Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Physique
Année : 2007/2008
SMP

Contrôle n°1
Physique 3: Electricité II
(S3, Durée : 2h)

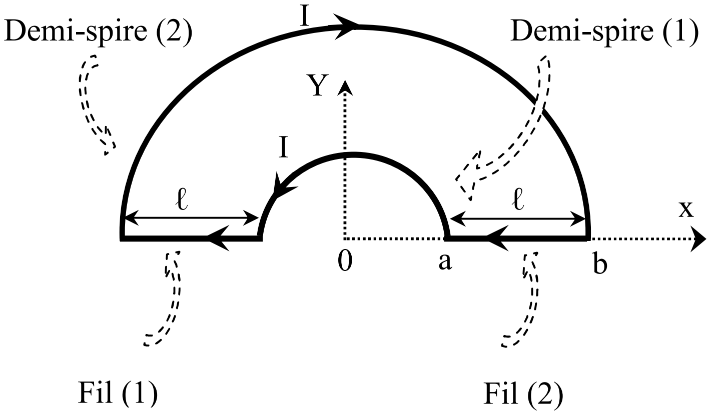
Exercice 1: (5pt)

Une structure formée par deux demi spires circulaires de rayons respectives a et b et de deux fils de longueurs finies ℓ (voir la figure 1 ci-dessous). La structure est placée dans le plan xoy et est parcourue par un courant d'intensité I.

1- Représenter sur une figure les champs magnétiques créés en O par les quatre parties de cette structure.

2- Déterminer le champ magnétique total créé par la structure au point O.

Figure 1



Exercice 2 : (7pt)

1-Un câble dit coaxial, rectiligne, de longueur infinie ℓ, est constitué de deux fils conducteurs concentriques. Le cylindre central (1) est solide de rayon R_1 et le cylindre extérieur (2) est creux de rayons R_2 et R_3. Les deux fils cylindriques sont traversés par le même courant I selon des sens opposés (voir la figure 2 ci-dessous). On suppose que les densités de courant (qu'on note σ) se répartissent à peu près uniformément dans les sections de ces conducteurs.

a- En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace (il y a quatre régions).

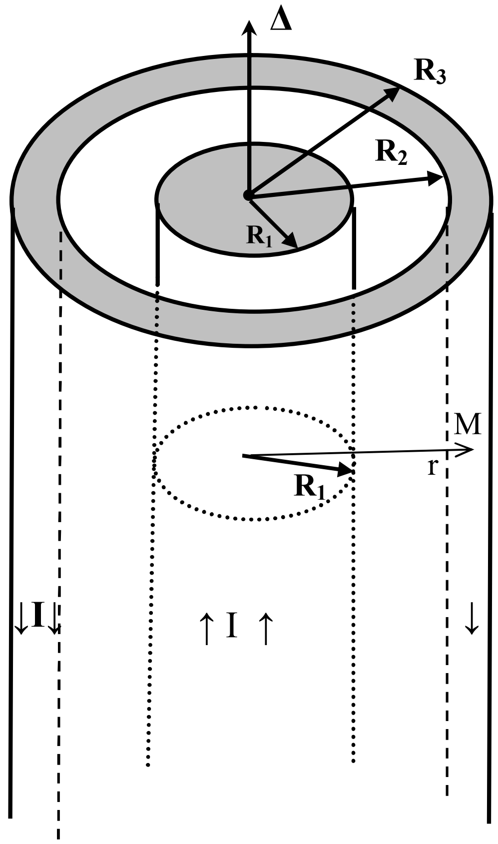
b- Vérifier que pour $R_2 = 2R_1$, le champ magnétique en un point M à l'intérieure du fil cylindrique (2) (voir la figure 2) est égal à $(\mu_0.I/2\pi r).[(R_3^2 - r^2)/(R_3^2 - 4R_1^2)]$. Dans cette région $\sigma = I / [\pi (R_3^2 - R_2^2)] = I_i / [\pi (r^2 - R_2^2)]$ où I_i est une partie du courant traversant le fil cylindrique (2).

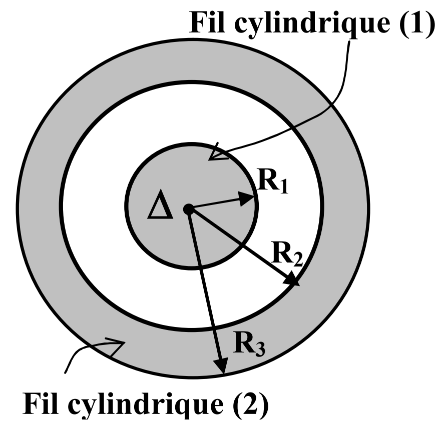
c- Représenter graphiquement le module du champ magnétique en un point quelconque de l'espace, en fonction de la distance de ce point à l'axe du câble.

2- Si on considère que les épaisseurs des parois des deux cylindres sont négligeables.

a- Calculer le flux à travers la surface comprise entre les deux conducteurs. Déduire le coefficient d'auto induction par unité de longueur (L/ ℓ) de cette structure.

b- Déterminer l'énergie magnétique localisée dans la région comprise entre les deux conducteurs. Vérifier la valeur précédente de L/ ℓ.





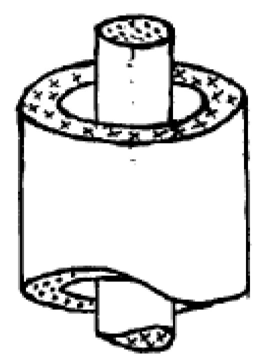


Figure 2

Exercice 3 : (8 pt)

Soit dans le vide, un champ électrique de composantes

$$E_x, = 0,\ E_y = 0,\ E_z = E_0.e^{(\alpha t + \beta x)}$$

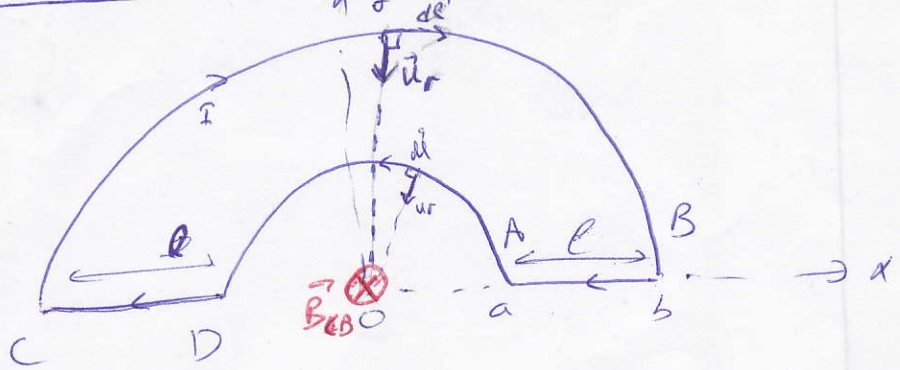
1- Calculer sa divergence et son rotationnel.
2- Déduire le champ magnétique $\vec{B}$ qui accompagne ce champ électrique.
3- Evaluer la divergence et le rotationnel de $\vec{B}$.
4- Quelle relation doivent satisfaire α et β pour que soient satisfaites les équations de Maxwell.
5- Vérifier la relation précédente pour le cas particulier d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale de pulsation ω, de constante de propagation k. En déduire les relations entre α et ω, β et k.
6- Définir la polarisation de cette onde électromagnétique. Cette polarisation est elle verticale ou horizontale (Polarisation V ou H).
7- Déterminer l'équation d'onde à la quelle satisfont $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et en déduire la valeur de ω/k.
8- Déterminer la vitesse de phase de cette onde et sa direction de propagation.
9- Montrer que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires et transverses.
10- Déduire l'impédance caractéristique du vide Z_0 en précisant sa valeur numérique.
11- Déterminer les composantes du vecteur de Poynting (de vecteur unitaire $\vec{k}$). Déduire la direction de propagation de l'onde par rapport au vecteur k et l'axe ox.

On donne la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI et la célérité de la lumière dans le vide $c=3.10^8$ m/S.

contrôle n°1 2007/2008

Physique 3, Elect II

Le 14 Nov. 2007



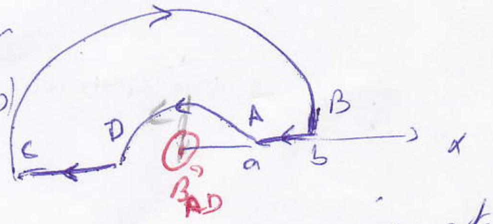
Ex (1)

1°) D'après la loi de Biot et Savart, le chp mag créé par un élt de courant $I\vec{dl}$ en un pt P de l'espace est :

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I\vec{dl}\wedge\vec{u_r}$$

→ Soit $\vec{B}_{CB}$ le chp mag créé par la demi spire (1) (càd CB) de rayon b. (voir la figure précédente)

→ Soit $\vec{B}_{AD}$ le chp mag créé par la demi spire (2) (càd AD) de rayon a



→ les chp mag créés par les deux segmts en O sont nuls. $\vec{dl} \parallel \vec{u_r}$ (1), (2), CB

2) Chp mag créé par la demi-spire

un élt $I\vec{dl}$ de BC créé en O : $\vec{dl} \perp \vec{u_r}$

$$\vec{dB}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl}\wedge\vec{u_r}}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi b^2}$$

$$B_{CB} = \int dB = \int_0^{\pi} d\theta \left(\frac{\mu_0 I b}{4\pi b^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_0^{\pi} d\theta$$

$dl = b\,d\theta$

$$\boxed{B_{CB} = \frac{\mu_0 I}{4b}} \quad \boxed{\vec{B}_{CB} = -\frac{\mu_0 I}{4b}\vec{k}}$$

de même

$$\boxed{B_{AD} = \frac{\mu_0 I}{4a}}, \quad \boxed{\vec{B}_{AD} = \frac{\mu_0 I}{4a}\vec{k}}$$

Les chp mag créés par les deux segments de fil BA et DC sont nuls $\vec{B}_{BA} = \vec{B}_{DC} = \vec{0}$ (dans ces cas $\vec{u}_r \parallel \vec{dl}$)

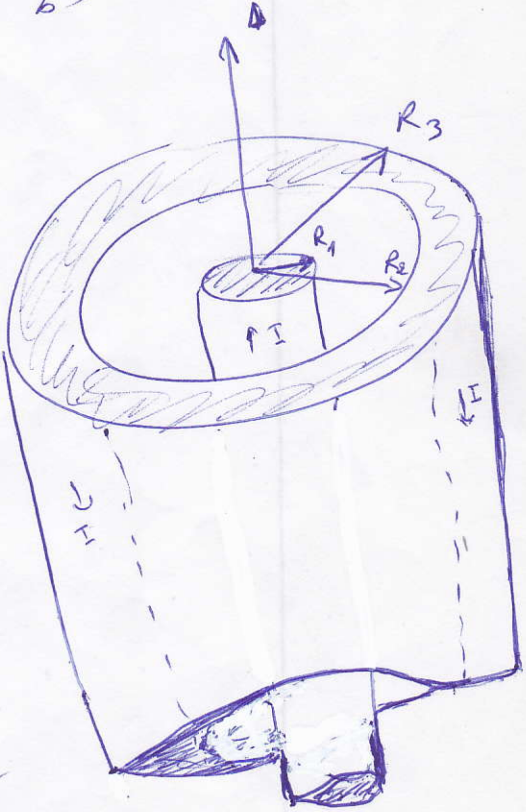
$\Rightarrow$ le chp mag total créé par la structure en O est :

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_{CB} + \vec{B}_{AD} + \vec{B}_{BA} + \vec{B}_{DC}$$

$$\vec{B}_{tot} = -\frac{\mu_0 I}{4b}\vec{k} + \frac{\mu_0 I}{4a}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_{tot} = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\vec{k}}$$

et $B_{tot} = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$



EX 2

1) Chp mag en tout pt de l'espace :

a) Il y a 4 regions (chp en un pt M de l'espace tel que OM = r et O ∈ axe Δ)

→ * Region 1 : $r < R_1$

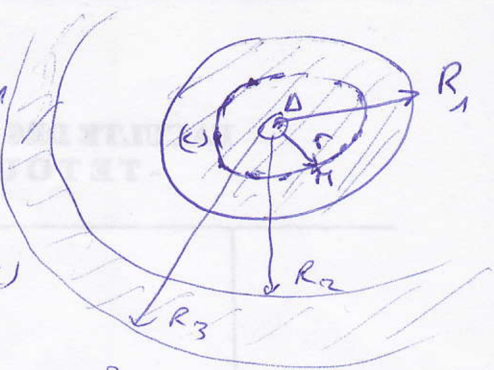
$$\oint_{(C)} \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I_i$$

Le fil est de longueur infinie, les effets de bords sont négligeables, les lignes de chps mag sont des cercles concentriques autour de l'axe Δ. Soit (C) un cercle de centre ∈ à l'axe Δ ⇒ chaque dl on a $\vec{B} \parallel \vec{dl}$

$$\oint_{(C)} \vec{B}\,\vec{dl} = \oint_{(C)} B\,dl = B \oint_{(C)} dl$$

(B est cte en chq pt de C)

$$B \oint_{(c)} dl = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 I_1$$



$$B \, 2\pi r = \mu_0 I_1$$

I_1 est le courant qui traverse (c)

on a $\sigma = \dfrac{I}{\pi R_1^2} = \dfrac{I_1}{\pi r^2} \Rightarrow I_1 = \dfrac{I r^2}{R_1^2}$

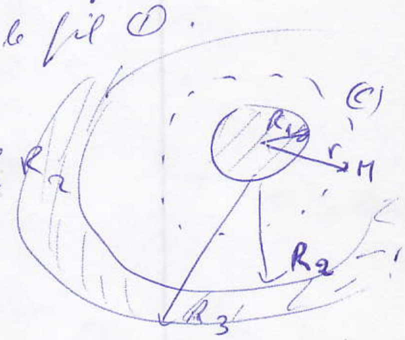
$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi r} \, \frac{r^2}{R_1^2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \, r} \quad \text{pour } r < R_1$$

→ * Région 2 : $R_1 < r < R_2$

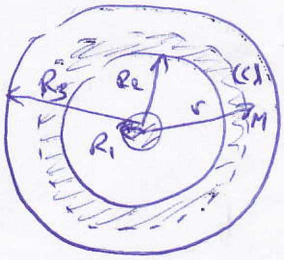
$$\oint_{(c)} \vec{B} \, \vec{dl} = \mu_0 \sum_{i=1} I_i = \mu_0 I_2 = \mu_0 I$$

Maintenant le chemin (c) (choisit aussi sous forme de cercle) est traversé par $I_2 = I$ circulant dans le fil ①.



$$\boxed{B = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi r}} \quad \text{pour } R_1 < r < R_2$$

→ * Région 3 $\quad R_2 < r < R_3$



$$\oint_{(c)} \vec{B} \, \vec{dl} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 I_3$$

$B \, 2\pi r = \mu_0 \left(I - I'_3 \right)$; I'_3 est le courant traversant la zone comprise entre R_2 et r.

courant du fil ①

or $\sigma = \dfrac{I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} = \dfrac{I'_3}{\pi (r^2 - R_2^2)}$; σ est la densité de courant dans le fil ②

$$\Rightarrow I'_3 = \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \, I$$

donc $\quad B = \dfrac{\mu_0}{2\pi r} \left(I - \dfrac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \, I \right)$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)}$$ pour $R_2 < r < R_3$

→ Région 4 : $r > R_3$

$$\oint_{(c)} \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 (I - I) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 0} \text{ pour } r > R_3$$

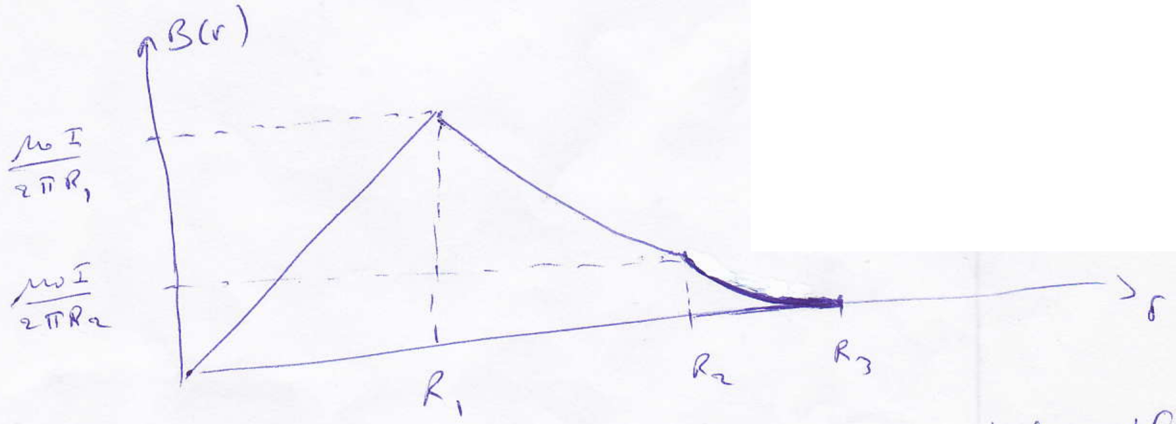
b) Pour $R_2 = 2R_1$:

A l'intérieur du fil ②, càd $R_2 < r < R_3$

on a $B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$

$R_2 = 2R_1 \Rightarrow \boxed{B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - 4R_1^2}\right)}$

c)



2) Cas où les parois des deux cylindres sont négligeables :

a- Pour $R_1 < r < R_2$

~~d'épaisseur~~

Le flux à travers un élément d'épaisseur dr et de longueur l est :

$$d\phi = B\,dS = B\,l\,dr = \frac{\mu_0 I l\, dr}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \phi = \int d\phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \boxed{\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \operatorname{Log}\frac{R_2}{R_1}}$$

donc le flux total à travers la surface comprise entre les deux conducteurs est :

$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\phi = I L \Rightarrow \boxed{\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

b) $$dW_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 . l . 2\pi . r . dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

$$W_m = \int dW_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \operatorname{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

soit $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{L}{l}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

<u>Ex 3</u>

OEM de champ électrique : $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = E_0 e^{(\alpha t + \beta x)}$

1) $\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\text{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} . \vec{j} = -\beta E_z . \vec{j}$

(page 5)

2) $\vec{B}$!

or $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ loi de Faraday

$= -\beta E_z \vec{j} = \cancel{-\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{i}} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}$

Seule la composante B_y est non nulle

$\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \beta E_z$

$B_y = \frac{\beta}{\alpha} E_0 e^{(\alpha t + \beta x)}$

ainsi $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = \frac{\beta}{\alpha} E_0 e^{(\alpha t + \beta x)} \\ B_z = 0 \end{pmatrix}$

3) a) $\vec{\nabla}\vec{B} = \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial z}}_{=0} = 0$

b) le théo d'Ampère nous impose d'avoir

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$

4) soit $\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\beta^2}{\alpha} E_0 e^{\alpha t + \beta x} \vec{k}}$ $= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$ $= \boxed{\mu_0 \varepsilon_0 E_0 \alpha e^{\alpha t + \beta x} \vec{k}} = \mathrm{rot}\,\vec{B}$

$\frac{\beta^2}{\alpha} = \mu_0 \varepsilon_0 \alpha$

$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = +\mu_0 \varepsilon_0 = +c^{-2} = +\frac{1}{c^2}$

l'une de ces relation

$$\boxed{\begin{cases} \beta^2 = \frac{\alpha^2}{c^2} \; ; \; \beta^2 - \frac{\alpha^2}{c^2} = 0 \\ \alpha^2 = c^2\beta^2 \; ; \; c^2\beta^2 - \alpha^2 = 0 \end{cases}}$$

5) Pour le cas particulier d'une OEM plane sinusoïdale de pulsation ω et de vecteur de propagation k : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t \pm kx)}$

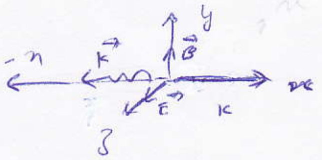
expl : $E_z = E_0 e^{j(\omega t + kx)}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = j\omega \text{ et } \beta = \pm jk}$

pour notre cas $\alpha = j\omega$ et $\beta = +jk$

donc $\beta^2 = \dfrac{\alpha^2}{c^2} \Rightarrow K^2 = \dfrac{w^2}{c^2}$; $k = \pm \dfrac{w}{c}$

6) on a $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{j(wt+kx)} \end{pmatrix}$ et $\vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{w} E_0 e^{j(wt+kx)} \\ 0 \end{pmatrix}$



l'onde est polarisée selon la direction $+Oz$.
et c'est une polarisation Horizontale (Polarisation H)

7) <u>Eq d'onde :</u> on a : $\begin{cases} \vec{E} = E_z \vec{k} = E_0 e^{\alpha t + \beta x} \vec{k} \\ \vec{B} = B_y \vec{j} = \dfrac{\beta}{\alpha} E_0 e^{\alpha t + \beta x} \vec{j} \end{cases}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{E}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{-\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.}$$

ou bien $$\boxed{\nabla^2 E_z - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0} \quad (1)$$

de même $$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \left(-\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\right)$$

$$\boxed{-\nabla^2 \vec{B} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

ou bien $$\boxed{-\nabla^2 B_y + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0} \quad (2)$$

Soit l'éq (1) $\nabla^2 \vec{E} = \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \beta^2 \vec{E}$ et $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \alpha^2 \vec{E}$ donc d'après (1)

$-\beta^2 + \mu_0 \varepsilon_0 \alpha^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\beta^2 = \dfrac{\alpha^2}{c^2}}$ $\boxed{K^2 = \dfrac{w^2}{c^2}}$

$\boxed{K = \pm \dfrac{w}{c}}$ (page +)

$\omega/k = c$

8) Pour une OEM plane, la phase est cte

$$\alpha t + \beta x = cte \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-\alpha}{\beta} = V_p \text{ vitesse de phase}$$

La vitesse de phase $\boxed{V_p = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\omega}{k}}$ l'onde se propage selon l'axe de $-ox$.

9) $$\vec{E}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$$

en plus $\left.\begin{array}{l} \vec{E} = E_z \vec{k} \\ \vec{B} = B_y \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ $\in$ plan yoz et la direction de propagation est selon la direction $-ox$. donc normale au plan yoz.

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses.

10) $$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{E_0}{\frac{\beta}{\alpha} E_0} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

et $$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \mu_0 \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = 377\ (\Omega) = 120\pi\ (\Omega)$$

11) $$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & E_z \\ 0 & \frac{B_y}{\mu_0} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{E_z B_y}{\mu_0} \vec{i},$$

$$= -\frac{E_z \cdot B_y}{\mu_0} \vec{i} = -\frac{E_0^2 \beta}{\mu_0 \alpha} e^{2(\alpha t + \beta x)} \vec{i}$$

$$\vec{P} = \frac{-E_0^2}{\mu_0 \omega} k e^{2(\alpha t + \beta x)} \vec{i} = \frac{E_0^2 k e^{2(\alpha t + \beta x)}}{\mu_0 \omega} (-\vec{i})$$

(page 8) $$= \frac{E_0^2 k . e^{2(\alpha t + \beta x)}}{\mu_0 \omega} \vec{k} \quad \text{avec } \vec{k} = -\vec{i}$$

l'OEM se propage selon $\vec{k}$ càd selon $-ox$.