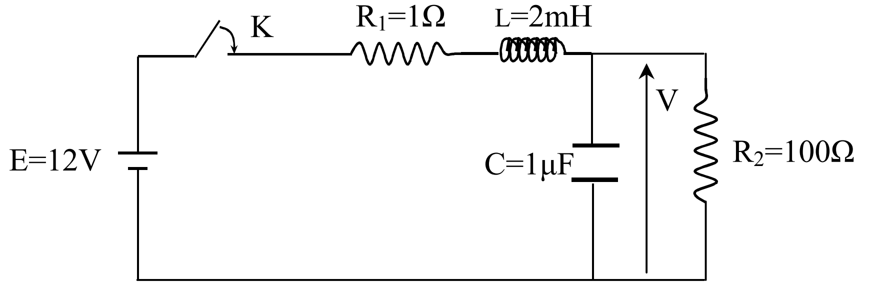
Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Physique
Année : 2010/2011
SMP

Contrôle n°2
Physique 3: Electricité II
(S3, Durée: 1h)

Exercice 1:

I- Régime transitoire:

On considère le circuit de la figure ci-dessous. L'instant initial (t = 0) coïncide avec le moment de fermeture de l'interrupteur K.



1- Donner les valeurs des intensités des courants traversant les différentes branches à l'instant t = 0.
2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension V aux bornes de C et de R_2 pendant le régime transitoire.
3- Résolvez cette équation.

II- Régime alternatif:

On remplace le générateur de tension continue E par une source de tension alternative $U(t) = U_o.\sin(\omega t)$ avec U_0=10V et ω= 314 s^{-1}. Déterminer :

1- L'impédance équivalente de ce circuit.
2- Les courants circulant dans les différentes branches.
3- La ddp aux bornes de la bobine et la résistance R_1 (càd V_{L+R1}).
4- La puissance dissipée par effet Joule dans le circuit.
5- La fréquence de résonance du circuit.

N.B : Remplacer les valeurs numériques directement dans les différentes équations pour simplifier leurs expressions.

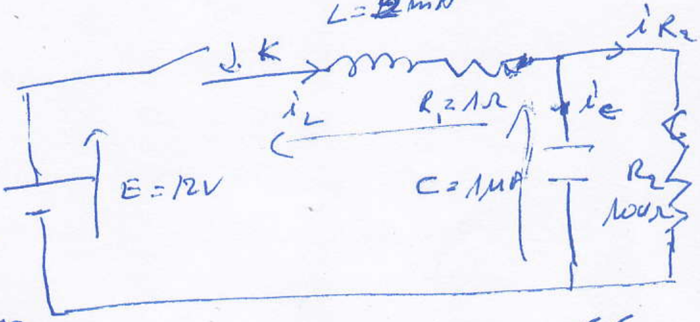
Exercice 2:

Dans le vide, on considère le champ électrique donné par l'expression suivante:
$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz)\,\vec{i}$, E_0 est l'amplitude, ω est la pulsation et k est une cte.
Quelles sont les conditions d'existence de ce champ.

SMP
2010-2011

corrigé du contrôle de Physique 3, Electricité II
7 Janvier 2011

EX I - Régime transitoire :



1) i_L, i_{R_2} et i_c ?

Le générateur est connecté au circuit à l'instant t=0.

on supposera que le condensateur est déchargé à t=0 : il se comporte comme un CC. donc V = 0 . Aussi la bobine (à cet instant) se comporte comme un circuit ouvert : $\boxed{i_L = 0 \Rightarrow i_C = 0 \text{ et } i_{R_2} = 0}$

2) La loi des mailles donne :

$$E = L\frac{di_L}{dt} + R_1 i_L + V \quad , \quad V = V_C = V_{R_2}$$

la loi des noeuds donne : $i_L = i_C + i_R$

or : $i_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V}{R_2}$ et $i_C = C\frac{dV_C}{dt} = C\frac{dV}{dt}$

donc $i_L = C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R_2}$

ainsi $E = LC\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{L}{R_2}\frac{dV}{dt} + R_1C\frac{dV}{dt} + \frac{R_1}{R_2}V + V$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = \frac{E}{LC}} \quad (1)$$

où τ est la cte des temps donnée par : $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}$

et $\omega_0^2 = \frac{R_1+R_2}{R_2LC}$

La dernière équation en V est une équation différentielle du second ordre.

AN : $\tau = 9.524.10^{-5}\,s = 95,24\ \mu s$

$\omega_0^2 \simeq 5.10^8 \Rightarrow \omega_0 \simeq 22360,68\ rad/s$

ainsi $$\boxed{\frac{d^2V}{dt^2} + 10,5.10^3\frac{dV}{dt} + 5.10^8.V = 6.10^9}\quad (2)$$

3. Résolution de l'équation différentielle :

* Eq sans second membre.

on pose : $V = e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \alpha V$ et $\frac{d^2V}{dt^2} = \alpha^2 V$

(2) $\Rightarrow$ $\alpha^2 + 10,5.10^3\alpha + 5.10^8 = 0$

$\Delta = (10,5\times10^3)^2 - 20.10^8 = (1-20)10^8 = -15.10^8 < 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{1,2} = \beta \pm j\omega$

$\begin{cases} \beta = Re(\alpha_{1,2}) \\ \omega = Im(\alpha_{1,2}) \end{cases}$

sol particulière : $V_{par} = \frac{R_2}{(R_1+R_2)}E = 11,88\ V$

$V_{part} = \frac{E}{\omega_0^2.L.C} \Rightarrow$

$V_0 = A.e^{\alpha t}\sin(\omega t+\phi)$ $\in$
$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{-10,5.10^3 + j\sqrt{15.10^8}}{2} = \frac{-1,05 + j\,4,35}{2}10^4 = (-0,52 + j\,2,18)10^4 \\ \alpha_2 = \frac{-10,5.10^3 - j\sqrt{15.10^8}}{2} = (-0,525 - j\,2,18)10^4 \end{cases}$$

la sol de l'eq diff sans second membre : $V = V_0 + V_{part}$

$$\boxed{V = A e^{\alpha t}\sin(\omega t+\phi) + \frac{E}{\omega_0^2 L C}} \Rightarrow V = A.e^{-0,52.10^4.t}\sin(218.10^2 t + \phi) + 11,88$$

avec $\alpha = Re(\alpha_{12})$

on a $V(t) = A\, e^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi) + \frac{E}{\omega_0^2 L . C}$

$= A\, e^{-5250 t} . \sin(2179 t + \phi) + 11,88$

À $t = 0$, $V(t) = 0$ $\Rightarrow A \sin\phi + 11,88 = 0$

et $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ le cond est non chargé

$-5250 \sin\phi + 2179 \cos\phi = 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \frac{2179}{5250} = 0,415$

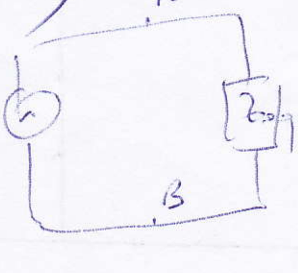
$\Rightarrow \boxed{\phi = 22,54}$

et $A = -\frac{11,88}{\sin\phi} = \frac{-11,88}{0,3833} = -30,99$

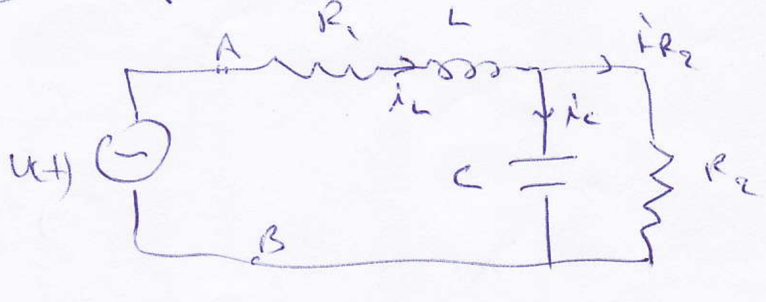
ainsi $\boxed{V(t) = -30,99 . e^{-5250 t} . \sin(2179 t + 22,54) + 11,88}$

II. Régime alternatif :

1)



$\equiv$



$Z_{eq} = R_1 + jL\omega + (R_2 // C)$

$1 + 0,628 j$

$\frac{1}{Z_{R_2//C}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega = \frac{jR_2C\omega + 1}{R_2}$ et $Z_{R_2//C} = \frac{R_2 / j\omega C}{R_2 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R_2}{jR_2C\omega + 1}$

$$Z_{eq} = R_1 + jL\omega + \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

$$= R_1 + jL\omega + \frac{R_2(1 - jR_2C\omega)}{1 + R_2^2C^2\omega^2}$$

$100 - 3{,}14\,j$

$$\boxed{Z_{eq} = \left(R_1 + \frac{R_2}{1+R_2^2C^2\omega^2}\right) + j\left(L\omega - \frac{R_2^2C\omega}{1+R_2^2C^2\omega^2}\right)}$$

$\boxed{Z_{eq} = 101 + j62{,}6}$ $= 101\, e^{j3°8'}$

2) Les courants circulant dans les ≠ branches :

D'après la loi des nœuds :

$\bar{U}_L = \bar{Z}_{eq}\,\bar{i}_L \Rightarrow \bar{i}_L = \bar{u}/\bar{Z}_{eq}$

très bien

$$\bar{i}_L = \bar{i}_C + \bar{i}_{R_2}$$

et d'après la loi des mailles.

$$\begin{cases} \bar{U} = (R_1 + jL\omega)\,\bar{i}_L - \dfrac{j}{C\omega}\,\bar{i}_C \\ R_2\,\bar{i}_{R_2} = -\dfrac{j}{C\omega}\,\bar{i}_C \end{cases}$$

A.N

$$\begin{cases} (1 + j0{,}628)\,\bar{i}_L - j\cdot 3184{,}7\cdot\bar{i}_C = 10 \\ 100\,\bar{i}_{R_2} + 3184{,}7\,\bar{i}_C = 0 \end{cases}$$

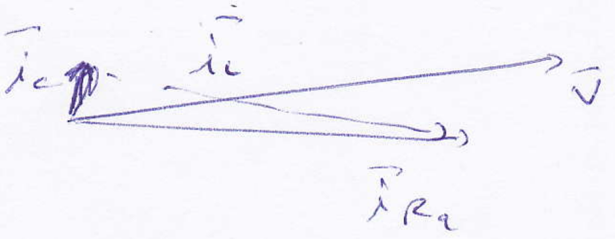
on trouve :

$$\begin{cases} \bar{i}_C = 3{,}11\cdot 10^{-3}\cdot e^{j89°37'} \\ \bar{i}_{R_2} = 99\cdot 10^{-3}\, e^{-j0°23'} \\ \bar{i}_L = 99{,}08\cdot 10^{-3}\cdot e^{j1°1} \end{cases}$$

N.B les déphasages sont donnés par rapport à $\bar{V}$.

* Représentation de Fresnel :

$$\bar{i}_L = \bar{i}_c + \bar{i}_R$$



3) La ddp : V_{L+R_1} ?

on a $\bar{V}_{L+R_1} = (R_1 + jL\omega)\,\bar{i}_L$

$$\boxed{\bar{V}_{L+R_1} = (1 + j\,0{,}628) \cdot 99{,}08\,10^{-3}\,e^{j\,1^\circ 10'}}$$

4) Puissance dissipée par effet Joule dans le circuit :

on a $P = R_1 I^2_{R_1 eff} + R_2 I^2_{R_2 eff}$

AN $P = R_1 I^2_{L eff} + R_2 I^2_{R_2 eff}$

$$= \frac{(99{,}03 \cdot 10^{-3})^2}{2} + 10^2 \frac{99^2 \cdot 10^{-6}}{2}$$

$$\simeq 0{,}5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} + 0{,}5 \times 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}$$

$$\boxed{P \simeq 0{,}5\ W}$$

5) La fréquence de résonance du circuit

$$Z_{eq} = \left(R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}\right) + j\left(L\omega - \frac{R_2^2 C\omega}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}\right)$$

A la résonance, la partie imaginaire de $\hat{Z}_{eq}$ doit être nulle ; donc

$$L\omega - \frac{R_2^2 C\omega}{1+R_2^2C^2\omega^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega\left(L - \frac{R_2^2 C}{1+R_2^2C^2\omega^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{R_2^2 C}{1+R^2C^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad L + R_2^2C^2\omega^2 L = R_2^2 C.$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{R_2^2C - L}{R_2^2C^2L}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R_2^2C - L}{LR_2^2C^2}} = \frac{1}{R_2C}\sqrt{\frac{R_2^2C - L}{L}}$$

AN : $\omega = 2.10^4$ rad/s

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3183,1 \text{ Hz}$$

Ex ②

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + K z).\vec{i} = E_x(z)\vec{i}$$

Conditions d'existence de ce champ ?

$\vec{E}$ existe si et seulement si, il satisfait aux quatre éq de Maxwell :

* $$\vec{\nabla}\vec{E} = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = 0$$

* $$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$+\frac{\partial E_x(z)}{\partial z}\vec{j} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-E_0 K.\sin(\omega t + Kz)\vec{j} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{E_0 K}{\omega}\cos(\omega t + Kz).\vec{j}} = B_y\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial B_y(z)}{\partial y} = 0.$$

donc $\boxed{\vec{\nabla}\vec{B} = 0}$ est bien satisfaite

* $$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{i} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{E_0 K^2}{\omega}\sin(\omega t + Kz)\vec{i} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = +\frac{E_0 K^2}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\cos(\omega t + Kz).\vec{i}$$

or $$\vec{E} = E_0\cos(\omega t + Kz)\vec{i}$$

$$\Rightarrow \frac{E_0 K^2}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2} = +E_0 \Rightarrow K^2 = +\mu_0\varepsilon_0\omega^2$$

$$\boxed{K = \pm\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Le chp électrique ne peut exister que si cette condition est satisfaite.