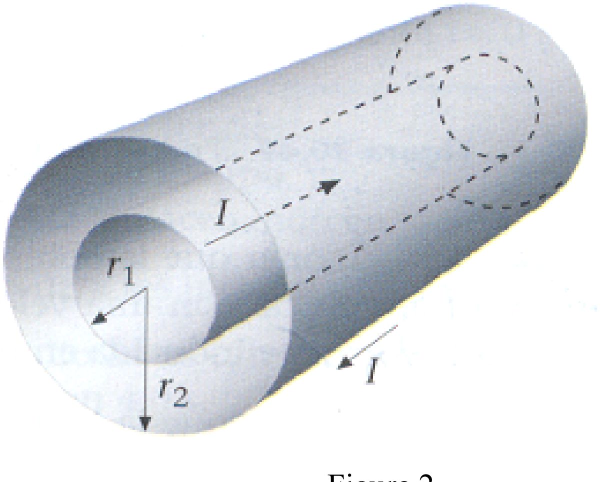


Figure 2

Exercice 1 : (6pt)

Un câble coaxial, rectiligne et de longueur infini ℓ est constitué de deux fils conducteurs, concentriques de rayon respectives r_1 et r_2 et de parois d'épaisseurs négligeables. Les deux fils cylindriques sont traversés par le même courant I selon des sens opposés (voir la figure 2).

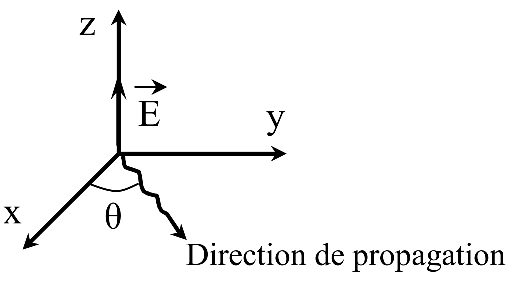
1- Montrer que le champ magnétique est non nul dans la région comprise entre les deux conducteurs. Déterminer sa valeur en tout point de l'espace.
2- Déterminer la densité d'énergie magnétique dans la région comprise entre les deux conducteurs. Déduire que la valeur de l'énergie localisée dans cette région est de la forme $\mu_0.\ell.I^2.(\text{Log}(r_2/r_1))/(4\pi)$.
3- Déterminer le coefficient d'auto induction par unité de longueur de cette structure.
4- Trouver ce même résultat en calculant le flux à travers une surface rectangulaire de côtés ℓ et $(r_2\text{-}r_1)$ comprise entre les deux conducteurs.

Exercice 2 : (7 pt)

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale de pulsation ω, de constante de propagation k, se propage dans le vide selon une direction faisant un angle θ avec Ox et contenue dans le plan xOy. Le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé selon Oz (vecteur unitaire $\vec{e}_z$) s'écrit en un point $\vec{r}(x, y, z)$ et à l'instant t :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 .e^{j(\omega t\text{-}a.x - b.y)}.\vec{e}_z = E_0.e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}.\vec{e}_z$$

Les composantes E_x et E_y sont nulles.



$$\begin{cases} \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \\ \vec{k} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y \end{cases}$$

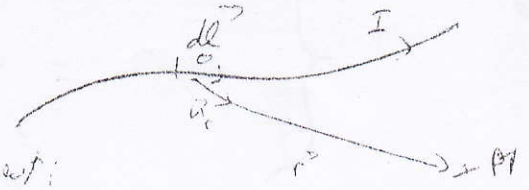
1- a- Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ qui accompagne ce champ électrique peut s'écrire sous la forme $\vec{B}(r, t) = \vec{B}_0(x, y)\, e^{j\omega t}$. Déduire les composantes du vecteur $\vec{B}_0(x, y)$.
b- Evaluer la divergence et le rotationnel de $\vec{B}$.
c- Donner l'expression du vecteur déplacement $\vec{D}$.
2- a- Quelles sont les conditions d'existence du champ électrique $\vec{E}$?
b- Quelle relation existe-t-il entre a, b, ω, et c (célérité de la lumière dans le vide) ?
3- Définir la polarisation de cette onde électromagnétique.
4- Représenter les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'instant t = 0.
5- Déterminer l'équation d'onde à la quelle satisfont $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et en déduire la valeur de ω/k.
6- Déduire l'impédance caractéristique du vide Z_0 en précisant sa valeur numérique.
7- Déterminer les composantes du vecteur de Poynting. Déduire la direction de propagation de l'onde par rapport au vecteur $\vec{k}$.
8- Déterminer la valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique.

On donne la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI et la célérité de la lumière dans le vide $c=3.10^8$ m/S.

Partie II

1. Loi de Biot et Savart :

Le chp mag créé par un élét de courant en un pt M quelconque de l'espace est :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left(I\,d\vec{l}\wedge\vec{u_r}\right)$$

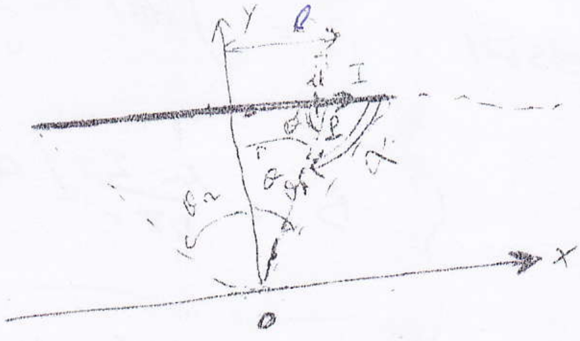
$\vec{r} = \vec{OM}$ distance entre l'élét de courant (circuit) et le pt où se trouve le chp mag $d\vec{B}$.

μ_0 : perméabilité du vide

dl : longueur de l'élét du circuit.

$\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ vecteur unitaire de $\vec{r}$.

2 -



a) un élét de longueur $d\vec{l}$ centré en un pt P du segment de fil, créé au pt O de l'espace une induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$, donnée par la loi de Biot et Savart comme suit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\wedge\vec{u_r}}{\|\vec{PO}\|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\wedge\vec{u_r}}{r^2}$$

$\vec{r} = \vec{PO}$.

$d\vec{B} \perp$ au plan de la figure et est dirigé vers l'arrière ⊗

ceci est vrai pour tous les éléments $d\vec{l}$ du fil. Donc $\vec{B}$ totale a la même direction et le même sens que $d\vec{B}$

Module de $\vec{B}$: $\vec{B} = \int d\vec{B}$

$|B| = B = \int |d\vec{B}|$ car $\vec{B} \parallel$ aux $d\vec{B}$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0\, I\, dl \sin\alpha}{4\pi r'^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos\theta}{r'^2}$$

en effet
$$\left\{ \begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(\pi - \theta') \\ &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= \cos\theta \end{aligned} \right.$$

or $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{l}{r} \Rightarrow dl = \dfrac{r\, d\theta}{\cos^2\theta}$ et $\cos\theta = \dfrac{r}{r'}$

$$\Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{r\, d\theta}{\cos^2\theta}\right) \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot \cos^2\theta.$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos\theta \cdot d\theta$$

soit $B = \int |d\vec{B}| = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r} \displaystyle\int_{+\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta \cdot d\theta = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\sin\theta\right]_{\theta_2}^{\theta_1}$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right]}$$

b) cas d'un fil de longueur infinie

dans ce cas $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \dfrac{-\pi}{2}$

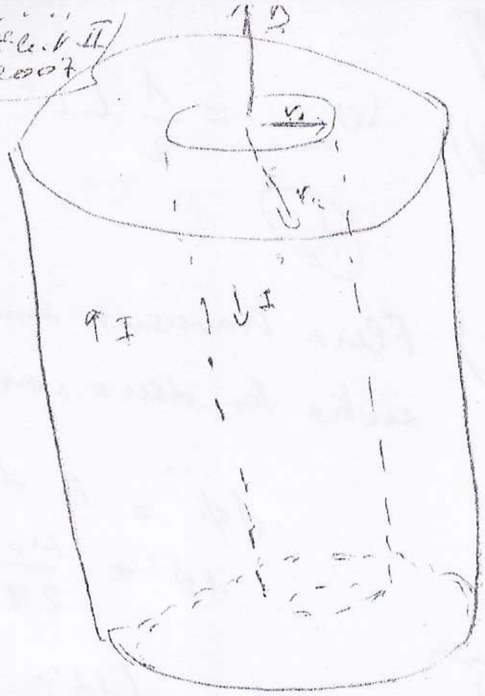
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

c) On peut utiliser le théo d'Ampère s'il y a une symétrie parfaite. Nous, dans le cas (un segment de fil), même si on se place (c.à.d l'=0) dans le plan divisant le segment de fil en deux parties de mêmes longueurs, le théo d'Ampère n'est pas utile ou valable pour le calcul de B (sur un segment de fil présence des effets de bords).

Ex ②

Phys (3), Elec II
2006-2007



* cas où $r < r_1$

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I_i$$

$$\sum I_i = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$$

* cas où $r > r_2$

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I_i$$

$$\sum I_i = I - I = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$$

* cas où $r_1 < r < r_2$

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I_i \qquad \sum I_i = I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

2) a) Densité d'E mag dans la région II où le chps mag n'est pas nul

$$dw_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \, d\tau$$

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

$$\boxed{\frac{dw}{d\tau} = \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \frac{1}{r^2}}$$

b) E mag localisée dans un élt de longueur infinie l de cette structure :

$d\tau = 2\pi r \, dr \, l$

$$\frac{dW_m}{d\tau} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2} \, l \, 2\pi r \, dr$$

$$W_m = \int dw = \frac{\mu_0 I^2 l \, 2\pi}{8\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr$$

$$W_m = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

4) $W_m = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{2 W_m}{\ell I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$

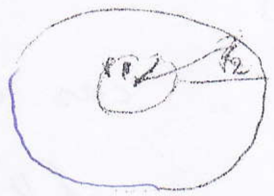
5) Flux traversant une surface rectangulaire de côté $(r_2 - r_1)$ comprise entre les deux conducteurs.

$$d\phi' = B\, dS'$$

$$d\phi' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (dr) . \ell$$

$$\phi = \int d\phi' = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{r_2}{r_1} = L I$$



$$\Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$