Chapitre IV- Oscillateurs à plusieurs degrés de liberté

Exemples :

a. Pendule simple non flexible de longueur variable

Ce système peut être représenté par une masse attachée à un ressort se trouvant, sans frottement, à l'intérieur d'un tube.

Ce dernier est sans masse et oscillant autour d'un point fixe. l_0 : la longueur du ressort à l'équilibre (repos) ie ($\theta = 0$).

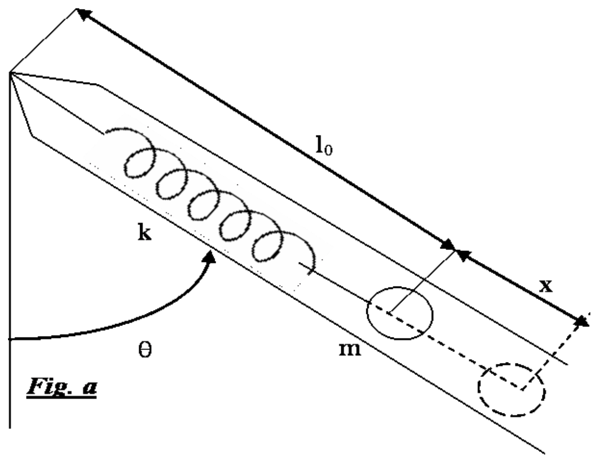


Fig. a

b. Couplage de plusieurs oscillateurs harmonique à un seul degré de liberté

- Le plus simple des systèmes couplés est formé par deux masses m_1 et m_2 pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal et par deux ressorts de raideur k_1. Les deux masses sont également reliées par un ressort de raideur k_2. On négligera les masses des ressorts. Les abscisses des positions d'équilibre des masses sont x_a et x_b. Les déplacements des masses sont x_1 et x_2. Le mouvement des deux masses. Nous supposons que lorsque le système est en équilibre, les ressorts ne sont pas tendus (état de repos).

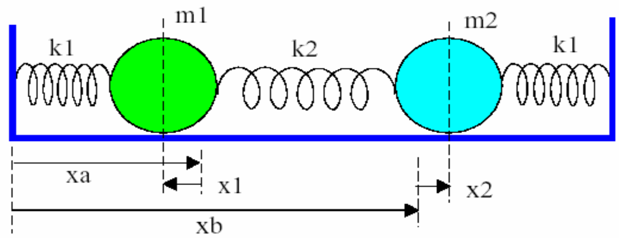


Fig. b

- Un tel dispositif constitue un exemple d'oscillateurs couplés. **Le couplage est ici réalisé par un ressort**. NB : nous ne ferons ici qu'aborder le problème des oscillateurs couplés sur le cas particulier que nous avons décrit afin de faire ressortir certaines caractéristiques de ce type de mouvement.

c. Pendule triple

- Constitué de 3 tiges rigides pesantes (OA, AB, et BC) articulées entre elles en O, A et B avec des liaisons parfaites. Chaque tige constitue un oscillateur à part entière.
- Les 3 tiges sont couplées, au moyen des liaisons en A et B.

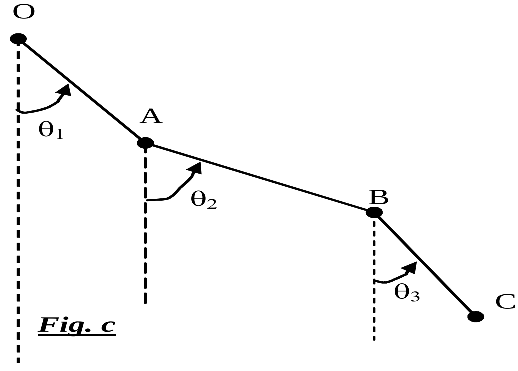


Fig. c

A- OSCILLATEURS LIBRES NON AMORTIS À 2 D.D.L

I. COUPLAGE PAR ÉLASTICITÉ

I.1. DESCRIPTION DU SYSTÈME

Dans le cas d'un **couplage par élasticité,** (couplage par ressort en mécanique ou par capacité en électricité) **sans dissipation d'énergie** (absence de frottement en mécanique et de résistance en électricité), le dispositif qui lie les 2 oscillateurs peut être tout système présentant une élasticité, soit un ressort par exemple.

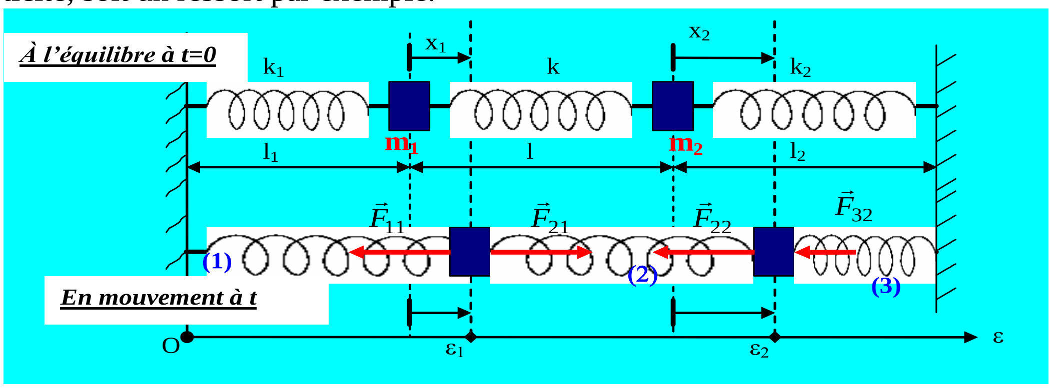


Fig. I.1

- ***Pb :*** *Désignons par l_1, l et l_2 les longueurs respectives des ressorts (1), (2) et (3) à l'équilibre (au repos chargé). Supposons que les 2 masses m_1 et m_2 soient écartées de leur position de repos respective par une déformation des 2 ressorts (1) et (3), et ensuite on les lâche sans vitesse initiale. Cherchons les équations du mouvement de ces 2 masses.*

- À l'instant t et si on travaille avec origine en O (ie à partir de l'équilibre chargé au repos). Donc m_1 distant de ε_1 de O, m_2 est distant de O de ε_2 :

☛ le ressort (1) **s'allonge** de la quantité $(\varepsilon_1 - l_1)$ à partir de la position d'équilibre.

☛ le ressort (3) **se contracte** (ie se comprime) de la quantité $(\varepsilon_2 - (l_1 + l))$.

☛ le ressort (2) **se contracte** ou/et s'allonge de $\eta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1)$.

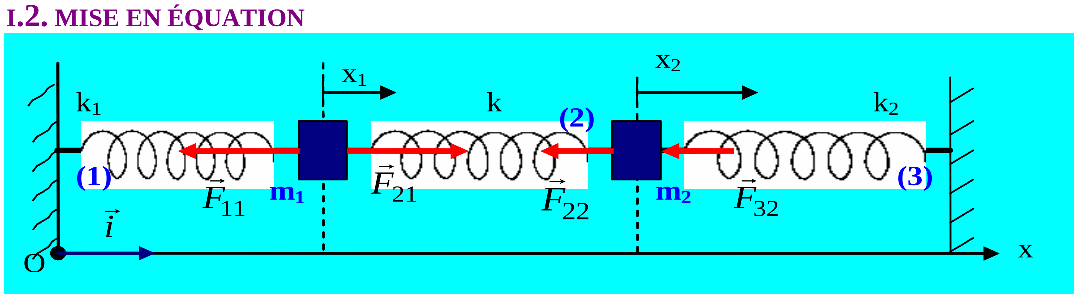
En effet :

Si m_2 était fixe, le ressort (2) se contracterait de $(\varepsilon_1 - l_1)$. Mais comme m_2 se déplace de $(\varepsilon_2 - (l_1 + l))$, alors le ressort (2) va se contracter seulement de $\eta = (\varepsilon_1 - l_1) - (\varepsilon_2 - (l_1 + l)) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1$.

-Posons :

- $x_1 = (\varepsilon_1 - l_1)$: déplacement de m_1 à partir de la position d'équilibre chargé
- $x_2 = \varepsilon_2 - (l_1 + l)$: déplacement de m_2 à partir de la position d'équilibre chargé.
- $\eta = (\varepsilon_1 - l_1) - (\varepsilon_2 - (l_1 + l)) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1 = (x_1 - x_2)$: **contraction** du ressort **(2).**

I.2. MISE EN ÉQUATION



I.2.1 Bilan des forces exercées sur m_1 et m_2.

☞ Comme le ressort (1) s'allonge de **$x_1 = \varepsilon_1 - l_1$** alors il va exercer sur la masse **<u>m_1</u>** une force $\boxed{\vec{F}_{11} = -k_1 x_1.\vec{i}}$.

☞ Le ressort (2) étant contracté de **$\eta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1) = (x_1 - x_2)$** alors il va exercer sur la masse **<u>m_1</u>** la force $\boxed{\vec{F}_{21} = -k(x_1 - x_2).\vec{i} = +k(x_2 - x_1).\vec{i}}$.

☞ Le ressort (2) se contracte de **$\eta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1) = (x_1 - x_2)$** alors il va exercer sur la masse **<u>m_2</u>** la force $\boxed{\vec{F}_{22} = -k(x_2 - x_1).\vec{i}}$.

☞ Le ressort (3) se contracte de **$x_2 = \varepsilon_2 - (l_1 + l)$** alors il va exercer, sur la masse **<u>m_2</u>**, la force $\boxed{\vec{F}_{32} = -k_2 x_2.\vec{i}}$.

I.2.2 Les équations du mouvement

(1)

$$\boxed{P.F.D \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k(x_2 - x_1) = -(k_1 + k)x_1 + kx_2 \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k(x_2 - x_1) = -(k_2 + k)x_2 + kx_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 = 0 \end{cases}}$$

Les équations (1) sont les équations différentielles couplées des oscillations libres des systèmes à 2 degrés de liberté où ω_1^2 est la pulsation propre au carré du système primaire (ie m_1), le système secondaire étant bloqué et ω_2^2 la pulsation propre au carré du système secondaire (ie m_2), le système primaire étant bloqué.

Avec $\boxed{\omega_1^2 = \dfrac{k_1 + k}{m_1}\,;\, \alpha_1 = \dfrac{k}{m_1}\,;\, \omega_2^2 = \dfrac{k_2 + k}{m_2}\,;\, \alpha_2 = \dfrac{k}{m_2}}$.

Le système d'équation (1) peut s'écrire sous forme matricielle : $\boxed{A\ddot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{0}}$ où :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dite matrice d'inertie (diagonale).
- $B = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$ est dite matrice de régidité (non diagonale).

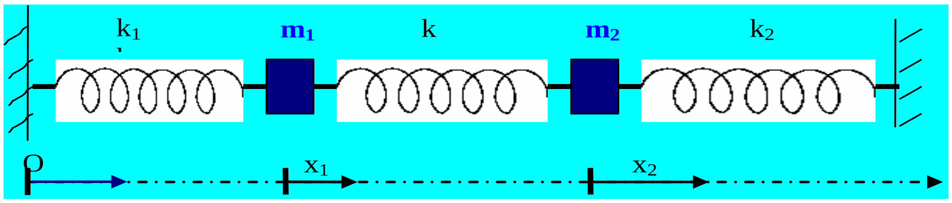
<u>*Remarque :*</u>

- *Si il n'y a pas de couplage $k=0 \Rightarrow$ B sera diagonal.*
- *Inversement si B est non diagonale, il y'a couplage par élasticité.*
- *A diagonale $\rightarrow$ il n'y a pas de couplage par inertie.*
- *B non diagonale $\rightarrow$ il y'a couplage par élasticité.*
- *L'intensité du couplage est représentée par K, cœifficient du couplage du système avec*

$$\boxed{0 \le K \le 1 \quad et \quad K^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\omega_1^2\omega_2^2} = \frac{k^2}{(k_1 + k)(k_2 + k)}} \textbf{ (2)}$$ ***avec :***

- ***Si K=0 $\rightarrow$ pas du couplage***
- ***Si K=1 $\rightarrow$ couplage rigide (ie $d(m_1, m_2)$ fixe, elle ne peut pas varier)***

I.2.3 Obtention des équations du mouvement à partir de Lagrangien du système



- $\mathbf{x_1}$: déplacement de $\mathbf{m_1}$ à partir de la position d'équilibre (ressort chargé au repos).
- $\mathbf{x_2}$: déplacement de $\mathbf{m_2}$ à partir de la position d'équilibre (ressort chargé au repos).

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ U &= \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} L_{x_1} &: m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ L_{x_2} &: m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow (1)}$$

D'où les équations du mouvements d'un oscillateur à 2 D.D.L. : $\boxed{\left\{\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 &= 0 \end{aligned}\right.}$ **(1)**

I.3. ÉQUATION AUX PULSATIONS PROPRES ET SOLUTION DU SYSTÈME (1)

I.3.1 Équation aux pulsations propres.

Remarque :

- *Nous avons obtenu 2 équations différentielles linéaires à cœfficients constants (1) où les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont mélangés.*
- *Les solutions de ce système différentiel (1) ont une structure d'espace vectoriel de dimension 2 $\Rightarrow$ $x_1 + x_2$ est aussi solution du système (1) et $\alpha x_1 + \beta x_2$ l'est aussi.*
- ***Donc il suffit de chercher 2 solutions particulières indépendantes, la solution générale sera alors une combinaison linéaire de ces 2 solutions.***

Solution particulière du système (1) :

- On cherche une solution de la forme $\boxed{\bar{x}^* = \bar{x}_0^{\,*} e^{j\Omega t} \quad où\ \bar{x}_0^{\,*} = \begin{pmatrix} ae^{j\varphi} \\ be^{j\varphi} \end{pmatrix}}$ **(3)**
- $\bar{x} = \Re e(\bar{x}^*) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\Omega t + \varphi) \\ b\cos(\Omega t + \varphi) \end{pmatrix}$, a, b $\in \Re$.
- (3) dans (1) $\boxed{\left\{\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 &= 0 \end{aligned}\right.}$ on obtient donc $\boxed{\left\{\begin{aligned} a(\omega_1^2 - \Omega^2) - \alpha_1 b &= 0 \\ b(\omega_2^2 - \Omega^2) - \alpha_2 a &= 0 \end{aligned}\right\}}$ **(4)**

Pour que le système homogène (4) possède une solution $\bar{x} = \bar{0}$ ie a≠0 et b≠0, I.F.I.S que le déterminant de (4) soit nul, soit : $\boxed{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - \alpha_1\alpha_2 = 0}$ **(5).**

- (5) cette équation bicarrée en Ω **s'appelle équation aux pulsations propres**, qui n'est autre que

$$\boxed{\det(B - \Omega^2 A) = 0 \Rightarrow \Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2(1 - K^2) = 0}$$ **(5) car (2).**

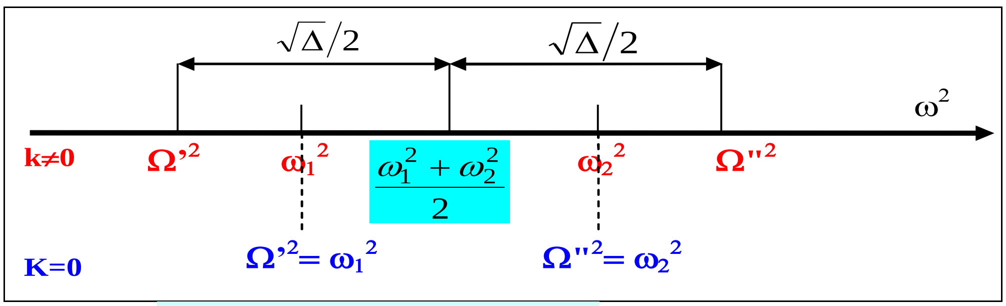
- Le discriminant $\Delta=\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)^2-4\omega_1^2\omega_2^2(1-K^2)=\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2>0$, donc l'équation aux pulsations propres possède 2 solutions réelles distinctes, essentiellement positives, $\Omega'^2\ et\ \Omega''^2$: ces pulsations sont dites **pulsations propres du système** :

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega'^2&=\left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)^2-4\omega_1^2\omega_2^2(1-K^2)}\\ \Omega''^2&=\left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)^2-4\omega_1^2\omega_2^2(1-K^2)}\end{aligned}}\quad \textbf{(6)}$$

Remarque :

(5)$\Rightarrow\boxed{(\omega_1^2-\Omega^2)(\omega_2^2-\Omega^2)=\alpha_1\alpha_2=\dfrac{k^2}{m_1m_2}>0\Rightarrow 0<\Omega'^2<\omega_1^2<\omega_2^2<\Omega''^2}$ *:* $\Omega'^2\ et\ \Omega''^2$ *sont à l'extérieur de* $\left[\omega_1^2,\omega_2^2\right]$*,* ***on dit que le couplage par élasticité écarte les fréquences propres.***

- Si $\omega_1<\omega_2\Rightarrow 0<\Omega'<\omega_1<\omega_2<\Omega''$:



- *Si K=0, ie couplage nul,* $\Omega'=\omega_1\ et\ \Omega''=\omega_2\Rightarrow\omega_1\ et\ \omega_2$ ***sont les pulsations propres en l'absence du couplage.*** *Pour K≠0, chaque pulsation propre,* $\{\Omega',\Omega''\}$*, correspond à un mode propre.*

I.3.2 Solution des équations différentielles couplées par élasticité.

1^er mode propre Ω'

On cherche une solution particulière de la forme $\boxed{\begin{cases}x'_1(t)=a'_1\cos(\Omega't+\varphi')\\ x'_2(t)=a'_2\cos(\Omega't+\varphi')\end{cases}}$

En substituant ces expressions dans les équations du mouvement, ie le système (1) :

$$\begin{cases}a'_1(\omega_1^2-\Omega'^2)-\alpha_1a'_2=0\\ a'_2(\omega_2^2-\Omega'^2)-\alpha_2a'_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a'_1=\dfrac{\alpha_1a'_2}{(\omega_1^2-\Omega'^2)}\\ a'_2=\dfrac{\alpha_2a'_1}{(\omega_2^2-\Omega'^2)}=\beta'a'_1\end{cases}\quad comme\ \omega_2^2>\Omega'^2\Rightarrow\beta'=\frac{a'_2}{a'_1}\geq 0$$

D'où $\boxed{\begin{cases}x'_1(t)=a'_1\cos(\Omega't+\varphi')\\ x'_2(t)=\beta'a'_1\cos(\Omega't+\varphi')\end{cases}\quad avec\quad \beta'\geq 0}$ **(7)** ⇒ x'$_1$ et x'$_2$ sont en phase, ie **les 2 oscillateurs oscillent en phase à la pulsation Ω' : •→ •→ où ←• ←•.**

2ème Mode propre Ω"

$$\begin{cases} x''_1(t) = a''_1\cos(\Omega''t+\varphi'') \\ x''_2(t) = a''_2\cos(\Omega''t+\varphi'') \end{cases} \text{ or (1)} \Rightarrow \begin{cases} x''_1(t) = a''_1\cos(\Omega''t+\varphi'') \\ x''_2(t) = \beta''a''_1\cos(\Omega''t+\varphi'') \end{cases} \quad avec \quad \beta'' \le 0 \qquad \textbf{(8)}$$

- Puisque $a''_2 = \dfrac{\alpha_2 a''_1}{(\omega_2^2 - \Omega''^2)}$ or $\omega_2^2 \langle \Omega''^2 \Rightarrow \beta'' = \dfrac{a''_2}{a''_1} \langle 0 \Rightarrow$ x'₁ et x'₂ sont en opposition de phase, ie **les 2 oscillateurs oscillent en opposition de phase à la pulsation Ω".**

Deux solutions sont possibles : •→ ←• où ←• •→.

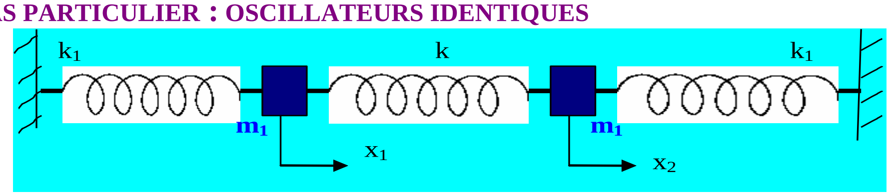
Mouvement général $x_1(t)$ et $x_2(t)$

- Le mouvement général des 2 masses est une combinaison linéaire des modes propres (6) et (7) :

$$\begin{cases} x_1(t) = a'_1\cos(\Omega't+\varphi') + a''_1\cos(\Omega''t+\varphi'') \\ x_2(t) = \beta'a'_1\cos(\Omega't+\varphi') + \beta''a''_1\cos(\Omega''t+\varphi'') \end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

Où les rapports $\beta' = \dfrac{a'_2}{a'_1} \ge 0$ et $\beta'' = \dfrac{a''_2}{a''_1} \le 0$ sont déterminés à partir des équations différentielles pour Ω=Ω' et Ω=Ω". Les 4 inconnues a'_1, a''_1, φ' et φ" sont des constantes réelles déterminées à partir des **C.I**.

I.4. CAS PARTICULIER : OSCILLATEURS IDENTIQUES



- Donc $k_1 = k_2$; $m_1 = m_2 = m$ et $\omega_1 = \omega_2$ avec la relation (2) donnant l'expression du cœfficient du couplage K, on obtient

$$K^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\omega_1^2\omega_2^2} = \frac{k^2}{(k_1+k)^2} \Rightarrow K = \frac{k}{(k_1+k)} \qquad \textbf{(10)}$$

- On peut montrer aisément que : (6)⇒

$$\begin{cases} \Omega' = \omega_1\sqrt{(1-K)} \\ \Omega'' = \omega_1\sqrt{(1+K)} \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

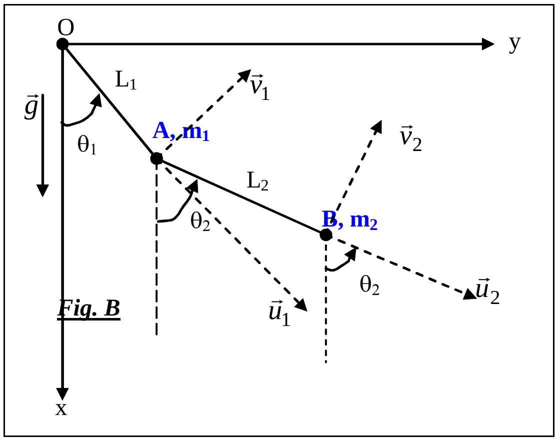
- Donc, dans le cas d'oscillateurs identiques ($\alpha_1 = \alpha_2$ et $\omega_1^2 = \omega_2^2$), les équations différentielles couplées (1) devient donc :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 - \alpha_1 x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A\ddot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{0} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \omega_1^2 \end{pmatrix}.$$

- On peut déterminer la forme de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, en utilisant la **méthode directe** (voir § I.3.2) ou encore ce qu'on appelle la **méthode modale**. L'avantage de cette dernière est l'obtention des équations différentielles découplées, les masses modales $\boxed{m_i = {}^t\phi_i.M.\phi_i = {}^t\phi_i.(mA).\phi_i}$ et les raideurs modales $\boxed{k_i = {}^t\phi_i.Q.\phi_i = {}^t\phi_i.(m.B).\phi_i}$ de système, où le système (1) s'écrit de la forme $\boxed{M\ddot{\bar{x}} + Q\bar{x} = \bar{0}}$.

II. COUPLAGE PAR INERTIE

II.1. DESCRIPTION DU SYSTÈME



- Pendule double constitué par deux tiges OA et AB articulées elles en O et A avec des liaisons parfaites.
- Chaque tige constitue un oscillateur à part entière.
- Les 2 tiges sont couplées, au moyen de la liaison en A.
- Écrivons donc les équations de mouvements du système.
- On va se limiter au cas où $L=L_1=L_2$ et $m_1=m_2=m$.

II.2. METHODE DE LAGRANGE L(OA, AB) = L(S/R$_0$)

❶ *Calcul de $T(S/R_0)$*

$$R_0(O,x,y,z)\xrightarrow{\theta_1/z}R_1(O,u_1,v_1,z)\quad et \quad R_0(O,x,y,z)\xrightarrow{\theta_2/z}R_2(O,u_2,v_2,z)$$

- $\boxed{T(S/R_0)=\frac{1}{2}m_1\vec{V}^2(A/R_0)+\frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(B/R_0)}$

$$-\vec{V}(A/R_0)=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OA}\right]_{R_0}=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OA}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{OA}=L_1\dot{\theta}_1.\vec{v}_1\Rightarrow\vec{V}^2(A/R_0)=L^2\dot{\theta}_1^2$$

$$-\vec{V}(B/R_0)=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OB}\right]_{R_0}=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OB}\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\overrightarrow{OB}=L_1\dot{\theta}_1.\vec{v}_1+L_2\dot{\theta}_2.\vec{v}_2$$

- $$\boxed{\begin{cases}T(S/R_0)=\frac{1}{2}m_1L_1{}^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\left[L_1{}^2\dot{\theta}_1^2+L_2{}^2\dot{\theta}_2^2+2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]\\ U(S)=-m_1\vec{g}.\overrightarrow{OA}-m_2\vec{g}.\overrightarrow{OB}+C=-m_1gL_1\cos\theta_1-m_2g\left(L_1\cos\theta_1+L_2\cos\theta_2\right)+C\end{cases}}$$

❷ *Linéarisation autour de la position d'équilibre à l'origine*

- Position d'équilibre $(\theta_1,\theta_2)=\bar{0}\Rightarrow C=g\left(m_1L_1+m_2\left(L_1+L_2\right)\right)$.Linéarisations autour de (0,0), on obtient donc :
- $$\boxed{\begin{cases}\tilde{T}(S/R_0)=\frac{1}{2}m_1L_1{}^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\left[L_1{}^2\dot{\theta}_1^2+L_2{}^2\dot{\theta}_2^2+2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right]\\ \tilde{U}(S/R_0)=-m_1gL_1\frac{\theta_1^2}{2}-m_2g\left(L_1\frac{\theta_1^2}{2}+L_2\frac{\theta_2^2}{2}\right)\end{cases}}$$
- Limitons nous au cas où $L=L_1=L_2$ et $m_1=m_2=m$.

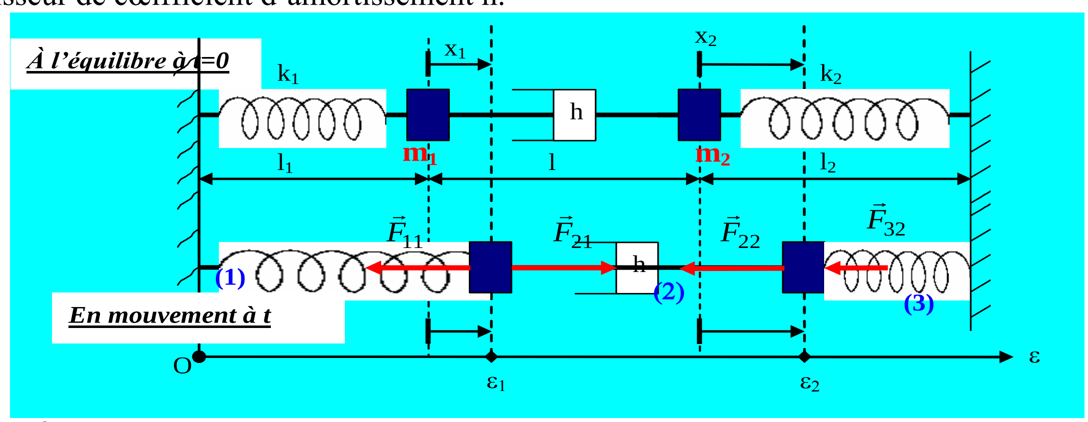
$$\begin{cases}\tilde{T}(S/R_0)=\dfrac{mL^2}{2}\left[2\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right]\\ \tilde{U}(S/R_0)=\dfrac{mgL}{2}\left(2\theta_1^2+\theta_2^2\right)\end{cases}\quad \textbf{(15)}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+2\omega_0^2\theta_1=0\\ \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\omega_0^2\theta_1=0\end{cases} tq\ \omega_0^2=\dfrac{g}{L}}\ \textbf{(16).}$$

- **(16)** s'écrit de la forme $\boxed{A\ddot{\overline{\theta}}+B\overline{\theta}=\overline{0}}$ où :
  - $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matrice d'inertie **(**non diagonale). On dit qu'on a un **couplage par inertie**.
  - $B=\begin{pmatrix}2\omega_0^2 & 0\\ 0 & \omega_0^2\end{pmatrix}$ est dite matrice de régidité (diagonale).
- **Pour la recherche de l'équation aux pulsations propre ($\det(B-\Omega^2 A)=0$) et celle des modes propres on procédera de la même façon que pour le couplage par élasticité (en utilisant la méthode directe ou la méthode modale).**

III. COUPLAGE PAR LES VITESSES

III.1. DESCRIPTION DU SYSTÈME

On reprend le système traité en (section <A>, §.I), et on relie les 2 masses par un amortisseur de cœfficient d'amortissement h.



- À l'instant t≠0 et si on travaille avec origine en O (ie à partir de l'équilibre chargé au repos). Donc m_1 distant de ε_1 de O, m_2 est distant de O de ε_2 :

☛ Le ressort (1) **<u>s'allonge</u>** de la quantité $\mathbf{x_1 = (\varepsilon_1 - l_1)}$ à partir de la position d'équilibre.

☛ Le ressort (3) **<u>se contracte</u>** de la quantité $\mathbf{x_2 = \varepsilon_2-(l_1+l)}$ à partir de la position d'équilibre.

☛ L'amortisseur (2) **<u>se contracte</u>** de $\mathbf{(\varepsilon_1-\varepsilon_2+l) = (x_1 - x_2)}$ à partir de la position d'équilibre.

III.2. MISE EN ÉQUATION

III.2.1 Bilan des forces exercées sur m_1 et m_2.

☞ Le ressort (1) s'allonge de $\mathbf{x_1 = \varepsilon_1 - l_1}$ alors (1) exerce sur **<u>m_1</u>** une force $\boxed{\vec{F}_{11}=-k_1x_1.\vec{i}}$.

☞ L'amortisseur (2) exerce sur **m₁** la force $\boxed{\vec{F}_{21} = -h(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).\vec{i} = Q_{dis,1}}$: Force généralisée de dissipation.

☞ L'amortisseur (2) exerce sur la masse **m₂** la force $\boxed{\vec{F}_{22} = -h(\dot{x}_2 - \dot{x}_1).\vec{i} = Q_{dis,2}}$.

☞ Le ressort (3) exerce, sur la masse **m₂**, la force $\boxed{\vec{F}_{32} = -k_2 x_2.\vec{i}}$.

III.2.2 Les équations du mouvement

III.2.2.1 !ère méthode P.F.D.

$$\boxed{\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - h(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - h(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - 2\lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}} \quad \textbf{(17)}$$

- Avec $m_1=m_2=m$ et $k_1=k_2=k \Rightarrow \boxed{2\lambda = \frac{h}{m} \ et\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$.
- ***Les équations (17) sont les équations différentielles couplées des oscillations libres du système, à 2 degrés de liberté, constitué par 2 oscillateurs identiques couplés par un amortisseur.***
- Le système d'équation (1) peut s'écrire sous forme matricielle : $\boxed{A\ddot{\bar{x}} + D\dot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{0}}$ où :
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dite matrice d'inertie (symétrique diagonale).
  - $B = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix}$ est dite matrice de régidité (symétrique diagonale).
  - $D = 2\lambda\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est dite matrice d'amortissement (symétrique non

diagonale) $\Rightarrow$ ***on a couplage par les vitesses, ie couplage par amortisseur.***

III.2.2.2 2ème méthode équations de Lagrange.

- **x₁** : déplacement de **m₁** à partir de la position d'équilibre
- **x₂** : déplacement de **m₂** à partir de la position d'équilibre
- ϕ est la fonction de dissipation de Raleigh.

$$\boxed{\begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \\ U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \\ \phi = \frac{1}{2}h(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} L(S/R_0) = T(S/R_0) - U(S/R_0) \\ L_{x_i} : \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_{dis,i} = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1,2 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - 2\lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}} \quad \textbf{(17)}$$

III.3. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

- Puisque les composantes de vibration pour un système amorti sont non périodiques, mais oscillatoires avec des amplitudes diminuant exponentiellement, soient :

$$\boxed{\bar{x}^* = \bar{x}_0^* e^{st} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^* \\ \bar{x}_2^* \end{pmatrix} \quad où\ \bar{x}_0^* = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}} \quad \textbf{(18)}$$

tel que E et F sont 2 réels complexes. (18) est la forme de la solution générale où $\bar{x} = \Re(\bar{x}^*)$.

- Substituant (18) dans (17) et divisant par e^{st} on obtient donc :

$$\boxed{\begin{cases} E(s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2) - 2\lambda s F = 0 \\ -2\lambda s E + F(s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2) = 0 \end{cases}} \quad \textbf{(19).}$$

- Une **C.N.S** pour qu'une solution $\bar{x}^* \neq \bar{0}\ \exists$ (ie E≠0 et F≠0) est que le déterminant de (19) soit nul, qui n'est autre que $\boxed{\det(s^2 A + sD + B) = 0 \Rightarrow (s^2 + \omega_0^2)(s^2 + 4\lambda s + \omega_0^2) = 0}$ **(20)**, cette équation **s'appelle équation caractéristique ou encore équation aux valeurs propre** s, où **s racine complexe**.

- La résolution de l'équation (20) nous donne 4 racines réelles ou complexes conjuguées : s_1, s_2, s_3, s_4. Donc le ***1er mode propre*** $\rightarrow$ ***(s_1,s_2)*** et le ***2ème mode propre*** $\rightarrow$ ***(s_3, s_4).***

- Par conséquent, la solution générale (qui est une combinaison linéaire de mode propre), ou encore le mouvement générale complet du système peut être exprimer par :

$$\boxed{\begin{cases} x_1^*(t) = E_1 e^{s_1 t} + E_2 e^{s_2 t} + E_3 e^{s_3 t} + E_4 e^{s_4 t} \\ x_2^*(t) = F_1 e^{s_1 t} + F_2 e^{s_2 t} + F_3 e^{s_3 t} + F_4 e^{s_4 t} \end{cases}} \quad \textbf{(21)}$$

où E_i et F_i sont des complexes.

- Où les 4 cœfficients inconnus sont E_1, E_2, E_3 et E_4 (car $F_i = \gamma_i E_i$) seront déterminés par les 4 C.I du système à savoir $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$.
- Les rapports d'amplitude sont donnés par le système (22) :

$$\boxed{\frac{E_i}{F_i} = \frac{2\lambda s_i}{s_i^2 + 2\lambda s_i + \omega_0^2} = \frac{s_i^2 + 2\lambda s_i + \omega_0^2}{2\lambda s_i} = \frac{1}{\gamma_i}\ avec\ i = 1 \rightarrow 4} \quad \textbf{(22)}$$

III.3.1 Détermination des racines s_i.

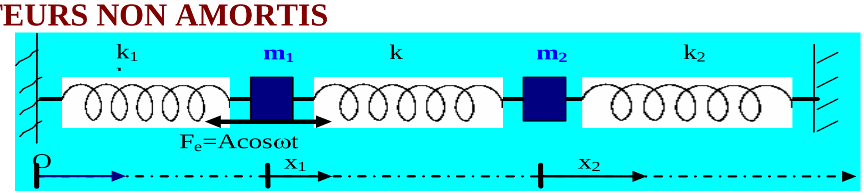
- L'expression de l'équation caractéristique s'écrit :

$$\boxed{\det(s^2 A + sD + B) = 0 \Rightarrow (s^2 + \omega_0^2)(s^2 + 4\lambda s + \omega_0^2) = 0} \quad \textbf{(20).}$$

On peut distinguer 3 cas suivant le signe de $\Delta' = (4\lambda^2 - \omega_0^2)$.

B- EXCITATION D'OSCILLATEURS À 2 D.D.L

I. OSCILLATEURS NON AMORTIS



- On applique une force extérieure F_e (en mécanique) où une tension U_e (en électricité) au **système primaire**, de la forme **Acosωt**.

- Dans le cas d'un **couplage par élasticité, sans dissipation d'énergie** les équations différentielles qui décrivent l'évolution du système sont déduites de l'équation (1) (A.§.I.2.2) et prennent la forme:

- $$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k(x_2 - x_1) + F_e \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 = B\cos\omega t \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(28).}$$

- Avec $\boxed{\omega_1^2 = \dfrac{k_1 + k}{m_1}\,;\alpha_1 = \dfrac{k}{m_1}\,;\omega_2^2 = \dfrac{k_2 + k}{m_2}\,;\alpha_2 = \dfrac{k}{m_2}\,;B = \dfrac{A}{m_1}}$

- On recherche des **solutions** complexes de la forme $\boxed{\bar{x}^* = \bar{x}_0 e^{j\omega t} \quad où\ \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}}$ et x_{01}, x_{02} sont 2 **constantes réelles**. Et remplaçons F_e par $F_e^* = Ae^{j\omega t}$. Donc on recherche des solutions de la forme $\boxed{\bar{x} = \mathrm{Re}(\bar{x}^*) = \bar{x}_0 \cos\omega t \quad où\ \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}}$ **(29)**.

- L'insertion de cette forme de solutions dans les équations différentielles (28) permet d'obtenir un **système de Cramer** à 2 inconnues x_{01}, x_{02} tel que :

$$\begin{cases} x_{01}(\omega_1^2 - \omega^2) - \alpha_1 x_{02} = B \\ x_{02}(\omega_2^2 - \omega^2) - \alpha_2 x_{01} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{01} = B\dfrac{(\omega_2^2 - \omega^2)}{\det S} = B\dfrac{(\omega_2^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega'^2)(\omega^2 - \Omega''^2)} \\ x_{02} = B\dfrac{\alpha_2}{\det S} = B\dfrac{\alpha_2}{(\omega^2 - \Omega'^2)(\omega^2 - \Omega''^2)} \end{cases} \quad \textbf{(30)}$$

Avec $(\omega^2 - \Omega'^2)(\omega^2 - \Omega''^2)$ =detS= $(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \alpha_1\alpha_2$ qui n'est autre chose que l'équation caractéristique où encore l'équation aux pulsations propres, dont les racines sont $\Omega'^2\ et\ \Omega''^2$ (voir A.§.I.3.1) sont donnés par l'équation (6).

- La relation (30) $\Rightarrow \boxed{x_{02} = \dfrac{\alpha_2}{(\omega_2^2 - \omega^2)} x_{01}}$ **(31)** $\boxed{\Leftrightarrow x_{01} = x_{02}\dfrac{(\omega_2^2 - \omega^2)}{\alpha_2}}$ **(32)**

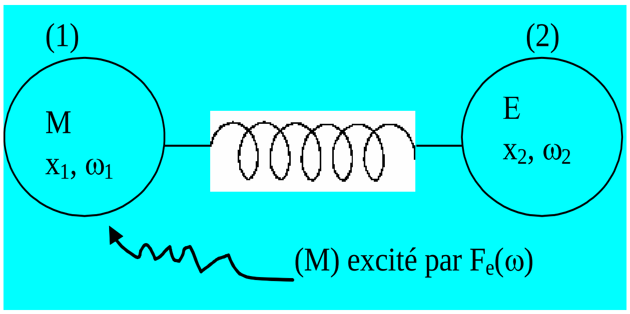
- (29)$\Rightarrow$ $$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}\cos\omega t = B\dfrac{(\omega_2^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega'^2)(\omega^2 - \Omega''^2)}\cos\omega t \\ x_2(t) = x_{02}\cos\omega t = B\dfrac{\alpha_2}{(\omega^2 - \Omega'^2)(\omega^2 - \Omega''^2)}\cos\omega t \end{cases} \quad \textbf{(33)}$$

Remarque :

- *Si on avait un amortisseur, alors* x_{01}, x_{02} *seront complexes et on les prendras sous la forme* $x_{01} = e_1 e^{j\varphi_1}, \quad x_{02} = e_2 e^{j\varphi_2}$.
- *D'après (33) on aura la résonance d'amplitude (ie* $x_{01} \to \infty$; $x_{02} \to \infty$*) pour* $\omega^2 = \Omega'^2\ et/ou\ \omega^2 = \Omega''^2$ voir relation (30).

- *Pour* $\boxed{\omega=\omega_2 \xleftrightarrow{(32)} x_{01}=0 \; et \; x_{02}\neq 0}$, *on dit qu'on a un phénomène* ***d'antirésonance*** *ou de résonance secondaire : la masse* m_2 *va absorber toute l'énergie communiquée par la force* F_e *à la masse* m_1*, et toutes les vibrations de* m_1 *seront neutralisées.*
- *On dit que l'antirésonance est obtenue pour* $\omega=\omega_2$*, ie la pulsation pour laquelle la masse qui subit la force reste immobile.*

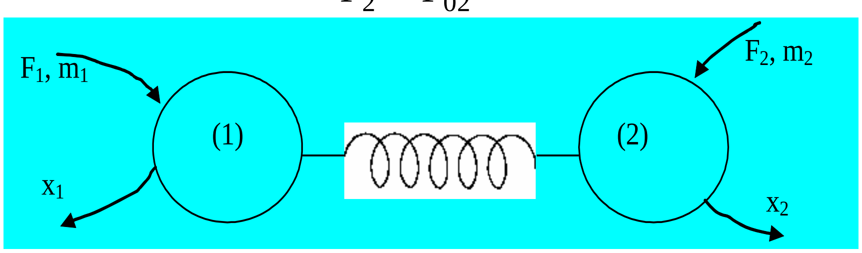
I.1. EXEMPLE : ÉTOUFFEUR DE VIBRATION



- L'oscillateur (1) est une machine (M) qui vibre avec la fréquence ω_1.
- Si $\omega=\omega_2 \xleftrightarrow{(32)} x_{01}=0 \; et \; x_{02}\neq 0$ on aura un phénomène d'antirésonance. La machine (M) ne subit aucune vibration, tout est transmis à l'étouffeur de vibration (E). L'excitation est totalement transmise à l'oscillateur (2).

I.2. FONCTION DU TRANSFERT DE (1) VERS (2)

- On définit la fonction du transfert de la partie (1) vers (2) par le cœfficient $\boxed{t_{12}=\dfrac{x_2}{F_1}=\dfrac{x_{02}}{F_{01}}=\dfrac{x_{02}}{A}\xrightarrow{(30)} t_{12}=\dfrac{\alpha_2}{m_1 \det S}}$ **(34)**
- avec $\det S=(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)-\alpha_1\alpha_2=(\omega^2-\Omega'^2)(\omega^2-\Omega''^2)$.
- $t_{12}\xrightarrow[\omega\to\Omega',\Omega'']{}\infty$ et $x_2=t_{12}.F_1=t_{12}.F_e \Leftrightarrow x_{02}=t_{12}.F_{01}=t_{12}.A \to$ (33)
- On définit la fonction d'entrée en (1) : $\boxed{t_{11}=\dfrac{x_1}{F_1}=\dfrac{x_{01}}{F_{01}}=\dfrac{x_{01}}{A}=\dfrac{1}{m_1}.\dfrac{(\omega_2^2-\omega^2)}{(\omega^2-\Omega'^2)(\omega^2-\Omega''^2)}}$ **(35). Et** $t_{11}\xrightarrow[\omega\to\omega_2]{}0$.
- définit la fonction d'entrée en (2) : $t_{22}=\dfrac{x_2}{F_2}=\dfrac{x_{02}}{F_{02}}$.



I.3. THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ

Si on applique une force F_1 à la machine (1), celle-ci va se déplacer de x_1. Et si on applique une force F_2 à l'étouffeur (2), celle-ci va se déplacer de x_2.

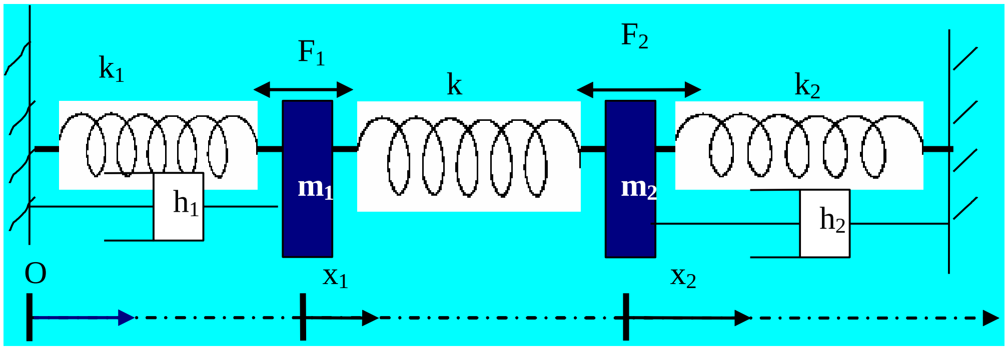
Théorème : *La réponse de (2) à une excitation appliquée à (1) est égale à la réponse de (1) à une excitation appliquée à (2) :* $t_{12}=t_{21}$*. Si* $F_1=F_2$ *alors* $x_1=x_2$*.*

Notation matricielle

$$A\ddot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{F} \text{ avec } \begin{cases} \bar{x} = (x_1, x_2), \bar{F} = (F_1, F_2), \bar{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \\ \bar{x} = \bar{x}_0 e^{j\omega t}; \bar{F} = \bar{F}_0 e^{j\omega t}, \quad \bar{F}_0 = (F_{01}, F_{02}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{(B-\omega^2 A)\bar{x}_0 = \bar{F}_0 = M.\bar{x}_0 \Rightarrow \bar{x}_0 = M^{-1}.\bar{F}_0}$ **(36), on pose** $\boxed{M^{-1} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = [t_{ij}]}$ **: matrice de transfert qui relie la force F au déplacement x.**

II. OSCILLATEURS AMORTIS (EXCITÉS)



- On applique une force extérieure F_1 (en mécanique) où une tension U_1 (en électricité) au **système primaire (m_1)**, de la forme **$F_{01}\cos\omega t$**. On applique une force F_2 au **système secondaire (m_2),** de la forme **$F_{02}\cos\omega t$**.
- Dans le cas d'un **couplage par élasticité,** les équations différentielles qui décrivent l'évolution du système sont déduites en utilisant la méthode de Lagrange et prennent la forme:

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\lambda_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 = \dfrac{F_1}{m_1} \\ \ddot{x}_2 + 2\lambda_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 = \dfrac{F_2}{m_2} \end{cases} \Leftrightarrow A\ddot{\bar{x}} + D\dot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{F}}$$ **(37)**. Avec :

- $2\lambda_1 = \dfrac{h_1}{m_1}$ *et* $2\lambda_2 = \dfrac{h_2}{m_2}$ et $\omega_1^2 = \dfrac{k_1+k}{m_1}$; $\alpha_1 = \dfrac{k}{m_1}$; $\omega_2^2 = \dfrac{k_2+k}{m_2}$; $\alpha_2 = \dfrac{k}{m_2}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diag., $B = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \omega_1^2 \end{pmatrix}$ (couplage par élasticité) et $D = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 \end{pmatrix}$ diag.

<u>En effet : méthode de Lagrange</u>

$$\boxed{\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ U = \dfrac{1}{2}k_1 x_1^2 + \dfrac{1}{2}k_2 x_2^2 + \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ \phi = \dfrac{1}{2}h_1\dot{x}_1^2 + \dfrac{1}{2}h_2\dot{x}_2^2, Q_{dis,i} = -\dfrac{\partial\phi}{\partial\dot{x}_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = F_{01}\cos\omega t \; et \; F_2 = F_{02}\cos\omega t \\ L_{x_1} : \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} - Q_{dis,1} = F_1 \\ L_{x_2} : \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} - Q_{dis,2} = F_2 \end{cases} \Leftrightarrow (37)}$$

- (37) est l'équation du système formé par 2 oscillateurs amortis forcés, couplés par élasticité.

- On recherche des **solutions** complexes de la forme $\boxed{\begin{cases} x_1^{\;*} = x_{01}^* e^{i\omega t} \\ x_2^{\;*} = x_{02}^* e^{i\omega t} \end{cases} \quad et \begin{cases} F_1^* = F_{01} e^{i\omega t} \\ F_2^* = F_{02} e^{i\omega t} \end{cases}}$ **(38)** et

$x_{01}^{\;*}, x_{02}^{\;*}$ sont 2 **complexes et** on les prendras sous la forme $x^*{}_{01} = A_1 e^{i\varphi_1}$, $\quad x^*{}_{02} = A_2 e^{i\varphi_2}$.

- (38) dans (37)$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x_{01}^*(\omega_1^2 - \omega^2 + 2i\lambda_1\omega) - \alpha_1 x_{02}^* = \dfrac{F_{01}}{m_1} \\ x_{02}^*(\omega_2^2 - \omega^2 + 2i\lambda_2\omega) - \alpha_2 x_{01}^* = \dfrac{F_{02}}{m_2} \end{cases}}$ **(39)**

II.1. CAS OÙ $F_{02}=0$

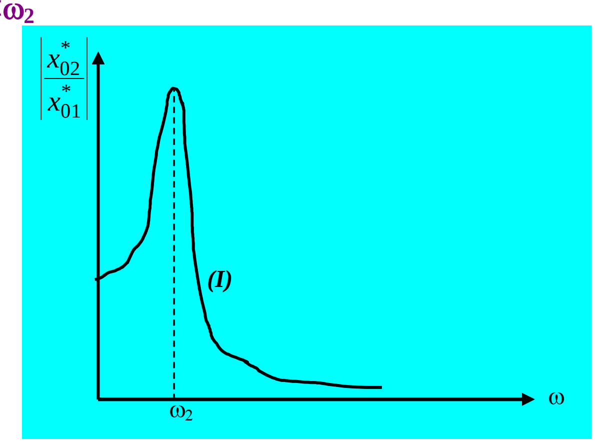
$F_{02}=0 \Rightarrow \quad \dfrac{x_{02}^*}{x_{01}^*} = \dfrac{\alpha_2}{(\omega_2^2 - \omega^2 + 2i\lambda_2\omega)}$, or $\boxed{\omega = \omega_2 \Rightarrow \dfrac{x_{02}^*}{x_{01}^*} = \dfrac{\alpha_2}{2i\lambda_2\omega_2} = -i\dfrac{\alpha_2}{2\lambda_2\omega_2}}$,

oscillation en quadrature de phase (ie les 2 parties vibrent en quadrature de phase).

$$\boxed{\left|\frac{x_{02}^*}{x_{01}^*}\right| = \frac{\alpha_2}{2\lambda_2\omega_2} = \frac{\alpha_2\omega_2}{2\lambda_2\omega^2{}_2} \; or \begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{k}{m_2} \\ \omega_2^2 = \dfrac{k+k_2}{m_2} \end{cases} \Rightarrow} \boxed{\left|\frac{x_{02}^*}{x_{01}^*}\right| = \frac{k}{k+k_2} \cdot \frac{\omega_2}{2\lambda_2} \cong \frac{\omega_2}{2\lambda_2} \; si \; k_2 \langle\langle k} \; \textbf{(40)}$$

II.2. CAS D'AMORTISSEMENT FAIBLE : $\lambda_2 << \omega_2$

- (40) $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{x_{02}^*}{x_{01}^*}\right| \rangle\rangle 1$: on a phénomène d'antirésonance : les 2 masses entrent en résonance mais l'amplitude de (2) est supérieur à celle de (1), cela est traduit par la courbe (I) qui admet un maximum si $\omega = \omega_2$ et l'amplitude est d'autant grand que l'amortissement est faible ie $\boldsymbol{\lambda_2 << \omega_2}$.



II.3. NOTATION MATRICIELLE

L'équation (37) s'écrit sous forme matricielle

$$\boxed{A\ddot{\bar{x}} + D\dot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{F} \Leftrightarrow A\ddot{\bar{x}}^* + D\dot{\bar{x}}^* + B\bar{x}^* = \bar{F}^* \Leftrightarrow \left(-\omega^2 A + i\omega D + B\right)\bar{x}_0^* = \bar{F}_0}.$$

Or $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^*$ *avec* $\bar{x} = \mathrm{Re}(\bar{x}^*)$, *on simplifie par* $e^{i\omega t}$, d'où on obtient finalement :

$\left(-\omega^2 A + i\omega D + B\right)\bar{x}_0^* = \bar{F}_0 \Leftrightarrow M.\bar{x}_0^* = \bar{F}_0$ avec $M = \left(-\omega^2 A + i\omega D + B\right)$

$\boxed{\bar{x}_0^* = M^{-1}.\bar{F}_0}$ **(41)**.

Remarque :

- *$\mathcal{M}^{-1}$ est la matrice de transfert* $M^{-1}=[t_{ij}]$ *où* ***t_{ij} fonction de transfert*** *de la partie (i) à la partie (j).*
- $M^{-1}=[t_{ij}]$ *c'est la matrice de transfert qui relie la force à l'amplitude.*
- $M^{-1}=[t_{ij}]$ *est symétrique (ie $t_{ij}=t_{ji}$) car $\mathcal{M}$ est symétrique puisque $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, et $\mathcal{D}$ sont symétriques.*

C- OSCILLATEURS À n D.D.L

I. OSCILLATEURS LIBRES NON AMORTIS

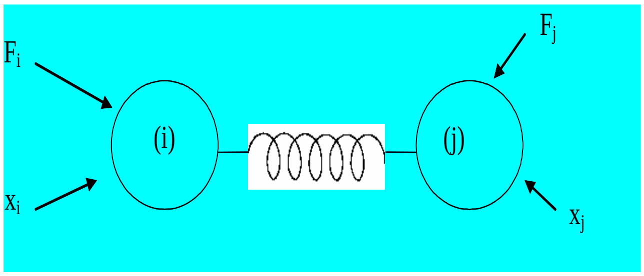
- Soit un système avec n coordonnées généralisées supposées indépendantes $\{q_i\}_{k=1\to n}$.
- Les équations du mouvement sont régit par l'équation $\boxed{A\ddot{\bar{x}}+B\bar{x}=\bar{0}}$ où $\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$.
- On aura donc n modes propres dont les fréquences propres sont déterminées par l'équation aux pulsations propres $\boxed{\det(B-\Omega^2 A)=0}$.
- Cette équation de n degrés admet n solution distincts et à chaque pulsation propre $\boxed{\Omega_k \to r_k(t)=a_k\cos(\Omega_k t+\varphi_k),\, r_{k\neq j}=0}$.
- Les vibrations $r_k(t)$ sont soient en phase, soient en opposition de phase.
- La solution générale est une combinaison linéaire de modes propres $\boxed{r(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k r_k}$.

II. OSCILLATEURS LIBRES NON AMORTIS MAIS FORCÉS

- Les équations du mouvement sont régit par l'équation $\boxed{A\ddot{\bar{x}}+B\bar{x}=\bar{F}}$ où $\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$.
- On recherche des **solutions** complexes de la forme $\boxed{\bar{x}^*=\bar{x}_0 e^{j\omega t}}$ et $x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n}$ sont des **constantes réelles**. Et remplaçons F par $\boxed{F^*=\bar{F}_0 e^{j\omega t}}$. Donc on recherche des solutions de la forme $\bar{x}=\mathrm{Re}(\bar{x}^*)=\bar{x}_0\cos\omega t$ **.**
- $(B-\omega^2 A)\bar{x}_0=\bar{F}_0=M.\bar{x}_0 \Rightarrow \bar{x}_0=M^{-1}.\bar{F}_0$
- $M^{-1}=[t_{ij}]$ **:** matrice de transfert qui relie la force au déplacement.
- t_{ij} fonction de répercussion d'une force (i) qui agit sur l'oscillateur (j), tq $x_{0j}=t_{ij}F_i$.

- $t_{ij}=\dfrac{x_j}{F_i}$ vibration induite par F_i au niveau de l'élément (j).

- $t_{ii}=\dfrac{x_i}{F_i}$ réponse de l'élément (i) à une excitation (i). Si $F_i=F_j$ alors $x_i=x_j$



III. OSCILLATEURS LIBRES ET AMORTIS

- Soit un système avec n coordonnés généralisés supposés indépendantes $\{q_i\}_{k=1\to n}$.
- Les équations du mouvement sont régit par l'équation $\boxed{A\ddot{\bar{x}} + D\dot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{0}}$ où $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$.
- La solution sera recherchée sous la forme $\boxed{\bar{x}^* = \bar{x}_0^{\,*} e^{st}}$ où s est une racine complexe de $\boxed{\det(s^2 A + sD + B) = 0}$. Où $\bar{x}_0^* = (E, F, \cdots, Z)$ tel que E….Z sont des réels complexes.
- En général, on a n modes propres qui sont des mouvements sinusoïdaux amortis..
- Les vibrations $x_k(t)$ sont soient en phase, soient en opposition de phase.
- La solution générale est une combinaison linéaire de modes propres $\boxed{\operatorname{Re}(\bar{x}^*) = \bar{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_{0k} e^{s_k t}}$.
- Cas de dégénérescence : si s_k est une racine multiple d'ordre m alors $\boxed{\bar{x}_k(t) = Q(t)\left(\bar{x}_{0k} e^{s_k t}\right)}$ où $Q(t)$ polynôme de degré ≤m-1.

IV. OSCILLATEURS LIBRES AMORTIS ET FORCÉS

- Les équations du mouvement sont régit par l'équation $\boxed{A\ddot{\bar{x}} + D\dot{\bar{x}} + B\bar{x} = \bar{F}}$ où $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$.
- La solution sera recherchée sous la forme $\boxed{\begin{cases} \bar{x}^* = \bar{x}_0^* e^{i\omega t} \\ \bar{F}^* = \bar{F}_0 e^{i\omega t} \end{cases} \quad où\ \bar{x} = \operatorname{Re}(\bar{x}^*)}$ et $\boxed{\bar{x}_{0j}^* = A_j e^{i\varphi_i}}$
- $\boxed{\left(-\omega^2 A + i\omega D + B\right)\bar{x}_0^* = \bar{F}_0 \Leftrightarrow M.\bar{x}_0^* = \bar{F}_0 \ avec\ M = \left(-\omega^2 A + i\omega D + B\right)}$
- $M^{-1} = \left[t_{ij}\right]$ **:** matrice de transfert qui relie la force au déplacement.

- Si on applique une force F_i sur m_i l'effet se propage à j par la fonction de transfert t_{ij} et inversement : *<u>théorème de réciprocité.</u>*

- Si F_i=F_j alors x_i=x_j : ceci se généralise au cas où F est une force périodique qlq. On fait décomposition en série de Fourrier. Le théorème reste valable pour n'importe quelle force.