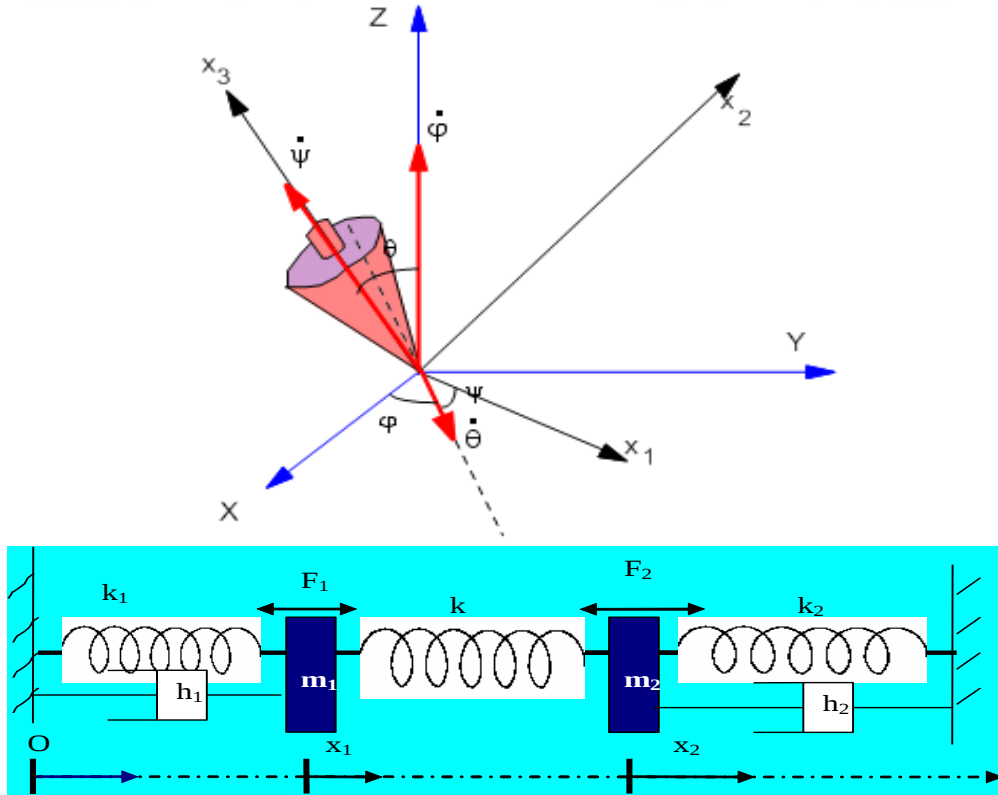




جامعة سيدي محمد بن عبد الله
كلية العلوم ظهر المهرزاز

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
كلية العلوم ظهر المهرزاز

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar Mahraz



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

L.P.S.

COURS MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET DE VIBRATION

Semestre 5 – Module Mec analytique et vibration - Filière SMP
Année universitaire 2014-2015

Réalisé par :

Pr. REZZOUK Abdellah

Volumes d'heures : 18h cours et 18h TD.

Intervenants : Abdellah REZZOUK/Sabri (cours) et (TD).

Prérequis : Module Mécanique 1 et mécanique de solide

Évaluation :

- C. C : $\frac{1}{4}$ de la note
- Examen Final : $\frac{3}{4}$ de la note

Documents.

- Polycopié de cours
- Travaux Dirigés

Mots-clés : PTV, ELS, ELM, PMA, ELL, Oscillateurs harmoniques et anharmoniques.

Cours en ligne :

Site : www.fsdmfes.ac.ma (voir formations/supports cours/Licence/SMA-rezzouk)

Objectif

Ce cours a pour objectif d'initier les étudiants à la mécanique classique avancée pour obtenir des solutions analytiques à un problème mécanique. Acquérir un esprit critique sur les performances et les limites de la mécanique analytique.

Ce cours contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours de mécanique classique et prend inspiration comme il est coutume de plusieurs livres de références. Les notes couvrent la mécanique classique avancée, soit le formalisme de Lagrange, le formalisme canonique et le principe de travaux virtuels (P.T.V). Les théorèmes généraux de mécanique ainsi que le P.T.V sont rappelées dans le chapitre 1. Le formalisme de Lagrange est introduit au chapitre 2, suivent le formalisme canonique, le Principe de Moindre Action et théorie des vibrations (ELL) (chapitre 3) et finalement les oscillateurs harmonique et anharmonique (chapitre 4).

Enfin, j'espère que les étudiants de S3 de la filière SMA trouveront dans ce support un bon outil de travail qui leur permettra de bien maîtriser cette partie du cours de la mécanique analytique.

Chapitre I - Introduction au P.T.V

I- RAPPELS DES THÉORÈMES GÉNÉRAUX	4
1- P.F.D	4
2- THÉORÈME DE MOMENT CINÉTIQUE	
3- THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE	
4- LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE POUR UN SOLIDE	4
II- DESCRIPTION DU SYSTÈME MATÉRIEL	5
II.1- INDÉPENDANCE DES COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES	6
II.2- LIAISONS	6
II.3 - CLASSIFICATION DES LIAISONS	6
II.4- NOMBRE DE DEGRÉ DE LIBERTÉ	8
II.6- FORMES DES ÉQUATIONS DE LIAISONS	8
II.7- NOTION DE FORCES OU D'EFFORTS	9
III- PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS : P.T.V	9
III.1- MOUVEMENT VIRTUEL D'UN SYSTÈME MATÉRIEL	10
III.2. LIAISON PARFAITE DANS UN M.V.C.	
III.3- DÉPLACEMENTS VIRTUELS (D.V.)	10
III.4- TRAVAUX VIRTUEL (T.V.)	12
III.5. PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS (P.T.V.)	12
III.6- FORCES GÉNÉRALISÉES	15
IV- DÉCOMPOSITION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE	16

Chapitre I- Principe de Travaux Virtuels

I- RAPPELS DES THÉORÈMES GÉNÉRAUX

1- P.F.D.(2^{ÈME} LOIS DE NEWTON = THÉORÈME DE CENTRE DE MASSE)

☛ (M) point matériel : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\Gamma}(M)$.

☛ $\{M_i\}$ système discret : $\sum \vec{F}_{ext} = \sum_i m_i \vec{\Gamma}_i(M_i) = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ avec $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$ et $\vec{\Gamma}_i = \frac{d\vec{V}_i}{dt}$.

☛ (S) solide : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\Gamma}(G)$.

2- THÉORÈME DE MOMENT CINÉTIQUE

☛ (M) point matériel : $\sum n\eta_O(\vec{F}_{ext}) = \frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{\delta}(O, M/R)$.

☛ $\{M_i\}$ système discret : $\sum n\eta_O(\vec{F}_{ext}) + \sum n\eta_O(\vec{F}_{int}) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O\{M_i\} = \sum_i \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O(M_i)$ avec $n\eta_O(\vec{F}_A/R) = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A$.

☛ (S) solide : $\sum n\eta_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{\delta}(O, S/R)$.

3- THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

☛ (M) point matériel : $\sum dW(\vec{F}_{ext}) = dT(M/R)$ et $T(M/R) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(M/R)$.

☛ $\{M_i\}$ système discret : $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{m_i}$ avec $dT = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$.

☛ (S) solide : $\sum dW(\vec{F}_{ext}) = dT(S/R)$.

Remarque : Si toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle $E_p \Rightarrow \sum dW(\vec{F}_{ext}) = -dU = dT(S/R) \Leftrightarrow d(T+U) = dE_m = 0 \Rightarrow E_m = cste$, donc E_m est conservé.

4- LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE POUR UN SOLIDE

$$\left[\vec{F}_e \right]_G = \left[\vec{\delta}_O(S) \right]_G \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\Gamma}(G/R) \rightarrow \text{Théorème centre de masse} \\ \sum n\eta_G \vec{F}_{ext} = \vec{\delta}(G, S/R) \rightarrow \text{Théorème de moment dynamique} \end{cases}$$

II- DESCRIPTION DU SYSTÈME MATÉRIELS

☛ Système matériel : Un ensemble de solide et de point matériels tout a fait général $\{S_i, M_j\}$ $i = 1$ à N et $j = 1$ à M .

Les particules M_j sont caractérisées par 3 paramètres $M_j(x_j, y_j, z_j)$ par contre le solide doit avoir 6 paramètres $S_i(x_{Gi}, y_{Gi}, z_{Gi}, \psi_i, \phi_i, \theta_i)$. Donc on a $3M+6N = n$ (coordonnées généralisées) paramètres primitifs.

Remarque : Un solide libre peut effectuer 3 translations indépendantes et 3 rotations indépendantes toutes les 6 à la fois, il y a donc 6 d.d.L : les 3 translations sont repérés par les coordonnées du centre de masse et les 3 rotations sont repérées par les 3 angle d'Euler ψ, θ et ϕ : ψ : précision, θ : mutation, ϕ : rotation propre.

☛ Espace de configuration :

On va remplacer les $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_j, y_j, z_j, x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}, \psi_1, \phi_1, \theta_1, \dots, x_{Gi}, y_{Gi}, z_{Gi}, \psi_i, \phi_i, \theta_i)$, et on va les appeler, par $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, q_n, q_n) = \{q_i\}$ et $i = 1$ à $n = 6N+3M$. $\{q_i\}_{i=1 \text{ à } n}$ sont appelés coordonnées généralisées.

Considérons un système matériel dont la position est déterminée par n variables indépendantes, ou degrés de liberté, $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, notés $\{q_i\}_{i=1 \text{ à } n}$. On appelle *espace de configuration* l'espace à n dimensions tel que la position du système soit caractérisée par un point de coordonnées $\{q_i\}_{i=1 \text{ à } n}$. Au cours du temps, ce point $\bar{q} = \{q_i\}$ décrit une trajectoire dans cet espace, ie $\forall M \in (S) \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(\bar{q}, t)$.

Exemple : Pour un point matériel évoluant dans l'espace physique habituel, l'espace de configuration s'identifie à cet espace (Fig. 1a). En revanche, il n'en est pas de même pour un pendule simple, dont la position est caractérisée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale descendante (Fig. 1b) ou pour un ensemble de 2 particules couplées par un ressort de raideur k évoluant sur un même axe Ox (Fig. 1c).

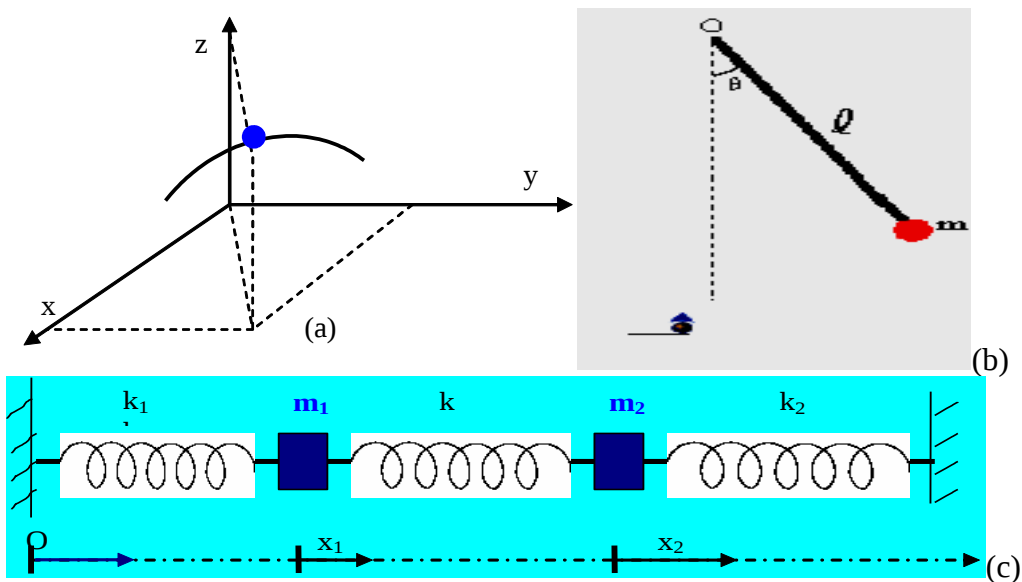


Fig. 1

Pour un système constitué de N particules, en mouvement quelconque les unes par rapport aux autres, le nombre de degrés de liberté est $n = 3N$. L'espace de configuration a donc dans ce cas $3N$ dimensions.

Notons qu'un *point de l'espace de configuration* détermine la position du système et non son état mécanique, lequel exige, en outre, la connaissance de l'ensemble des vitesses ou mieux des quantités de mouvement.

II.1. INDÉPENDANCES DES COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

- Si tous les q_i sont indépendantes alors **$\dim(S) = n$** .
- Si il y a " m " relations entre les q_i alors **$\dim(S) = n-m$** .

Exemple :

♦ Prenons le cas où 2 points M_1 et M_2 sont indépendantes (Fig. 2a) donc obligatoirement on a un système à 6 dimensions.

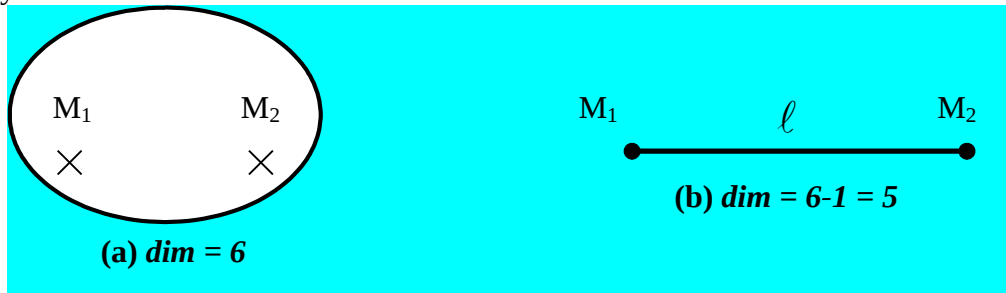


Fig. 2

♦ Si M_1 et M_2 sont liés par la relation $M_1 M_2 = l$ (Fig. 2b) donc on aura un système à 5 dimensions car la 6^{ème} sera relié par une équation $M_1 M_2 = l$ d'où $\dim = d.d.l = 6-1 = 5$.

II.2. LIAISONS

Définition 1 : Un solide est soumis à une liaison si les positions qu'il doit prendre doivent satisfaire à certaine condition.

Définition 2 : Une liaison pour un système (S) : toute relation (ou système de relation) imposée, à priori, et indépendamment de toute conséquence des lois de la dynamique, aux paramètres inconnues $\bar{q} = \{q_i\}$.

Définition 3 : Donc une liaison est une limitation de l'indépendance du mouvement d'une partie ou plusieurs de système imposé par une autre partie ou bien d'autre obstacles extérieurs.

II.3. CLASSIFICATION DES LIAISONS

Toute liaison (contact, glissement nul, frottement nul,, etc) est caractérisée par une relation entre les différentes coordonnées généralisées ou certaines d'entre elles et d'autre paramètre le temps. On exprime une liaison par des relations $F(q_k, \dot{q}_k, t) \geq 0$ ou $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$: vitesse généralisée. Toute relation de ce genre traduit une liaison ou contrainte. Soit m le nombre de telle relation ($m \leq n$), le nombre de coordonnées généralisées indépendantes : $n-m = s = d.d.l$.

Définition 4 : Une liaison exprimée par une *égalité* sera dite une *liaison bilatérale*. Bilatérale : traduit par une équation $F = 0$ ie agit sans interruption.

Définition 5 : Une liaison exprimée par une *inégalité* sera dite une *liaison unilatérale*. Unilatérale : traduit par une inéquation $F \geq 0$ ie peut agir ou ne peut pas agir.

Exemple :

♦ Prenons le cas où 2 points M_1 et M_2 sont liés par la relation $M_1 M_2 = l$ (Fig. 3b ci dessous) donc on est en présence d'une liaison bilatérale traduit par la relation $M_1 M_2 = l$.

♦ Prenons le cas d'un point matériel "A" qui se déplace dans un plan (Oxy) (Fig. 3a) : la liaison n'agit pas quand $z > 0$ et elle agit quand $z = 0$ donc on est présence d'une liaison unilatérale traduit par la relation $z \geq 0$

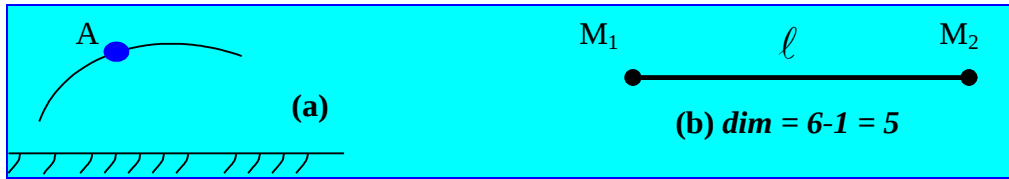


Fig. 3

Définition 6 : Une *liaison* est dite *holonome* si elle se traduit par une relation entre les seuls paramètres $(q_k)_{k=1 \text{ à } n}$ (ie à l'exclusion de toute intervention de leurs dérivés) et "t" : $F(q_k, t) = 0$.

☛ Une *liaison holonome* sera, donc, traduit par $F(q_k, t) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \forall k$. C'est le cas des conditions géométriques.

☛ Une *liaison non - holonome* sera, donc, traduit par $F(q_k, \dot{q}_k, t) = 0 \Rightarrow \exists k \quad t q \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \neq 0$. C'est le cas des conditions cinématiques (font intervenir les vitesses généralisées dq_k/dt).

Définition 7 : Une *liaison* est dite *non - holonome* si elle se traduit par les $q_k, \dot{q}_k$ et le temps t , cette relation étant linéaire : $\sum_{j=1}^m a_j(q_k, t) \dot{q}_k + b_j(q_k, t) = 0 \quad ; \quad k = 1 \rightarrow n$.

Définition 8 : Une *liaison* est dite *semi - holonome* si elle est *non - holonome* intégrable ie paramétrable, autrement dit c'est une liaison qui peut se ramener au moyen d'intégrale à une liaison holonome.

Exemple :

♦ Roulement sans glissement d'une sphère sur un plan :

$\vec{V}_g(S/\mathcal{R}) = \vec{V}(I \in S/\mathcal{R}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_G - R(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) = 0 \\ \dot{y}_G + R(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) = 0 \end{cases}$, liaisons (bilatérales) non holonomes.

♦ Roulement d'une roue sur une droite : $\dot{x} + R\dot{\theta} = 0 \Rightarrow x + R\theta = cste$, liaison semi - holonome.

Définition 9 : Une *liaison* est dite *scléronome* si elle est indépendante explicitement du temps. Elle est dite *rhéonome* dans le cas contraire.

☛ Une liaison scléronome sera, donc, traduit par $F(q_k, \dot{q}_k) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \forall k$. C'est le cas des obstacles fixes.

☛ Une liaison rhéonome sera, donc, traduit par $F(q_k, \dot{q}_k, t) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0 \quad \forall k$. C'est le cas des obstacles mobiles.

Définition 10 : Une liaison est dite parfaite si elle est holonome, paramétrable (ou résoluble) bilatéral tel que le travail de la force de liaison est nul. Elle est dite dissipative dans le cas où il y a perte d'énergie.

Définition 11 : On appellera liaisons principales (L.P.), des liaisons arbitrairement choisies parmi toutes les liaisons imposées à (S) qui vérifient les 2 points suivants :

1- $F(q_k, t) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \forall k$ ie elles sont holonomes.

2- le système est résoluble ou plus généralement paramétrable ie que l'on peut effectivement les résoudre (ou les paramétrer).

Cas particulier :

Si toutes les liaisons principales sont indépendantes du temps ie $F(q_k) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = 0$, alors les

$$\text{L.P sont scléronomes } d\vec{OM} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} dq_i \Leftrightarrow d\vec{M} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} dq_i.$$

Définition 12 : Si il existe des liaisons autres que les liaisons principales, on les appellera liaisons supplémentaires (L.S.).

II.4. NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ : d.d.l = n

♦ Si (S) est soumis qu'aux 'p' liaisons principales (L.P) $\Rightarrow$ d.d.l = n = N - p.

♦ Si (S) est soumis en plus à 's' liaisons supplémentaires (L.S) $\Rightarrow$ d.d.l = n = N - p - s = N - m.
Où 'N' : c'est le nombre de paramètres primitifs, 'n' : c'est le nombre de coordonnées généralisées et 'm' c'est le nombre d'équation de liaisons.

II.5. FORMES DES ÉQUATIONS DE LIAISONS

☛ Liaison holonome $\Rightarrow \boxed{F(q_k, t) = F(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0} \quad [1]$. C'est une fonction scalaire de n+1 variables (q_k, t) ; une telle relation est appelée équation de liaison holonome (elle ne fait pas intervenir les dérivées $\dot{q}_k$) entre les paramètres.

☛ Pour une liaison holonome $\frac{dF}{dt} = 0$ (car $F(q_k, t) = 0$) $\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Soit,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_{kl}(q_k, t) \dot{q}_k + b_l(q_k, t) = 0} \quad [2], \text{ une fonction scalaire affine, ie linéaire, en } \dot{q}_k, \text{ avec } a_{kl} \text{ et } b_l$$

sont des fonction de (q_k, t) supposées continues et $l = 1 \rightarrow m$: indice de liaison.

S'il est possible par intégration de ramener (2) à une relation de la forme (1), la relation (2) est alors qualifiée d'équation de liaison semi - holonome ; dans le cas contraire elle est dite non - holonome. La liaison (1) est dite indépendante du temps si $F(q_k, t)$ est fonction des seuls q_k

, à l'exclusion de t ; la liaison (2) est dite indépendante du temps si tous les a_{kl} sont fonctions des seuls q_k et si la fonction b_l est identiquement nulle.

Une liaison holonome (éventuellement obtenue par intégration d'une équation de liaison semi - holonome) de la forme (1) est qualifiée de principale, ou primitive, lorsque résolue en l'un des q_k elle est utilisée pour remplacer ce q_k par sa valeur en fonction des autres paramètres et donc diminuer le paramétrage d'une unité, de telle sorte que le mouvement réelle (M.R) ou le mouvement virtuelle (M.V) qui s'en déduit soient exprimés avec ce paramétrage réduit ; le M.V est alors dit compatible avec la liaison principale. Une équation de liaison qui n'est pas utilisée pour effectuer la réduction de paramétrage qui vient d'être indiquée est qualifiée de supplémentaire, ou complémentaire, (ceci aussi bien dans le cas d'une liaison non – holonome, que dans celui d'une liaison pouvant se mettre sous forme holonome).

Définition 13 : Un mouvement virtuel de (S) compatible avec les liaisons principales choisies est un M.V tenant compte uniquement des relations imposées par ces liaisons à l'instant considéré. On dira simplement mouvement virtuel compatible (M.V.C). Le champ de déplacement virtuel

compatible correspondant s'écrit : $\delta \vec{M} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \delta q_i$. On rapprochera cette relation de celle obtenue en écrivant (1) sous forme semi – holonome (2) :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} dt = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Remarque : Une liaison non holonome ne peut donc en aucun cas être une liaison principale. Car son équation de liaison est non intégrable, non résoluble.

II.6. NOTIONS DE FORCES OU D'EFFORTS

On distingue 2 types de forces :

- ☛ Les forces extérieures à (S) qui sont des forces exercées sur des éléments de (S) par des systèmes n'appartenant pas à (S). En général, il s'agit des forces actives ou données.
- ☛ Les forces intérieures qui sont des forces exercées par des éléments de (S) sur d'autres éléments de (S) (force de liaison).

Exemple

- Force à distance (gravité)
- Force de contact (frottement)
- Force conservative (gravité) dérive d'une énergie potentielle $E_p = U$.
- Force non conservative (frottement) ne dérive pas d'une $E_p = U$.

$\vec{F}$ est conservative si $\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}U(\vec{r})$.

$U(\vec{r})$: énergie potentiel associée à la force $\vec{F}(\vec{r})$. $dW = \vec{F}.d\vec{r} = -\overrightarrow{\text{grad}}U(\vec{r}).d\vec{r} = -dU$.

III- PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS (NOTÉ P.T.V.)

Cette méthode des travaux virtuels, qui est à l'origine de la formulation lagrangienne de la mécanique (cf. chapitre 2), s'appuie sur la notion de déplacement virtuel (noté D.V.). Elle présente l'avantage de ne pas exiger le calcul de toutes les réactions entre les différentes parties des systèmes considérés et donc d'être plus efficace.

III.1. MOUVEMENT VIRTUEL (M.V) D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

Le déplacement réel (D.R) infinitésimal d'un point quelconque M de (S) pendant l'intervalle dt est $\overrightarrow{MM'} = d(\overrightarrow{OM}) = d\vec{M}$.

Définition 14 : À un instant *t arbitraire mais fixe*, on appellera *mouvement virtuel (noté M.V.)* du système (S) la donnée d'un certain champ de vecteur $\vec{u}(M) : \forall M \in S \rightarrow \vec{u}(M) = \delta(\overrightarrow{OM}) = \delta\vec{M}$. Ce champ de vecteur sera interprété comme étant un *déplacement virtuel infinitésimal* à l'instant t et on le notera $\delta\vec{M}$.

Notation: Le D.R et le D.V seront, donc, notés respectivement $d\vec{M}$ et $\delta\vec{M}$.

Définition 15 : On appelle *mouvement virtuel compatible (noté M.V.C.)* tout mouvement virtuel de (S) compatibles avec les liaisons principales à l'instant t fixé. Le champs de déplacement virtuel compatible (noté D.V.C.) s'écrit : $\delta\vec{M} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i$.

III.2. LIAISON PARFAITE DANS UN M.V.C.

Définition 16 : Une liaison entre 2 solides de système (S) (ou entre un solide de (S) et un obstacle) est dite *parfaite* si, et seulement si, quel que soit t, le travail virtuel (ou la puissance virtuelle) des inter - efforts de liaison est nulle pour tout M.V.C. à cette liaison.

Définition 17 : On dit qu'une liaison vérifie la *condition des travaux virtuels (noté C.T.V.)* si le travail des forces de liaison, pour tout M.V.C. avec la liaison, est nul.

III.3. DÉPLACEMENT VIRTUEL (NOTÉ D.V.) ÉLÉMENTAIRE

Définition 18 : On appelle *D.V. élémentaire* tout déplacement élémentaire arbitraire, de l'ensemble d'un système ou de certain de ces parties, *à une date fixée*, compatible avec les liaisons qui définissent le système considéré. On notera ce déplacement $\delta\vec{M}$ ou $d_v\vec{M} = d_v\vec{r}$.

Remarques :

♣ Dans un D.V. tout est permis : mouvement d'un corps en équilibre, pénétration dans des obstacles impénétrables.

♣ Un D.V. s'effectue à temps fixe : c'est une déformation de la configuration (image) réel de système à un instant donné.

Exemples :

♣ Sur une tige, le D.V. d'une masselotte est δx alors que son D.R. élémentaire est $dx = v_x \cdot dt = \dot{x} \cdot dt$. On note ainsi que δx est arbitraire et donc indépendant de la vitesse, contrairement à dx (Fig. 4a).

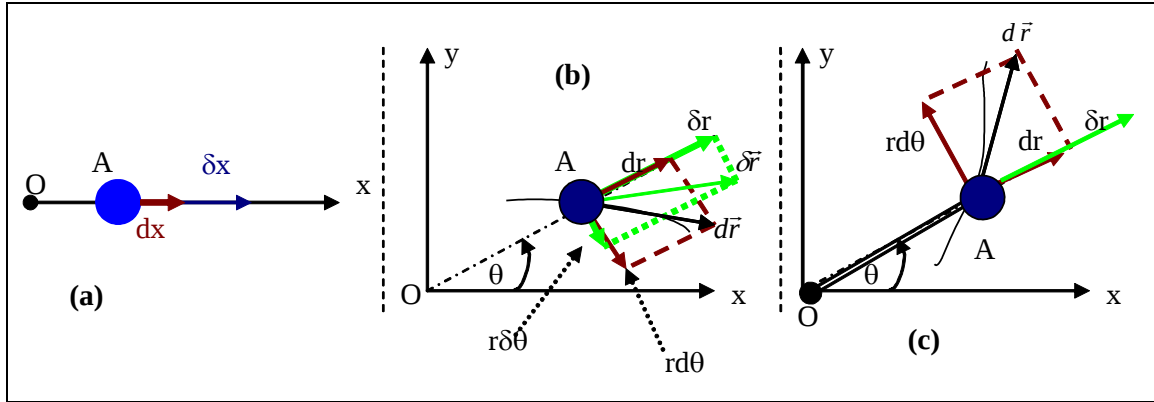


Fig. 4

✎ Dans le plan Oxy, le déplacement du point A est (Fig. 4b) : $\delta \vec{r} = \delta r \cdot \vec{e}_r + r \delta \theta \cdot \vec{e}_\theta$ avec dr et $d\theta$ arbitraires, alors que le D.R. élémentaire est $d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta$. Contrairement au D.R. élémentaire, pour lequel, $dr = \dot{r} \cdot dt$ et $d\theta = \dot{\theta} \cdot dt$, le D.V. élémentaire n'est pas, a priori, tangent à la trajectoire.

✎ Si un point A coulisse sans frottement sur un tige en mouvement (Fig. 4c), la liaison dépend de temps. Par conséquent le D.V. de A, compatible avec cette liaison à l'instant t fixé, ne comporte pas de contribution angulaire, d'où $\delta \vec{r} = \delta r \cdot \vec{e}_r$.

Définition 19 : Un D.V. est dit licite (noté D.V.L.) lorsqu'il respecte toutes les liaisons dans leur configuration à un instant donné. Il est dit non licite (noté D.V.nonL.) s'il ne respecte pas toutes les liaisons dans leur configuration à un instant donné.

Remarques :

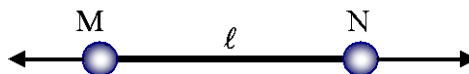
✎ Il y'a un unique D.R. mais il y'a une infinité de D.V., donc nous disons que le D.R. est un cas particulier de D.V.

✎ Un D.V.L. respecte les liaisons dans leur état à l'instant t fixé, par contre un D.R. respecte les liaisons dans le mouvement entre t et $t+dt$.

✎ Le D.R. peut coïncider avec le D.V.L. si les obstacles sont fixes ie toutes les liaisons sont scléronomes.

Exemples :

✎ Soit 2 boules liées par une tige rigide. Ce déplacement est non réalisable $\Rightarrow$ D.V.nonL.



✎ Une particule M, qui se déplace sur une courbe C_t , dans un plan. Soit C_t se déplace (obstacle mobil $\Rightarrow$ liaison rhéonome) et $d\vec{r}$ déplacement réel de point M qui respecte M dans son

mouvement : (1) D.V.L. car il respecte la liaison et (2) D.V.nonL. car il ne respecte pas la liaison (Fig. 5a).

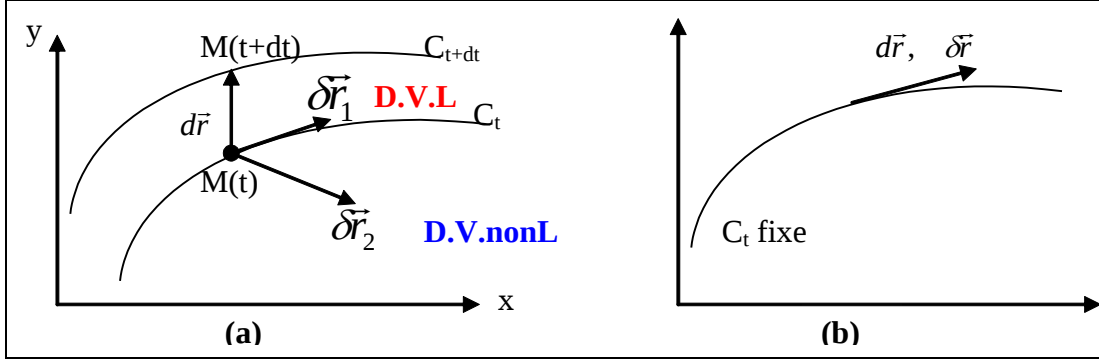


Fig. 5

🐞 Dans le cas de la Fig. 5a, le D.R. de M est un D.V.nonL., par contre dans le cas de la figure 5b ie à obstacle fixe le D.R. = D.V.L.

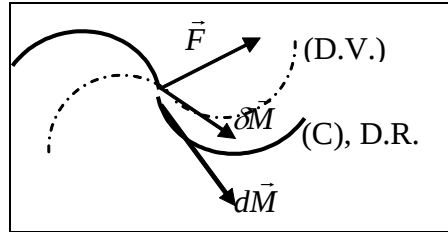
III.4. TRAVAIL VIRTUEL ÉLÉMENTAIRE (T.V.)

Définition 20 : À une date quelconque t , on appelle *travail virtuel élémentaire* (noté T.V.) d'une force F , appliquée à un point M d'un système, le travail élémentaire de F dans un déplacement virtuel élémentaire, δM , à cette date : $\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{M}$.

Remarques :

👉 Attirons l'attention sur le travail *non nul* de la force de Coriolis, dans un déplacement virtuel élémentaire ; en effet, δM n'est pas a priori tangent à la trajectoire dans le référentiel non galiléen.

🐞 $\vec{F} \perp (C) \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{M} = 0$ par contre $\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{M} \neq 0$. Voir figure ci-dessous.



III.5. PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS (P.T.V.)

♣ Soit un système (S) formé de particules $\{m_i, \vec{r}_i\}_{i=1 \rightarrow n}$ et chaque m_i est soumis à des forces de résultante $\vec{R}_i = \vec{F}_{i, ext} + \vec{F}_{i, int}$.

♣ P.F.D pour m_i : $\vec{R}_i = m_i \vec{a}_i \Leftrightarrow \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0 \Leftrightarrow \vec{R}_i + \vec{F}_i'' = 0$ où $\vec{F}_i'' = -m_i \vec{a}_i$ c'est la force d'inertie. D'autre part $\vec{R}_i = \vec{F}_{i, ext} + \vec{F}_{i, int} = \vec{F}_i'(Fce. donnée) + \vec{F}_i'(Fce. liaison)$. D'où pour chaque m_i on aura :

$$\vec{R}_i + \vec{F}_i'' = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_i'(Fce. donnée) + \vec{F}_i'(Fce. liaison) + \vec{F}_i''(Fce. inertie) = 0 \quad (1)$$

♣ Soit un D.V appliqué à (S) et qui fait passer chaque $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$. Pour ce D.V nous allons calculer le T.V des Forces :

☛ Pour m_i donné : (1) $\Leftrightarrow (\vec{F}_i + \vec{F}_i' + \vec{F}_i'')\delta\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_i.\delta\vec{r}_i + \vec{F}_i'.\delta\vec{r}_i + \vec{F}_i''.\delta\vec{r}_i = 0$.

☛ Pour l'ensemble des m_i : $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i.\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i'.\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i''.\delta\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \delta W_d + \delta W_\ell' + \delta W'' = 0$

P.T.V = Principe D'Alembert.

Enoncé : P.T.V. (Principe d'Alembert) pour un point matériel

Le travail virtuel de la quantité d'accélération d'un point matériel, dans tout D.V, est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées au point matériel.

Enoncé : P.T.V. (Principe d'Alembert) pour un système S

Pour un repère Galiléen et avec une chronologie absolue, pour un système S, pour tout M.V. et à tout instant t, le travail virtuel élémentaire, de toutes les forces exercées sur S (extérieure et intérieure), est égale au travail virtuel élémentaire de l'ensemble des quantités d'accélération.

Cas particuliers :

☞ Système à liaison parfaite $\Rightarrow$ pour un D.V.L $\delta W_\ell' = 0$ donc le P.T.V. se réduit à $\delta W_d + \delta W'' = 0$

☞ Si en plus (S) est en équilibre on a $\delta W'' = 0$ d'où P.T.V, se réduit à $\delta W_d = 0$.

Théorème des T.V. relatif à la statique (équilibre) : Ainsi, pour qu'un système matériel S, à liaisons parfaites, initialement immobile, demeure au repos (ie en équilibre), il faut et il suffit que la somme des T.V. élémentaires des forces données soit nulle.

Remarque : L'attrait de ce théorème est directement lié à la simplicité des relations géométriques entre les paramètres au cours de D.V. élémentaire.

☞ Soit (S) un système à liaison scléronome parfaite et à forces données (F_d) conservatives, donc le D.R. entre t et t+dt est un D.V.L. $\Rightarrow \delta W_d + \delta W'' = 0 \Leftrightarrow dW_d + dW'' = 0$:

☞ F_d conservative $\Rightarrow \delta W_d = dW_d = -dU$.

☞ Avec $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} \Rightarrow$

$$dW'' = -\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i . d\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} . d\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} . (\dot{\vec{r}}_i . dt) = -\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) dt = -dT$$

D'où $\delta W_d + \delta W'' = 0 \Leftrightarrow -dU - dT = 0 \Leftrightarrow T + U = E_m = Cste$ énergie mécanique.

Pour un système à liaison scléronome, parfaite, et à forces données (F_d) conservatives et à D.R. = D.V.L., l'énergie mécanique est une constante de mouvement. On dit qu'on est en présence d'un système conservatif.

Remarques :

☞ Écrivons le P.T.V. pour le mouvement réel $\Rightarrow dW(m_i \vec{a}_i) = -dW'' = dW(\vec{F}_{ext}) + dW(\vec{F}_{int})$

$$\text{Or } dW(m_i \vec{a}_i) = \int m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \int m_i \vec{a}_i \cdot (\dot{\vec{r}}_i \cdot dt) = \int m_i \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} \cdot (\dot{\vec{r}}_i \cdot dt) = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) dt = dT.$$

$$\text{D'où } \boxed{dT = dW(\vec{F}_{ext}) + dW(\vec{F}_{int}) = dW_d + dW_l' = T_1 - T_2}$$

✎ Dans le cas où le repère $\mathcal{R}n$ est pas galiléen, le P.T.V. s'écrit donc :

$$\boxed{\delta W(m_i \vec{a}_i / \mathcal{R}) = dW(\vec{F}_{ext}) + dW(\vec{F}_{int}) = \delta W(\vec{F}_r) + \delta W(\vec{F}_c) + \delta W(\vec{F}_e) + \delta W(\vec{F}_{int})}$$

Où $\vec{F}_c$ et $\vec{F}_e$ désignent les torseurs des forces fictives de Coriolis et d'entraînement respectivement.

Exemples : Théorème des T.V. relatif à la statique (équilibre)

✎ Exercice 1 : Levier à pression

On appelle levier à pression le système de 2 tiges (de même masse m) articulées identiques dont l'une a une extrémité immobile O et l'autre une extrémité B qui peut se déplacer suivant un axe (Fig. 6). On exerce en A une force verticale $\vec{F}_1 = -F_1 \cdot \vec{j}$ dirigée vers le bas. Afin de calculer la force $\vec{F}_2 = -F_2 \cdot \vec{i}$ qui doit exercer le bâti en B pour que le système soit en équilibre. Limitons nous au cas particulier important où les liaisons en O, A et B sont parfaites. Rappelons qu'il en est ainsi dans 2 cas importants, en l'absence de frottement et en l'absence de glissement même s'il y a frottement, donc $\delta W_l' = 0$.

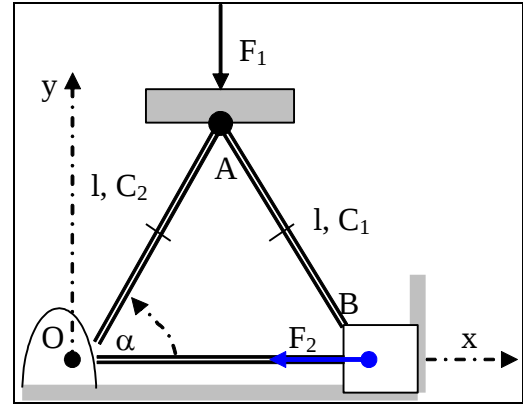


Fig. 6

✎ Réponse 1 :

Considérons un déplacement angulaire virtuel élémentaire $\delta\alpha$.

$$\text{Comme : } y_A = l \cdot \sin \alpha, y_{C_1} = \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha, y_{C_2} = \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha \text{ et } x_B = 2l \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Il vient : } dy_A = l \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha, dy_{C_1} = \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha, dy_{C_2} = \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \text{ et } dx_B = -2l \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

$$\text{On en déduit, puisque } \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{A} = -F_1 l \cos \alpha \cdot \delta\alpha \text{ et } \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{B} = 2F_2 l \sin \alpha \cdot \delta\alpha :$$

$$\boxed{P.T.V. \Rightarrow \delta W_d = 0 \Leftrightarrow (-F_1 l \cos \alpha - mgl \cos \alpha + 2F_2 l \sin \alpha) \delta\alpha = 0} \text{ d'où } \boxed{F_2 = \frac{F_1 + mg}{2 \tan \alpha}}$$

On voit aisément l'intérêt du système : pour F_1 donné et α faible, F_2 peut être très grand, ce qui permet de comprimer des objets en B.

✋ Exercice 2 :

Équilibre d'un pendule double pesant

Un pendule double, constitué de deux tiges identiques (Fig. 7), de masse m , de longueur l , est écarté de sa position d'équilibre verticale, grâce à une force horizontale $\vec{F}$ appliquée à l'extrémité de la tige inférieure. Les liaisons aux 2 articulations sont parfaites. Trouver les valeurs des angles θ_1 et θ_2 que font, avec la verticale descendante, ces deux tiges à l'équilibre.

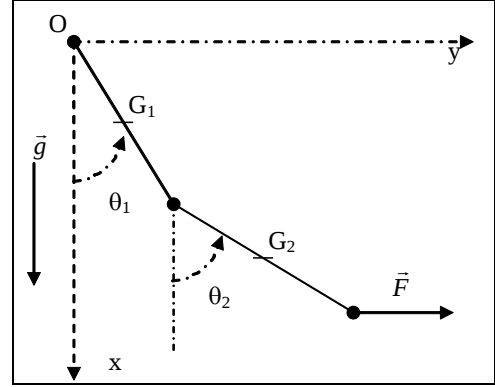


Fig. 7

✋ Réponse 2 :

Le T.V. de l'ensemble des forces qui s'exercent sur le système doit être nul : $\delta W_d + \delta W'_\ell + \delta W'' = 0$ or forces de liaisons parfaites et système en équilibre :

$$\boxed{\delta W'_\ell = 0, \quad \delta W'' = 0 \Rightarrow P.T.V \Leftrightarrow \delta W_d = 0} \Leftrightarrow \boxed{\delta W_d = mg \cdot \delta x_{G_1} + mg \cdot \delta x_{G_2} + F \cdot \delta y = 0}$$

Comme : $x_{G_1} = \frac{l}{2} \cdot \cos \theta_1$, $x_{G_2} = l \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cdot \cos \theta_2$ et $y = l \cdot \sin \theta_1 + l \sin \theta_2$.

Il vient :

$$\delta x_{G_1} = -\frac{l}{2} \cdot \sin \theta_1 \cdot \delta \theta_1 \quad , \quad \delta x_{G_2} = -l \sin \theta_1 \cdot \delta \theta_1 - \frac{l}{2} \cdot \sin \theta_2 \cdot \delta \theta_2 \quad \text{et} \quad \delta y = l \cdot \cos \theta_1 \cdot \delta \theta_1 + l \cos \theta_2 \cdot \delta \theta_2 .$$

Par conséquent : $\delta W_d = \left(-\frac{3mgl}{2} \cdot \sin \theta_1 + Fl \cos \theta_1 \right) \delta \theta_1 + \left(Fl \cos \theta_2 - \frac{mgl}{2} \cdot \sin \theta_2 \right) \delta \theta_2 = 0$

On en déduit, la relation : $\boxed{\tan \theta_1 = \frac{2F}{3mg} \quad \text{et} \quad \tan \theta_2 = \frac{2F}{mg} \Rightarrow \theta_2 > \theta_1 .}$

III.6. FORCES GÉNÉRALISÉES

Pour les forces données $\delta W_d = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ or $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t) \Rightarrow \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t$ car

D.V. $\Rightarrow t$ fixe. **n** : nombre de coordonnées généralisées et **N** : nombre de particule de système.

$$\boxed{\delta W_d = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \delta q_k \Rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}}$$

✋ $\{Q_k\}$ est appelé ensemble des forces données généralisées tel que $Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

Le même traitement peut se faire pour les forces de liaison F_ℓ et les forces d'inertie F'' .

✋ $\{Q'_k\}$ est appelé ensemble des forces de liaisons généralisées tel que $Q'_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

☞ $\{Q_k''\}$ est appelé ensemble des forces d'inertie généralisées tel que $Q_k'' = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

☞ $\boxed{\vec{F}_i(Fce. donnée) + \vec{F}_i'(Fce. liaison) + \vec{F}_i''(Fce. inertie) = 0 \quad \forall i} \quad (1)$. Or :

$$Q_k + Q_k' + Q_k'' = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i' \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{F}_i' + \vec{F}_i'') \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = 0 \quad \text{car} \quad (1)$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{Q_k + Q_k' + Q_k'' = 0 \quad \forall k} \quad (2)$$

Donc $\forall k$ la somme de toutes les forces généralisées est nul Donc on vient de montrer que $(1) \Rightarrow (2)$

☞ Les coordonnées q_k sont quelconque et pas forcément indépendantes. Donc partant de P.T.V. :

$$\delta W_d + \delta W_\ell' + \delta W'' = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \delta q_k + \sum_{k=1}^n Q_k' \cdot \delta q_k + \sum_{k=1}^n Q_k'' \cdot \delta q_k = 0$$

$\Downarrow$

$$\sum_k (Q_k + Q_k' + Q_k'') \delta q_k = 0 \Rightarrow Q_k + Q_k' + Q_k'' = 0 \quad \text{si} \quad \{q_k\} \quad \text{sont} \quad \text{liées}$$

$$\sum_k (Q_k + Q_k' + Q_k'') \delta q_k = 0 \Rightarrow Q_k + Q_k' + Q_k'' = 0 \quad (2) \quad \text{si} \quad \{q_k\} \quad \text{sont} \quad \text{indépendants}$$

Mais la relation est vérifiée $\forall$ les coordonnées $\{q_k\}$.

IV- DÉCOMPOSITION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad \text{nous remplaçons} \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \text{car} \quad \vec{r}_i(q_k, t)$$

$$\text{On trouve} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = T_0 + T_1 + T_2 \quad \text{avec}$$

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad \text{et} \quad T_1 = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \quad \text{et} \quad T_2 = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2}$$

Cas particuliers :

☞ Cas d'un système à liaison scléronome $\Rightarrow$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_0 = 0 \\ T_1 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad T = T_2, \quad \text{on dit que dans le cas d'un système à liaison}$$

scléronome, l'énergie cinétique est une forme quadratique de vitesse généralisée : **$T = T_2$**

☞ On peut montrer aisément, en utilisant le rappel ci-dessous, que $\boxed{\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = T_1 + 2T_2}$

Rappel

Si $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de degré n alors $\boxed{\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k = n f}$ d'où :

$$\sum_k \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T_2 \quad \text{puisque} \quad T_2 \quad \text{est de degré} \quad 2$$

$$\text{comme} \quad T_1 \quad \text{est de degré} \quad 1 \quad \text{alors} \quad \sum_k \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = T_1.$$