Chapitre III- Oscillateurs à un degré de liberté (1 D.D.L)

A- INTRODUCTION À L'ÉTUDE DES VIBRATIONS 54

I. GÉNÉRALITÉS 55

II. ESPACE DES PHASES, ORBITES 56

B- OXILLATIONS LIBRES NON AMORTIES : L'OXILLATEUR HARMONIQUE 57

I. ÉQUATION DU MOUVEMENT : EXEMPLE DU PENDULE ÉLASTIQUE 57

II. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DU PENDULE ÉLASTIQUE 60

III. CE QU'IL FAUT SAVOIR 62

C- OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES À UN DEGRÉ DE LIBERTÈ 62

I. ÉQUATION DU MOUVEMENT : EXEMPLE DU PENDULE ÉLASTIQUE 62

II. SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (2) 63

III. ÉTUDE DU RÉGIME PSEUDOPÉRIODIQUE 65

IV. CE QU'IL FAUT SAVOIR 67

D- OSCILLATIONS FORCÉES AMORTIES À UN DEGRÉ DE LIBERTÈ 68

I. ÉQUATION DU MOUVMENT : EXEMPLE DU PENDULE ÉLASTIQUE 68

II. SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (11) 69

III. CE QU'IL FAUT SAVOIR 69

Chapitre III- Oscillateurs à un Degré de Liberté (1 D.D.L)

Parmi tous les mouvements rencontrés dans la nature, le mouvement oscillatoire (ou vibratoire) est un des plus fréquents. L'expérience courante montre qu'une particule légèrement écartée d'une position d'équilibre stable, effectue des oscillations autour de cette position d'équilibre. Le mouvement d'un pendule est oscillatoire. Un poids suspendu à un ressort tendu se met à osciller lorsqu'on le lâche. Les atomes dans un solide vibrent les uns par rapport aux autres. De même, dans les molécules les atomes vibrent les uns par rapport aux autres.

De tous les mouvements oscillatoires, le plus important est le mouvement sinusoïdal, non seulement, parce qu'il est le plus simple à décrire mathématiquement, mais encore, parce qu'il est une représentation assez précise de beaucoup de phénomènes d'oscillation rencontrés dans la nature.

A- INTRODUCTION À L'ÉTUDE DES VIBRATIONS

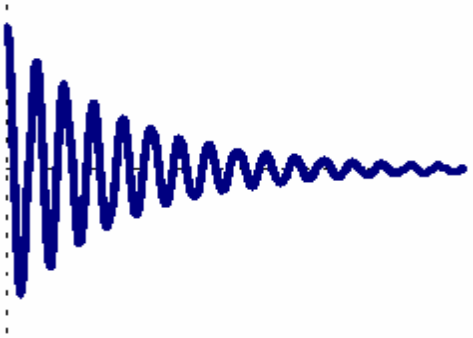
I. GÉNÉRALITÉS

I.1. DÉFINITIONS

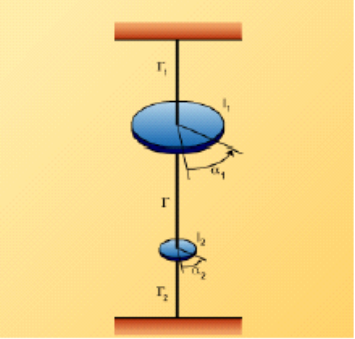
➲ *Les vibrations sont de petites variations d'une grandeur, qui se répètent plus au moins rapidement, autour d'une valeur moyenne.*

➲ *Grandeur :*

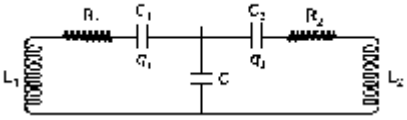
- *Mécanique : déplacement x(t), angle ϑ(t)*
- *Acoustique : élongation s(t)*
- *Électricité : tension u(t), courant i(t)*



➲ Les vibrations sont en général produites par un système physique que l'on a **perturbé** (mis hors d'équilibre) et qui retourne à sa position d'équilibre. Ces systèmes physiques sont des **oscillateurs**.



➲ Quand l'évolution d'un oscillateur peut être décrite par **n variables indépendantes**, l'oscillateur possède **n degrés de liberté**.



➲ Un oscillateur est **linéaire** si son mouvement est décrit par une équation différentielle linéaire.

$$I_1 \alpha_1'' + (\Gamma_1 + \Gamma)\alpha_1 - \Gamma\alpha_2 = 0$$
$$-\Gamma\alpha_1 + I_2\alpha_2'' + (\Gamma_2 + \Gamma)\alpha_2 = 0$$

I.2. L'OXILLATEUR MÉCANIQUE ÉLEMENTAIRE

☞ L'oscillateur élémentaire linéaire possède un seul degré de liberté.
☞ Un oscillateur est **libre** s'il oscille sans interventions extérieures pendant son retour à l'équilibre.
☞ Un oscillateur est **forcé** si une action extérieure lui communique de l'énergie.
☞ Un oscillateur **dissipe** de l'énergie quand il retourne vers son état d'équilibre : il est **amorti**.

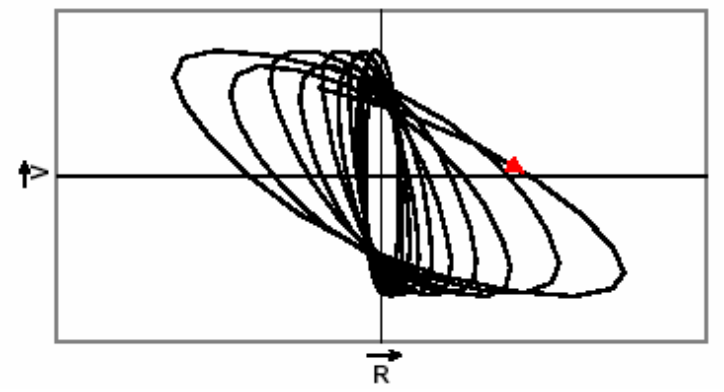
II. ESPACE DES PHASES, ORBITES

II.1. DÉFINITION

➲ *En cinématique, **l'espace des phases** est un espace de dimension 6 construit à partir de l'espace des positions et l'espace des vitesses.*
➲ *Un point de l'espace des phases représente l'état du système à l'instant t.*
➲ *Il possède 6 coordonnées, 3 pour la position [x(t), y(t), z(t) en coordonnées cartésiennes] et 3 pour la vitesse* $\left[\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt},\ \dot{y}(t)=\frac{dy}{dt},\ \dot{z}(t)=\frac{dz}{dt}\right]$.

➲ *L'orbite est, dans l'espace des phases, la trajectoire décrite par le point représentatif entre l'instant initial et l'instant final.*

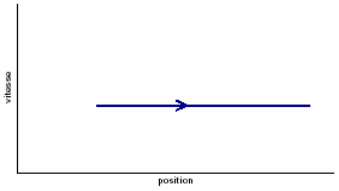
➲ *L'orbite est orientée dans le sens de l'évolution*



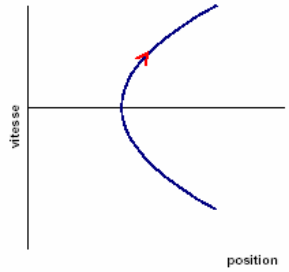
II.2. EXEMPLES D'ORBITES

2 Exemples d'orbites

Mouvement rectiligne uniforme → $\boxed{\begin{array}{l} x(t)=v_0t+x_0 \\ V(t)=v_0 \end{array}}$



Mouvement uniformément accéléré $\boxed{\begin{array}{l} x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ V(t)=at+v_0 \end{array}}$



B- OXILLATIONS LIBRES NON AMORTIES : L'OXILLATEUR HARMONIQUE

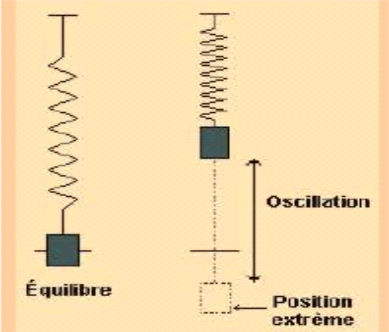
Définition : *On appelle oxillateur harmonique, oxillateur libre et non amorti, tout système mécanique (S) décrit par une équation de type :* $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ *(1).*

- x étant l'unique coordonnée généralisée de (S) et ω_0 est une constante caractérisant (S), appelée pulsation propre (ou naturelle) du mouvement de l'oxillateur libre.
- La résolution de l'équation (1) conduit à la solution $\boxed{x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ ou } A_0 \text{ et } \varphi}$ deux constantes déterminées par les conditions initiales (C.I).
- Ainsi l'amplitude d'oxillation A_0 dépend des C.I, x(t=0) et la vitesse v(t=0).

I. ÉQUATION DU MOUVEMENT : EXEMPLE DU PENDULE ÉLASTIQUE

I.1. DESCRIPTION DU SYSTÈME

On considère un solide ponctuel de masse m suspendu à un ressort vertical de masse négligeable et de raideur (***constante d'élasticité : elle représente la force nécessaire pour déplacer la particule d'une distance unité***) k. La position d'équilibre du système constitué du solide correspond à l'instant initial.

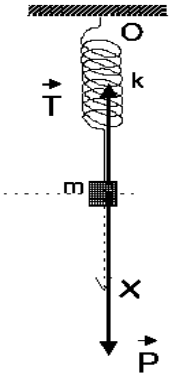


On étire ou on comprime le ressort, puis on lâche le solide.

I.2. MISE EN ÉQUATION

On utilise la relation fondamentale de la dynamique :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}}$$



Dans le repère (Ox) considéré, on fait le bilan des forces qui s'exerce sur la masse m.

- Le poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$
- La force de rappel du ressort $\boxed{\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{e}_x}$
- A l'équilibre, $\boxed{k(l_e - l_0) = mg}$
- Relation fondamentale de la dynamique: $\boxed{m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}}$ **(2)**
- $ma = m\dfrac{d^2 l}{dt^2} = mg - k(l - l_0) = mg - k(l - l_e) - k(l_e - l_0)$ où a est l'accélération de m.
- On appelle x(t) l'élongation du ressort à partir de sa position d'équilibre **:** $\boxed{\mathbf{x = l - l_e}}$**. et** $\dfrac{d^2 l}{dt^2} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$**.** L'équation (1) devient : $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (3)}$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre. De ce qui précède, on déduit que chaque fois qu'un système physique obéit à une équation type (3), c'est qu'il décrit un mouvement sinusoïdal. Un tel système physique est appelé ***oscillateur harmonique.***

I.3. SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (3)

L'étude mathématique des équations différentielles permet de montrer que la forme générale des solutions est $\boxed{x(t) = Ae^{rt}}$ où r et A sont des constantes.

☑ $\dot{x}(t) = rAe^{rt} = r.x(t) \quad et \quad \ddot{x}(t) = r^2 Ae^{rt} = r^2.x(t)$

☑ $r^2 Ae^{rt} + \frac{k}{m} Ae^{rt} = 0 \Leftrightarrow r^2.x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \Rightarrow r^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \pm j\omega_0$

☑ La solution x(t) est alors une combinaison linéaire des deux solutions particulières :

$$\boxed{x_1(t) = e^{j\omega_0 t} \; et \; x_2(t) = e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow x(t) = A_1.x_1(t) + A_2.x_2(t)}$$

☑ Les deux constantes A_1 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales que sont les valeurs de l'élongation x(t=0) et de la vitesse v(t=0).

☑ Pour obtenir une forme simplifiée de x(t), on choisit d'utiliser 2 autres constantes A_0 et φ qui sont reliées à A_1 et A_2 par les relations $2A_1 = A_0 e^{j\varphi} \; et \; 2A_2 = A_0 e^{-j\varphi}$

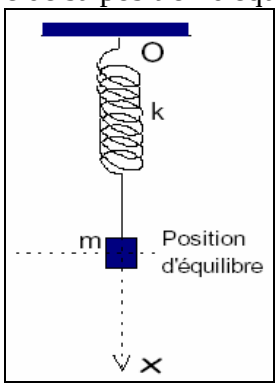
☑On obtient alors **l'équation horaire du mouvement**: $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\left[A_0 e^{(j\omega_0 t + \varphi)} + A_0 e^{-(j\omega_0 t + \varphi)}\right]}$

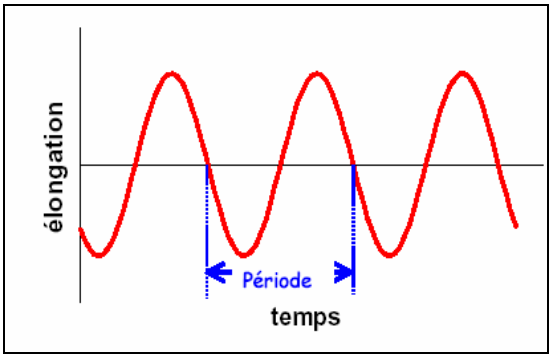
☑ Soit $\boxed{x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (4)}$. A_0 et φ étant 2 paramètres arbitraires déterminés pour chaque problème physique particulier par ses conditions initiales :

- x(t) est une fonction sinusoïdale du temps
- A_0 est l'amplitude du mouvement
- ω_0 est la pulsation des oscillations, elle est fonction de la période T_0 du phénomène qui est telle que $x(t+T_0)=x(t)$ ∀t ⇒ (d'après (4)) $\boxed{\omega_0 T_0 = 2\pi \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$
- φ est le déphasage à l'origine, elle dépend du choix de l'origine sur l'échelle des temps.
- $\omega_0 t + \varphi$ définit la phase du mouvement.

I.4. REPRÉSENTATION DU MOUVEMENT

Le solide accroché au ressort effectue des oscillations périodiques non amorties de part et d'autre de sa position d'équilibre : le système (solide) est un oscillateur harmonique non amorti.





✸ Dans le cas du système masse - ressort, la période propre dépend de la raideur du ressort et de la masse du solide. $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}}$; A.N : k=0,2 N.m^{-1} et m=800g $\Rightarrow$ T_0=12,56s

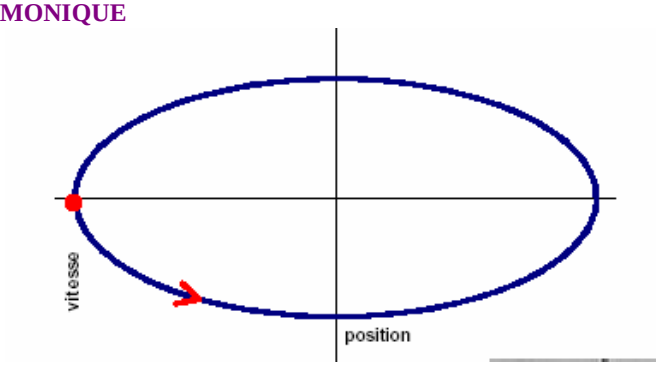
I.5. ORBITE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$et\ v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{A_0^2} x^2(t) + \frac{1}{A_0^2.\omega_0^2} v^2(t) = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse.

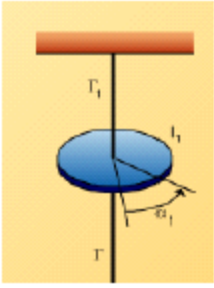


I.6. AUTRES OSCILLATEURS HARMONIQUES

✪ *Pendule de torsion*

Fil de torsion de constante du torsion C avec un disque de moment d'inertie I=mR^2.

L'équation différentielle s'obtient en écrivant le théorème du moment cinétique :



$$\boxed{\begin{array}{l} \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{\delta}(O,S/R) \\ \sum \overrightarrow{ON_i} \wedge \vec{F}_{i,ext} = \frac{d_R\vec{\sigma}(O,S/R)}{dt} \end{array}} \boxed{\Leftrightarrow I\ddot{\theta} + C\theta = 0}$$

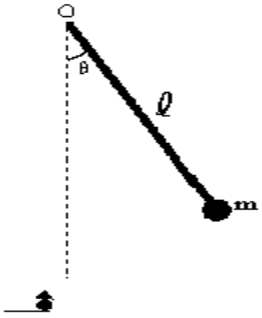
La période dépend de la constante de torsion du fil C et du moment d'inertie I du système.

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}} .\text{et} \boxed{\theta(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

✪ *Pendule simple*

Masse ''m'' attachée à une tige rigide sans masse, de longueur l, se déplaçant dans le vide.

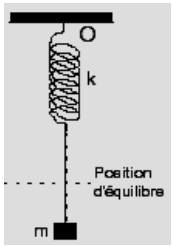
Le pendule simple peut être considéré comme un oscillateur harmonique pour les faibles amplitudes ϑ quand $\sin\vartheta \approx \vartheta$. La période est : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$ et $\boxed{\theta(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$



car Th. $\Leftrightarrow I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$,• l est la longueur du pendule.• g est l'accélération de la pesanteur.

II. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DU PENDULE ÉLASTIQUE

II.1. EXPRESSION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE DU SYSTÈME MASSE+RESSORT

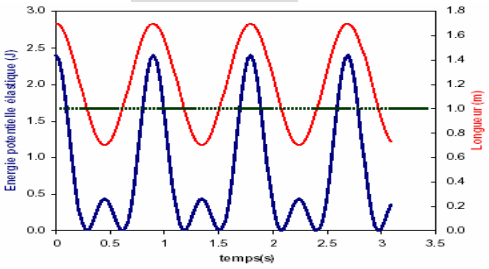


L'énergie mécanique du pendule élastique est la somme des énergies potentielles de la masse et du ressort et de l'énergie cinétique de la masse.

a. <u>Énergie potentielle élastique :</u>

Lorsque le ressort est allongé ou comprimé, il possède une énergie potentielle $\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2}$.

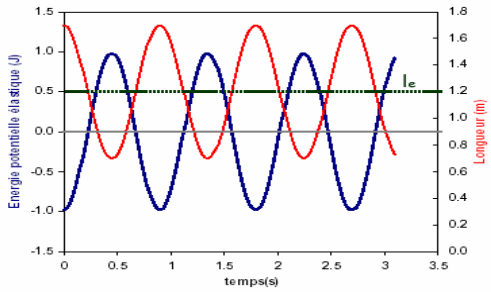
Ex : l_0=1m, k=9.81 N.m^{-1}, m=0.2 kg, A_0=0.5m (voir relation 4)



b. <u>Énergie potentielle de pesenteur :</u>

La masse m située dans le champ de pesanteur terrestre possède une énergie potentielle $\boxed{E_{pp} = -mg(l-l_e)}$.

Comme cette énergie potentielle est définie à une constante près, on a choisit $E_{PP}(l_e)$=0.

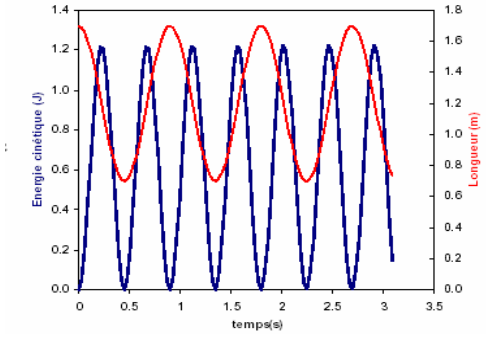


c. <u>Énergie cinétique :</u>

La masse m possède une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \text{ or } v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}$$



d. <u>Énergie mécanique</u>

$$E_m = E_{pe} + E_{pp} + E_c \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 - mg(l-l_e) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

On introduit x = l-l_e. L'énergie mécanique devient donc :

$$E_m = \frac{1}{2}k(x + l_e - l_0)^2 - mg(x) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\vdots\Downarrow\vdots$$

$$E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(l_e - l_0)^2 + \cancel{kx(l_e - l_0)} - \cancel{mgx} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

À l'équilibre, on peut écrire k(l-l_e) = mg

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(l_e - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + cste.}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)\, et\, \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kA_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Downarrow$$

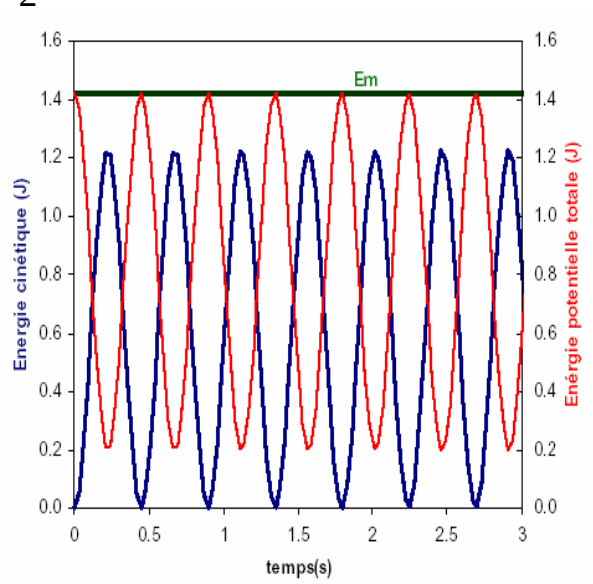
$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}k(l_e - l_0)^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 + cste = C^{te}}$$

L'énergie mécanique est une quantité constante. Au cours d'une oscillation, il y'a donc échange permanent d'énergie potentielle et cinétique.

La valeur de la constante dépend de la position de référence pour l'énergie potentielle. Souvent, on choisit cette constante pour que $E_m = \frac{1}{2}kA_0^2$.

En effet l'énergie potentiel $\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2 + Cste}$ (on travail avec origine ressort chargé en équilibre). Par convention, on prend U=0 quand x=0, d'où $\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$. Par contre l'énergie cinétique peut s'écrire de la forme : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0^2 - x^2)}$.

L'énergie total est donnée par : $\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2 = \frac{1}{2}kA_0^2}$



II.2. OBTENTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE À PARTIR DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = cste.}$ avec origine à partir de l'équilibre chargé.

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = kx\frac{dx}{dt} + m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ qui est l'équation différentielle du mouvement pour un oscillateur harmonique.

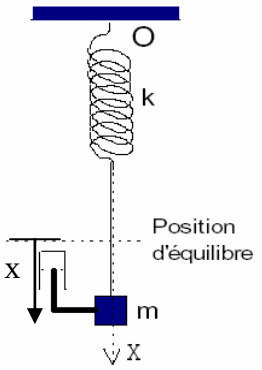
<u>*Remarque :*</u> On peut obtenir la même équation en utilisant le Lagrangien L = T-U dont E.L.S serait l'équation du mouvement : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

C- OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES À UN DEGRÉ DE LIBERTÈ

I. ÉQUATION DU MOUVEMENT : EXEMPLE DU PENDULE ÉLASTIQUE

I.1. DESCRIPTION DU SYSTÈME

Le solide ponctuel de masse **m** est suspendu au ressort vertical de raideur **k** et est soumis à une force de frottement $\vec{F}_f$. Si le frottement est solide, la force de frottement est constante et opposée au mouvement. Lorsque le frottement est fluide, la force de frottement est proportionnelle à la norme de la vitesse et opposée au mouvement : $\boxed{\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\dot{\vec{x}}}$



- **x** désigne le déplacement de m à partir de sa position d'équilibre (équilibre chargé en présence du ressort et d'amortisseur).
- **h** est une constante appelée cœifficient d'amortissement

I.2. MISE EN ÉQUATION (FROTTEMENT FLUIDE (OU VISQUEUX)

On utilise la relation fondamentale de la dynamique : $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\ddot{x}.\vec{i}}$

- La masse m sera donc soumise aux forces :

$$\boxed{(1)\quad \begin{cases} * \ \vec{F}_{ress} = -kx.\vec{i} \\ * \ \vec{F}_{frot} = -h\dot{x}.\vec{i} \xrightarrow{P.F.D} m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \\ * \ m\vec{a} = m\ddot{x}.\vec{i} \end{cases}}$$ éq. Mvt.

- Posons $2\lambda = \dfrac{h}{m}$ *et* $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ *avec* $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$ ***constante de temps d'amortissement*** *:*

- D'où l'équation du mouvement devient donc : $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)}$

Remarque : (2) est l'équation du mouvement d'un pendule simple amorti.
Question : Quelle est la nature du mouvement de la masse et quelle est sa pulsation ??

II. SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (2)

II.1. FORME GÉNÉRALE

☑ On recherche des solutions de la forme : $\boxed{x(t) = Ae^{rt}}$ où r et A sont des constantes.

☑ $\dot{x}(t) = rAe^{rt} = r.x(t)$ *et* $\ddot{x}(t) = r^2Ae^{rt} = r^2.x(t)$

☑ $r^2Ae^{rt} + 2\lambda rAe^{rt} + \omega_0^2Ae^{rt} = 0 \Leftrightarrow \boxed{r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (3)}$: *c'est l'équation caractéristique dont la résolution donnera les valeurs de r, donc la forme de x(t).*

☑ Les 2 solutions r_1 et r_2 sont :

$\boxed{r_1 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} \ et \ r_2 = -\lambda - \sqrt{\Delta'}}$ où Δ' est le discriminant réduit tel que $\boxed{\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2}$ **(3')**

☑ La solution x(t) est alors une combinaison linéaire des deux solutions particulières :

$$\boxed{x_1(t)=e^{r_1 t}\ et\ x_2(t)=e^{r_2 t} \Rightarrow x(t)=A_1.x_1(t)+A_2.x_2(t)}$$

☑ Les deux constantes A_1 et A_2 sont déterminées à partir des C.I. : x(t=0) et v(t=0).

☑ **L'expression mathématique de x(t) dépend du signe du discriminant, donc de la constante d'amortissement λ.** On distingue trois régimes :

- ☛ Le régime apériodique : $\lambda>\omega_0$, l'amortissement est important, r_1 et r_2 sont réels.
- ☛ Le régime apériodique critique : $\lambda=\omega_0$, r_1 et r_2 sont réels et égaux à **(-λ)**
- ☛ Le régime pseudopériodique : $\lambda<\omega_0$, l'amortissement est faible, r_1 et r_2 sont complexes.

II.2. RÉGIME APÉRIODIQUE → AMORTISSEMENT FORT

- On pose $\boxed{\eta=\dfrac{\lambda}{\omega_0}}$. Pour le régime apériodique, $\eta\rangle 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\omega_0\sqrt{\eta^2-1}$

$\Delta'\rangle 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles $\Rightarrow \boxed{r_{1,2}=-\lambda\pm\omega_0\sqrt{\eta^2-1}}$

Et donc $x(t)=e^{-\lambda t}\left[A_1 e^{+t\sqrt{\Delta'}}+A_2 e^{-t\sqrt{\Delta'}}\right]=e^{-\lambda t}\left[A\cosh(\sqrt{\Delta'})t+B\sinh(\sqrt{\Delta'})t\right]$

- Les constantes A_1 et A_2 ou A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.

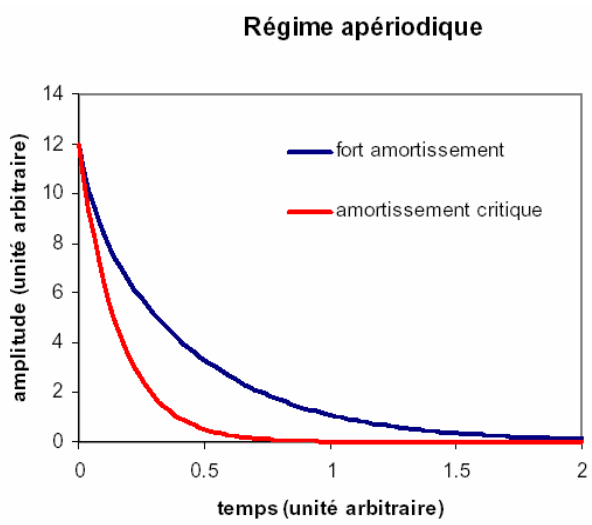
- Le retour à la position d'équilibre se fait sans oscillation : mouvement apériodique. L'élongation décroît et s'annule sans oscillation.

II.3. RÉGIME APÉRIODIQUE CRITIQUE → AMORTISSEMENT CRITIQUE

- Pour le régime critique $\Delta'=0 \Rightarrow$ racines doubles $\Rightarrow r_1=r_2=-\lambda$

- La solution est donc : $\boxed{x(t)=e^{-\lambda t}\left[A_1 t+A_2\right]}$

- le retour à la position d'équilibre est plus rapide dans le cas d'amortissement critique que l'amortissement fort. Le mouvement est également apériodique mais le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement que précédemment et sans oscillation



II.4. RÉGIME PSEUDOPÉRIODIQUE → AMORTISSEMENT FAIBLE

- $\lambda\langle\omega_0 \Leftrightarrow \eta\langle 1 \Rightarrow \Delta'\langle 0 \Rightarrow$ 2 racines complexes $\Rightarrow \boxed{r_{1,2}=-\lambda\pm j\omega_0\sqrt{1-\eta^2}\ avec\ j^2=-1}$

- On pose $\omega=\omega_0\sqrt{1-\eta^2}$ appelé **pseudo pulsation.** La solution de l'équation différentielle (2) est donc :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left[A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}\right] = e^{-\lambda t}\left[A_1 e^{+j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}\right]$$
$$x(t) = e^{-\lambda t}\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]$$
$$x(t) = A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

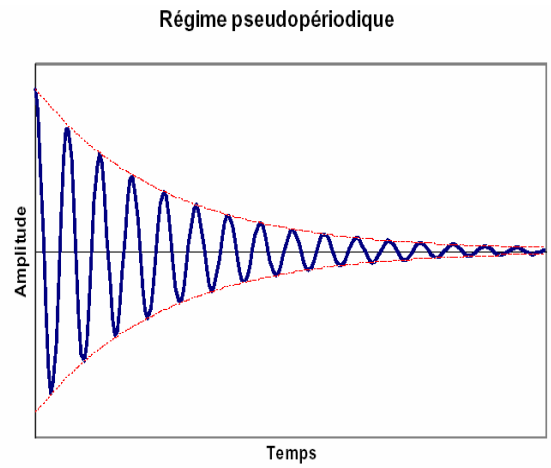
- A_0 et φ sont deux constantes réelles.
- (4) c'est l'équation du mouvement d'un oscillateur faiblement amortie.

• On parle d'oscillation pseudo périodique de pseudo période $T = 2\pi/\omega$.

• On dit pseudo périodique car il s'annule à des périodes de temps égaux mais l'amplitude varie.

• L'amplitude diminue de façon exponentielle.

• La décroissance de l'amplitude tient du fait que le frottement dissipe à chaque oscillation une fraction d'énergie de l'oscillateur pour la transformer par exemple en chaleur.



$$x(t) = A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

III. ÉTUDE DU RÉGIME PSEUDO PÉRIODIQUE

III.1. PSEUDO PÉRIODE

- La pseudo période est par définition l'intervalle de temps qui sépare 2 passages consécutifs dans le même sens par la position d'équilibre.

- L'élongation du ressort passe par des maximums à des intervalles de temps égaux. Mais ces maximums ont des valeurs décroissantes. Ce mouvement n'est pas pseudo périodique.

- La pseudo période est : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\eta^2}} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\eta^2}}$

- **Cas d'amortissement très faible** ($\lambda \ll \omega_0 \Rightarrow \eta \ll 1$), on obtient une expression approchée :

$$T = T_0\left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right) = T_0\left(1 + \frac{\lambda^2}{2\omega_0^2}\right) \quad (5) \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\omega_0^2}\right)$$

- Donc l'amortissement a pour effet non seulement de diminuer (décroître) l'amplitude (de façon oscillatoire) mais aussi la pulsation du mouvement. À noter que ω_0 est la pulsation du mouvement en absence de frottement.

III.2. DÉCRÉMENT LOGARITHMIQUE

<u>*Définition :*</u> On définit le décrément logarithmique par : $\Lambda = \dfrac{1}{n}\ln\left[\dfrac{x(t)}{x(t+nT)}\right] = \lambda T = \dfrac{T}{\tau}$ **(6).**

La décroissance de l'amplitude des oscillations est caractérisée par le décrément logarithmique Λ.

- Car $\boxed{\Lambda = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi)}{A_0 e^{-\lambda(t+nT)}\cos(\omega(t+nT)+\varphi)}\right] = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{A_0\cos(\omega t+\varphi)}{A_0 e^{-\lambda nT}\cos(\omega t+\varphi)}\right] = \lambda T}$

- Or $\tau = 1/\lambda$ constante du temps d'amortissement qui donne une indication sur la variation de l'amplitude en fonction de t. D'où $\boxed{\Lambda = \lambda T = \frac{T}{\tau}}$ **(7).**

- Si $t = \tau \Rightarrow A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda\tau} = \frac{A_0}{e}$: taux d'amortissement.

- Si **l'amortissement est très faible** (η<<1), on obtient une expression approchée :

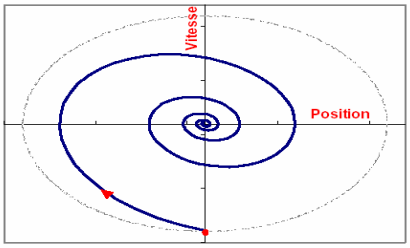
$\boxed{\Lambda = \lambda\frac{T_0}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\lambda}{\omega_0}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\eta^2}}.\eta \approx 2\pi\eta}$ donc $\eta\langle\langle 1 \Rightarrow \Lambda = \lambda T = 2\pi\eta$ **(7')**

III.3. ORBITE D'UN OSCILLATEUR LINÉAIRE SOUMIS À UN FROTTEMENT FLUIDE

- $x(t) = A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = -A_0 e^{-\lambda t}\left[\lambda\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi)\right]$

- On pose $C\sin\alpha = \lambda$ *et* $C\cos\alpha = \omega$ *or* $\omega = \omega_0\sqrt{1-\eta^2} \Rightarrow \begin{cases} C = \omega_0 \\ \sin\alpha = \eta \end{cases}$

- Donc $\dot{x}(t) = -A_0\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\varphi+\alpha) \rightarrow$ **courbe en bleu**.



- Si $\alpha = 0$ ie $\eta = 0$ (λ=0) autrement dit en absence d'amortissement on obtient l'équation d'une ellipse d'équation : $\boxed{\frac{1}{A_0^2}x^2 + \frac{1}{A_0^2\omega_0^2}\dot{x}^2 = 1}$ $\rightarrow$ **courbe en noir.**

III.4. ÉTUDE ÉNERGITIQUE

III.4.1 Énergie mécanique

☛ L'énergie mécanique du pendule élastique est la somme des énergies potentielles de la masse et du ressort et de l'énergie cinétique de la masse. On a vu que cette énergie mécanique peut se mettre sous la forme $\boxed{E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = cste.}$ avec origine à partir de l'équilibre chargé.

☛ $x(t) = A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = -A_0 e^{-\lambda t}\left[\lambda\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi)\right]$

☛ $C\sin\alpha = \lambda$ *et* $C\cos\alpha = \omega$ *or* $\omega = \omega_0\sqrt{1-\eta^2} \Rightarrow \begin{cases} C = \omega_0 \\ \sin\alpha = \eta \end{cases}$ avec :

☛ - $E_m(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\lambda t}\left[\cos^2(\omega t+\varphi)+\sin^2(\omega t+\varphi+\alpha)\right]$

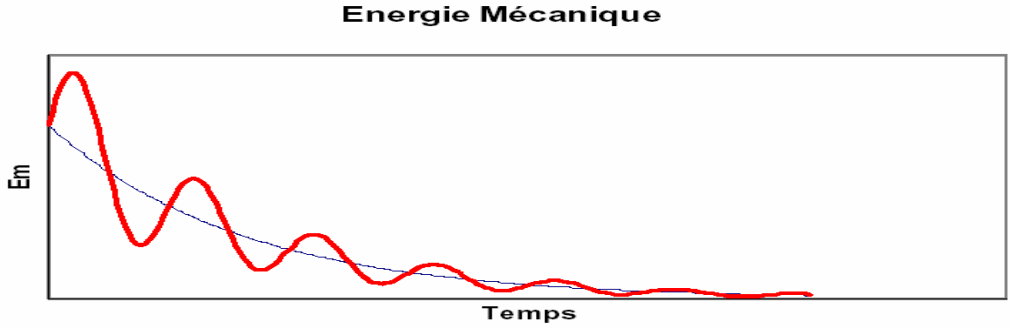
- $E_m(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\lambda t}\left[1 - \sin^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi + \alpha)\right]$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\lambda t}\left[1 + \left[\sin(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi + \alpha)\right]\left[\sin(\omega t + \varphi + \alpha) - \sin(\omega t + \varphi)\right]\right]$$

- $E_m(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\lambda t}\left[1 + \sin\alpha \sin 2\left(\omega t + \varphi + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$

- $\boxed{E_m(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\lambda t}\left[1 + \eta \sin 2\left(\omega t + \varphi + \frac{\alpha}{2}\right)\right]}$ **(8)**

☛ La relation (8) indique que l'énergie mécanique décroît comme $e^{-2\lambda t}$.



☛ Si l'amortissement est très faible (η<<1) $\Rightarrow$ $\boxed{E_m(t) = E_0 e^{-2\lambda t} \ avec \ E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = C^{te}}$

III.4.2 étude de variation de E_m

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left[E_c + E_p\right] = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -h\dot{x}^2 \xleftarrow{(2)} (m\ddot{x} + h\dot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

D'où $\frac{dE_m}{dt} = -h\dot{x}^2 \leq 0 \ car \ h \rangle 0 \Rightarrow E_m$ décroît quand t augmente.

Or $-h\dot{x}^2 = -h\dot{x}\dot{x} = -h\dot{x}\frac{dx}{dt} = F_{frott} \cdot \frac{dx}{dt} = \mathrm{P}(F_{frott}) = \frac{dW_{frott}}{dt}$

D'où $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \frac{dW_{frott}}{dt} \Leftrightarrow dE_m = dW_{frott} = dW_v \quad (9)}$

<u>Remarque :</u> La relation (9) montre que le mécanisme de dissipation est dû à la force de viscosité, et la perte d'énergie du système est due au travail des forces de viscosité (frottement).

III.4.3 Facteur de qualité

✪ Un oscillateur est un réservoir d'énergie. Si les pertes sont faibles, l'oscillateur est de bonne qualité.

✪ On appelle Facteur de Qualité Q le rapport entre l'énergie mécanique à l'instant t et la perte d'énergie entre les instants t et t+T :

$$\boxed{Q = 2\pi\frac{E_m}{\Delta E_m} = 2\pi\frac{E_m(t)}{\left[E_m(t) - E_m(t+T)\right]} = \frac{2\pi}{(1 - e^{-\lambda T})}} \quad \textbf{(10)}$$

✪ Si l'amortissement est très faible, donc d'après la relation (7') $\eta \langle\langle 1 \Rightarrow \Lambda = \lambda T = 2\pi\eta \Rightarrow \Lambda << 1$ d'où $e^{-2\Lambda} \approx 1-2\Lambda$ donc :

$$\boxed{Q = \frac{2\pi}{\left(1-e^{-2\lambda T}\right)} \approx \frac{2\pi}{\left(1-e^{-2\Lambda}\right)} \approx \frac{2\pi}{2\Lambda} \approx \frac{1}{2\eta}}$$

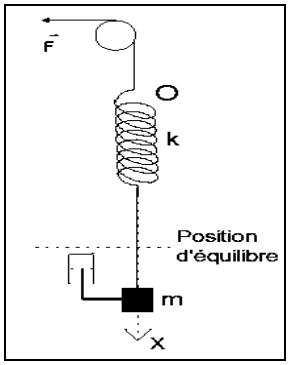
D'où l'expression du facteur de qualité dans le cas d'amortissement faible :

$$\boxed{Q \approx \frac{2\pi}{\left(1-e^{-2\Lambda}\right)} \approx \frac{\pi}{\Lambda} \approx \frac{1}{2\eta}} \qquad \textbf{(10)}$$

D- OSCILLATIONS FORCÉES AMORTIES À UN DEGRÉ DE LIBERTÈ

I. ÉQUATION DU MOUVMENT : EXEMPLE DU PENDULE ÉLASTIQUE

I.1. DESCRIPTION DU SYSTÈME



- Le solide ponctuel de masse **m** est suspendu au ressort vertical de raideur **k** et est soumis à une force de frottement $\boxed{\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\dot{\vec{x}}}$

- Comment se comporte t'il lorsqu'on lui applique une force excitatrice sinusoïdale ? $\boxed{\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega_E t + \varphi)}$

- L'excitation est plus générale qu'il y paraît car une excitation peut se décomposer en une somme d'excitations sinusoïdales par l'analyse de Fourier.

I.2. MISE EN ÉQUATION (FROTTEMENT FLUIDE(OU VISQUEUX)

- L'oscillateur est soumis à une force extérieure $\boxed{F(t) = F_0 \cos \omega_E t}$ qui va imposer le mouvement de l'oscillateur ⇒ le mouvement forcé aura la même fréquence ω_E que celle de la force d'excitation.

- On utilise la relation fondamentale de la dynamique : $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}}$ et posons $x = l - l_e$ ie on travaille avec origine ressort en équilibre chargé. Prenant, aussi, à l'instant t=0 quand la force est maximum ($=F_0$) et dirigée vers le bas (vers les x positifs).

- La masse m sera donc soumise aux forces :

$$\begin{cases} * \vec{F}_{ress} = -kx.\vec{i} \\ * \vec{F}_{frot} = -h\dot{x}.\vec{i} \\ * m\vec{a} = m\ddot{x}.\vec{i} \\ * \vec{F} = F_0 \cos(\omega_E t).\vec{i} \end{cases} \xrightarrow{P.F.D} m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_0 \cos(\omega_E t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_E t)$$

- Posons $\boxed{2\lambda = \frac{h}{m} \; et \; \omega_0^2 = \frac{k}{m} \; avec \; A_0 = \frac{F_0}{m}}$. En électronique F(t) est appelé entrée.

- D'où l'équation du mouvement devient donc : $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos\omega_E t = F_E(t) \quad (11)}$

II. SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (11)

II.1. FORME GÉNÉRALE

- Pendant le **régime transitoire**, la forme générale de la solution de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation sans second membre (**SG_0**) et d'une solution particulière de l'équation du mouvement avec second membre.(**SP**) $\Rightarrow$ SG = SG_0 + SP.

- SG_0 = S.G.E.S.S.M

$$= e^{-\lambda t}\left[A_1 e^{+t\sqrt{\Delta'}} + A_2 e^{-t\sqrt{\Delta'}}\right] \text{ si } \lambda>\omega_0$$

$$= e^{-\lambda t}\left[A_1 t + A_2\right] \text{ si } \lambda=\omega_0$$

$$= Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_L t + \phi) \text{ si } \lambda<\omega_0$$

- $SG_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ comme $e^{-\lambda t}$.

- Donc **SG = SG_0 + SP ≈ SP = x(t) tel que, avec η<1:**

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_L t + \phi) + x_0\cos(\omega_E t + \varphi_a) \; avec \; \omega_L = \omega_0\sqrt{1-\eta^2} \; et \; \eta = \frac{\lambda}{\omega_0}}$$

➡ $Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_L t + \phi)$ est la solution de l'équation sans second membre. On a vu que cette solution s'amorti et devient négligeable au bout d'un certain temps.

➡ $x_0\cos(\omega_E t + \varphi_a)$ est la solution particulière qui correspond au **régime forcé** car l'oscillateur oscille avec la même fréquence que l'excitation. **φ_a** est le déphasage entre x(t) et la force excitatrice. D'une manière générale, **c'est le déphasage entre la « réponse » et l' « excitation ».**

II.2. ÉTUDE DU RÉGIME FORCÉ

Pour résoudre l'équation (11) on passe en notation complexe :

$$\boxed{\ddot{x}^* + 2\lambda\dot{x}^* + \omega_0^2 x^* = F_E^*(t) \quad (12)}$$

On utilise la méthode des complexes. En écrivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = x_0\cos(\omega_E t + \varphi_a) = \mathrm{Re}\left(x_0 e^{j(\omega_E t + \varphi_a)}\right) = \mathrm{Re}\left(\bar{x}_0 e^{j\omega_E t}\right) = \mathrm{Re}(x^*) \\ F_E(t) = A_0\cos\omega_E t = \mathrm{Re}\left(A_0 e^{j\omega_E t}\right) \\ \bar{x}_0 = x_0 e^{j\varphi_a}, \; amplitude \; complexe \; de \; l'oscillateur. \end{array}}$$

On cherche une solution de la forme $\boxed{x^*(t) = \bar{x}_0 e^{j\omega_E t}}$ **(13)**, puis on injecte dans (12).

Donc (13) dans (12) donne : $\bar{x}_0 = x_0 e^{j\varphi_a} = \dfrac{A_0}{(\omega_0^2 - \omega_E^2) + 2j\lambda\omega_E}$

D'où $\boxed{x_0 = \dfrac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\lambda^2\omega_E^2}} \quad et \quad \tan\varphi_a = \dfrac{-2\lambda\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \quad (13')}$

La solution générale est donc $\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_E t + \varphi_a) \quad (14)}$ tel que la relation (13')

En résumé :

- La solution permanente de l'équation $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos\omega_E t = F_E(t) \quad (11)$ est $x(t) = x_0 \cos(\omega_E t + \varphi_a) \quad (14)$ qui correspond au régime forcé. Donc le mouvement forcé à la même fréquence ω_E que la force d'excitation.
- $$\boxed{(15)\begin{cases} -\ x(t) = x_0 \cos(\omega_E t + \varphi_a) \\ -\ x_0 = \dfrac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\lambda^2\omega_E^2}} \\ -\ \tan\varphi_a = \dfrac{-2\lambda\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)} \quad \Rightarrow \varphi_a = -Arctg\left(\dfrac{2\lambda\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)}\right) \langle 0 \end{cases}}$$