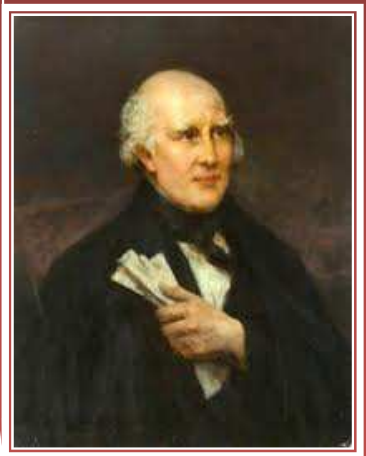
MECANIQUE ANALYTIQUE
SMP5

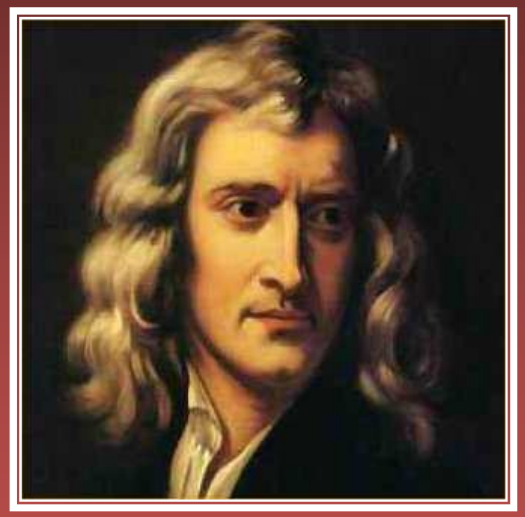


Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 département de physique
Faculté des sciences
Agadir
email: r.mesrar@uiz.ac.ma

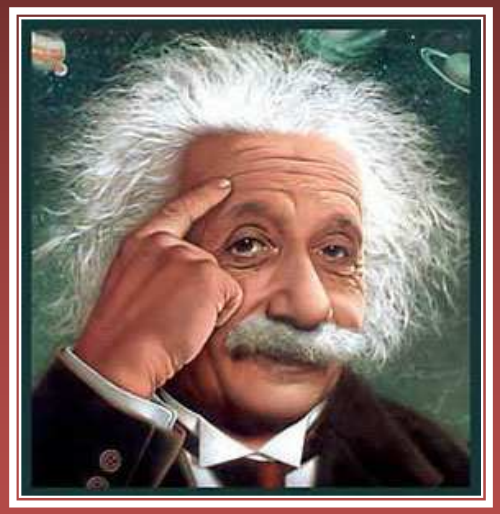
MECANIQUE ANALYTIQUE

MECANICIENS CELEBRES



I. Newton (1643-1727)
Anglais

J.L.Lagrange (1736-1813)
Franco-italien



A. Einstein (1879-1955)
Allemand

A PROPOS DU COURS

1er support : cours polycopié

2è support : cours diapositives

A acheter (chez al maarifa)

Amphi

Cours dispensé durant le semestre

A PROPOS DES TD

☞ **Fascicule**

« Les dossiers pédagogiques de la mécanique analytique »

Ce fascicule comporte un résumé de cours, les formules à retenir, des applications pédagogiques et les travaux dirigés de l'année.

☞ **A acheter (chez Al maarifa)**

PROGRAMME

CHAPITRE 1: FORMALISME LAGRANGIEN
Equations d'Euler-Lagrange (EEL)

CHAPITRE 2: PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES
Equations de Lagrange simples (ELS)
Equations de Lagrange avec multiplicateurs (ELM)

CHAPITRE 3: INTEGRALES PREMIERES

CHAPITRE 4: EQUILIBRE ET STABILITE

CHAPITRE 5: FORMALISME HAMILTONIEN
Equations canoniques de Hamilton

CHAPITRE 6: VIBRATIONS

CHAPITRE 1: FORMALISME LAGRANGIEN

Objectifs pédagogiques

- Introduire la notion d'action
- Comprendre le principe de moindre action
- Etablir les équations d'Euler-Lagrange
- Etudier les propriétés physiques du lagrangien

Notions abordées

- Coordonnées généralisées
- Espace de configuration
- Vitesse généralisée
- Lagrangien ou fonction de Lagrange
- Action
- Principe de moindre action (PMA)

Notions abordées - suite

- Propriétés physiques du lagrangien
- Variable cyclique
- Intégrale première du mouvement
- Théorème de Noether
- Impulsion généralisée

CHAPITRE 1: FORMALISME LAGRANGIEN

PLAN DU CHAPITRE 1

1- Coordonnées généralisées
2- Espace de configuration
3- Lagrangien d'un système
4- Calcul variationnel
5- Action - Principe de moindre action
6- Equations d'Euler-Lagrange
7- Propriétés physiques du Lagrangien
8- Symétries et lois de conservation

§-1-

Notions de base

- Coordonnées généralisées
- Vitesses généralisées
- Degrés de liberté
- Equations de liaison
- Espace de configuration
- Lagrangien d'un système

☞

« Ces notions représentent la pierre angulaire du formalisme lagrangien. D'où l'intérêt de les bien assimiler »

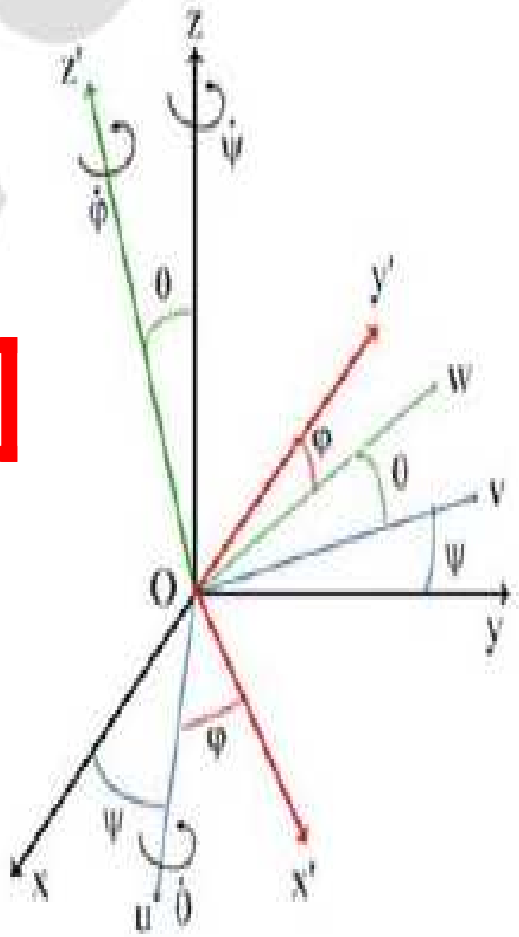
§-1-1

Coordonnées généralisées
Degrés de liberté d'un système

Définition : Les coordonnées Généralisées sont l'ensemble de variables réelles **indépendantes ou liées** permettant de décrire et configurer tous les éléments du système à tout instant t.

Par exemples :

- un point matériel libre dans l'espace peut être déterminé par 3 coordonnées généralisées (x, y, z);
- un corps solide peut être déterminé par 6 coord. génér. :
  - 03 coordonnées relatives au centre de gravité;
  - 03 coordonnées liées aux angles d'Euler (φ, ψ, θ).
- Les coordonnées généralisées d'un système de P points matériels et Q corps solides sont défini par $\boxed{N = 3P + 6Q}$



On note :

Les coordonnées généralisées : $q_1(t), q_2(t), \dots\dots\dots q_N(t)$.

Les vitesses généralisées : $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots\dots\dots \dot{q}_N(t)$.

N.B

En mécanique analytique, on ne fait pas de distinction entre les <u>coordonnées de position</u> ((x, y, z) pour un point matériel) et les coordonnées d'orientation ((ψ, θ, φ) pour un solide).
On utilise une notation identique pour les deux types de coordonnées, c'est-à-dire, on généralise et on note:

$$(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

où N est le nombre de coordonnées généralisées.

I.2.2 Degré de liberté

Définition : Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant : $d = N$

Où, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles : $\boxed{d = N - r}$

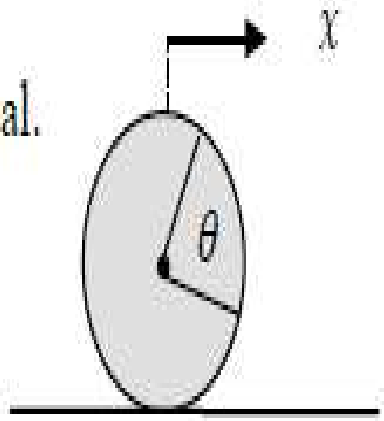
d: Degré de liberté ;

N : Nombre de coordonnées généralisées

r : Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles.

Exemples :

- Un disque de masse m et de rayon r, roule sans glisser sur un plan horizontal.



Ici on a deux coordonnées généralisées x et θ donc $N = 2$.

x et θ sont liées avec une relation: $x = r\theta$ donc : $r = 1$.

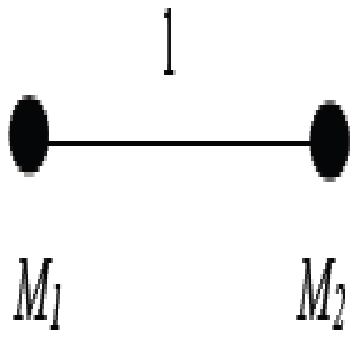
Le nombre de degrés de liberté $d = N - r = 1$.

§-1-2

Quelques exemples classiques

- Un système mécanique constitué de 02 points matériels M_1 et M_2 reliés d'une tige de longueur l.

$$\left.\begin{array}{l} M_1(x_1, y_1, z_1) : 3 \\ M_2(x_2, y_2, z_2) : 3 \end{array}\right\} \Rightarrow N = 6$$



L'équation de liaison : $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = c^{te}$

$$\Rightarrow r = 1 \Rightarrow d = 5$$

Nddl = N-r = 6 – 1 = 5

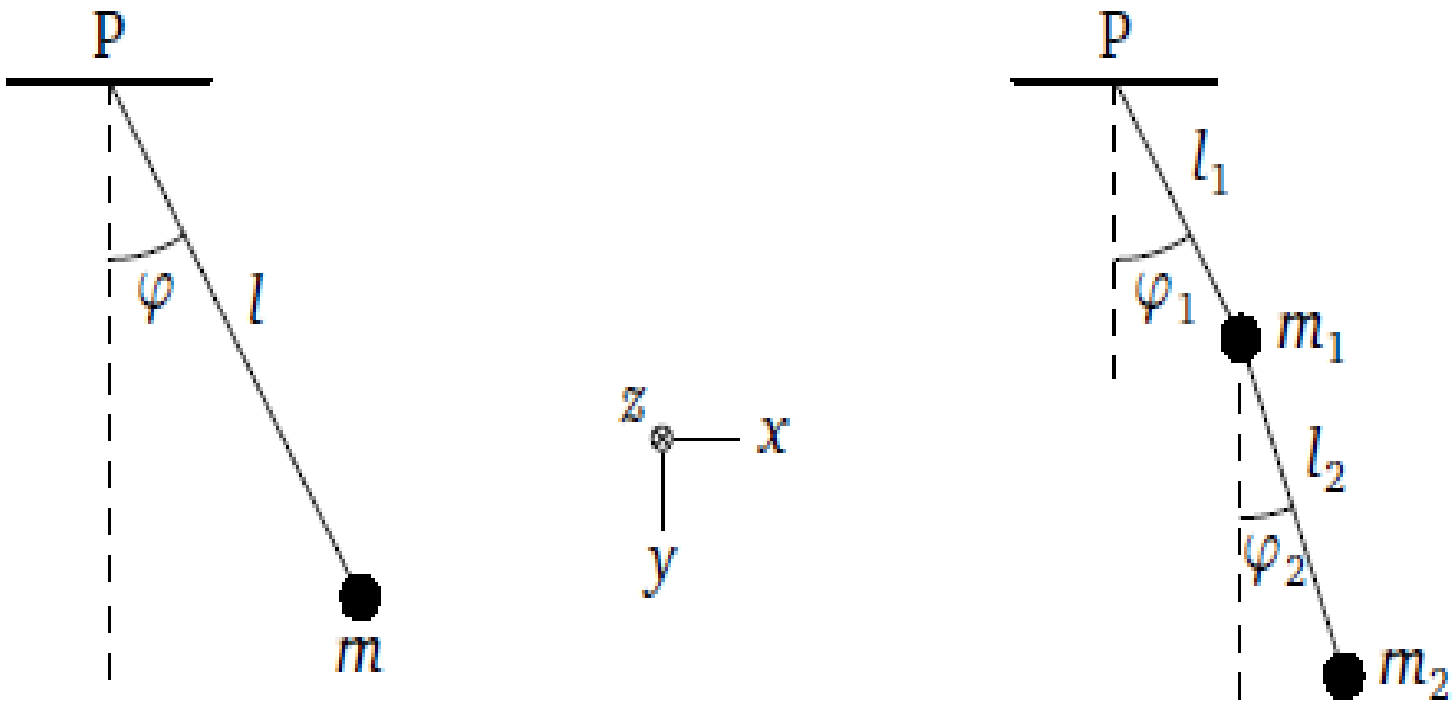


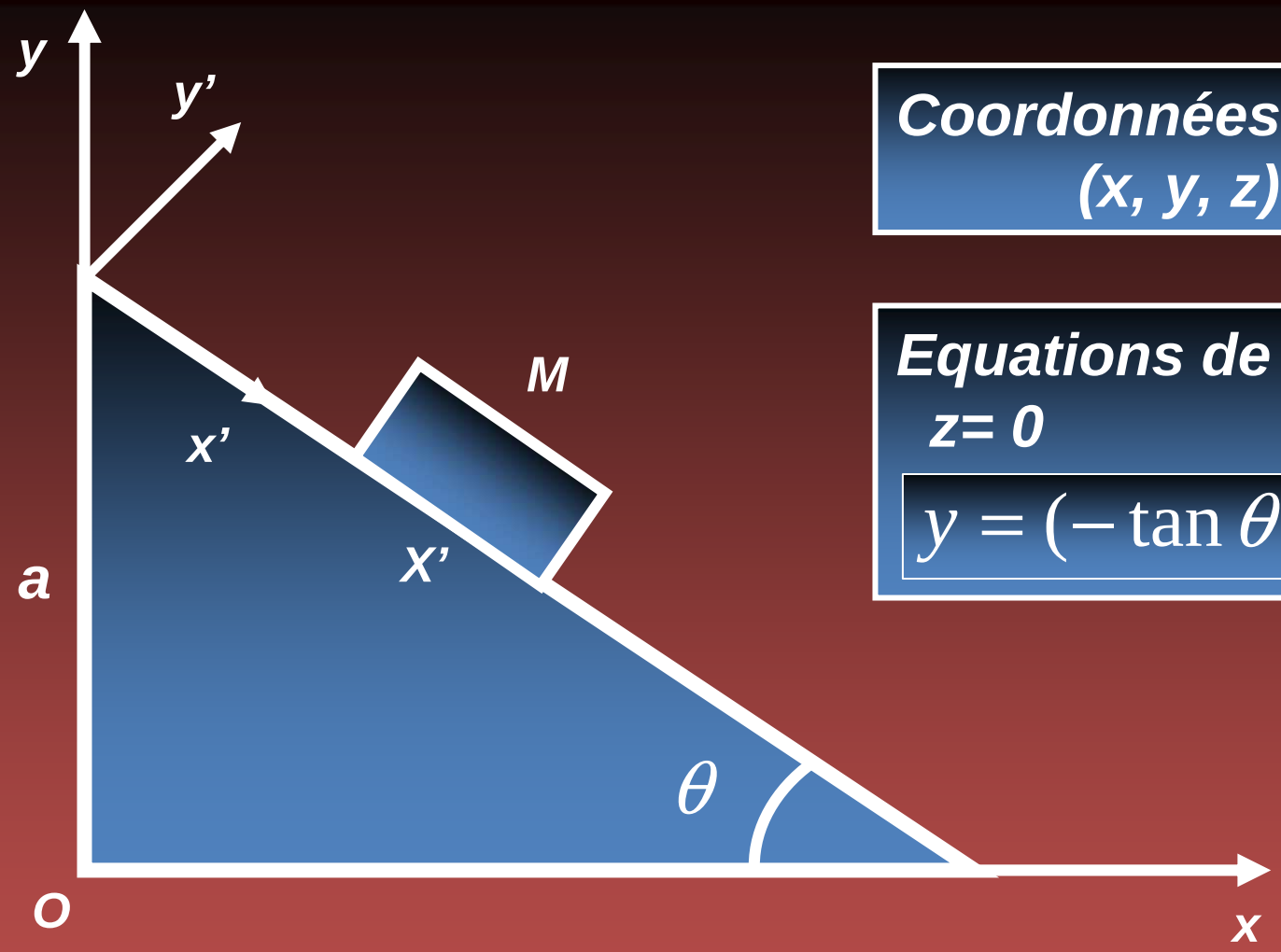
FIGURE 1.1 Le pendule simple (à gauche) et le pendule double (à droite).

$$q = \varphi$$

Nddl = 3 – 2 = 1

Nddl = 6 – 4 = 2

$$q_1 = \varphi_1 \ , \ q_2 = \varphi_2$$



Coordonnées physiques
(x, y, z)

Equations de liaison
z= 0

$$y = (-\tan\theta)x + a$$

Nombre de de degré de liberté
3 - 2 = 1

Coordonnée généralisée
q = x'

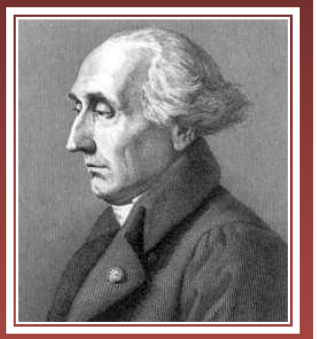
Espace de configuration

Un système matériel est repéré par les N coordonnées généralisées <u>indépendantes</u> (q_1, q_2,..., q_N). Ces coordonnées déterminent la position du système matériel dans un espace vectoriel de dimension N appelé <u>espace de configuration</u>. Chaque position du système est représenté par un point P (q_1, q_2,..., q_N).

Lagrangien d'un système

L' élément central du formalisme lagrangien est la fonction de Lagrange notée L et définie par :

$$L = T - V$$



Lagrangien — **Energie cinétique** — **Energie potentielle**

Pour la petite histoire Lagrange notait : Z = T - V

Attention

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Les $q_i, \dot{q}_i$ et le temps t sont des <u>variables indépendantes</u>.

Le lagrangien est une fonction d'état

$$\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}_i, t} \quad et \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right|_{q_i, t}$$

N.B.

Pour pouvoir déterminer le lagrangien d'un système mécanique quel qu'il soit , Il est impératif de maitriser le calcul de l'énergie cinétique et celui de l'énergie potentielle.

Faisons le point sur ces deux grandeurs ô combien importantes en mécanique analytique.

1

Energie cinétique

Définition et calcul de l'énergie cinétique d'un solide

- L'énergie cinétique s'exprime en Joules (J=W.s). Elle est définie par :

$$T_{\left(S/R_g\right)} = \frac{1}{2}\iiint_S \vec{V}^2\left(M\in S/R_g\right)\rho dV$$

- Elle se calcule par la formule suivante :
  - Si A est un point quelconque de S

$$T_{\left(S/R_g\right)} = \frac{1}{2}M\vec{V}^2\left(A\in S/R_g\right) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(S/R_g\right).\left[J_A(S)\right]\vec{\Omega}\left(S/R_g\right) + M\vec{V}\left(A\in S/R_g\right).\left(\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)\wedge\overrightarrow{AG}\right)$$

  - Si G est le centre d'inertie de S

$$T_{\left(S/R_g\right)} = \frac{1}{2}M\vec{V}^2\left(G\in S/R_g\right) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(S/R_g\right).\left[J_G(S)\right]\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)$$

  - Si O est un point « fixe » de S dans R_g

$$T_{\left(S/R_g\right)} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(S/R_g\right).\left[J_O(S)\right]\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)$$

Démonstration

- On obtient la relation utile de la planche précédente en développant la vitesse de M dans l'intégrale :

$$2T_{\left(S/R_g\right)} = \iiint_S \vec{V}^2\left(M\in S/R_g\right)\rho dV = \iiint_S \left(\vec{V}\left(A\in S/R_g\right) + \vec{\Omega}\left(S/R_g\right)\wedge\overrightarrow{AM}\right)^2 \rho dV$$

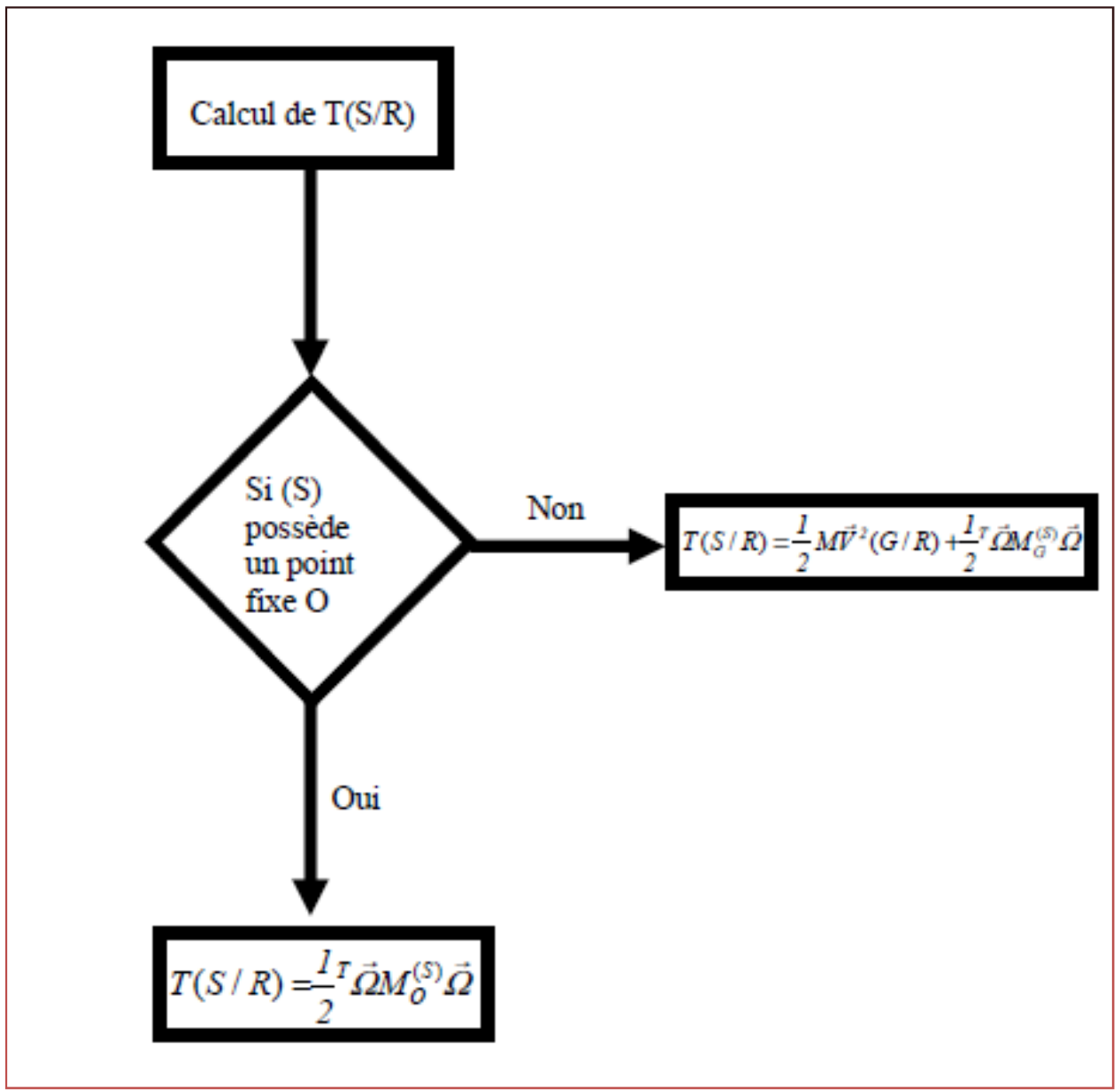
$$= \iiint_S \left\{\vec{V}^2\left(A\in S/R_g\right) + 2\vec{V}\left(A\in S/R_g\right).\left(\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)\wedge\overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)\wedge\overrightarrow{AM}\right)^2\right\}\rho dV$$

$$= M\vec{V}^2\left(A\in S/R_g\right) + 2M\vec{V}\left(A\in S/R_g\right).\left(\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)\wedge\overrightarrow{AM}\right) + \vec{\Omega}\left(S/R_g\right).\underbrace{\iiint_S \overrightarrow{AM}\wedge\left(\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)\wedge\overrightarrow{AM}\right)\rho dV}_{[J_A(S)]\vec{\Omega}\left(S/R_g\right)}$$

- Les 2 premiers termes ne dépendent pas de M et sont donc simplement multipliés par la masse
- Le 3ème terme nécessite une permutation circulaire sur les termes du produit mixte et fait apparaitre l'opérateur d'inertie $[J_A(S)]$ (*voir cours de L2*)

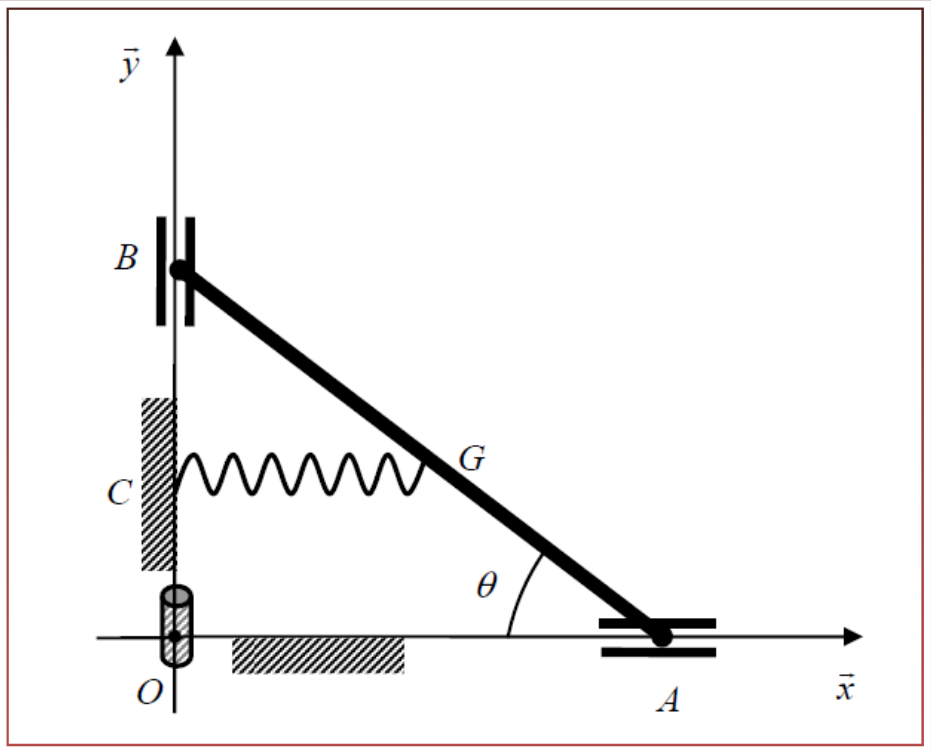
Pour les 2 cas particuliers il suffit de prendre A=G ou A=O et certains termes disparaissent logiquement

Organigramme de calcul de l'énergie cinétique



Exemple 1: session de rattrapage de mars 2015

Barre de longueur 2a, de masse m et de centre d'inertie G



$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{V}(G/R) = \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$$T(AB/R) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\theta}^2$$

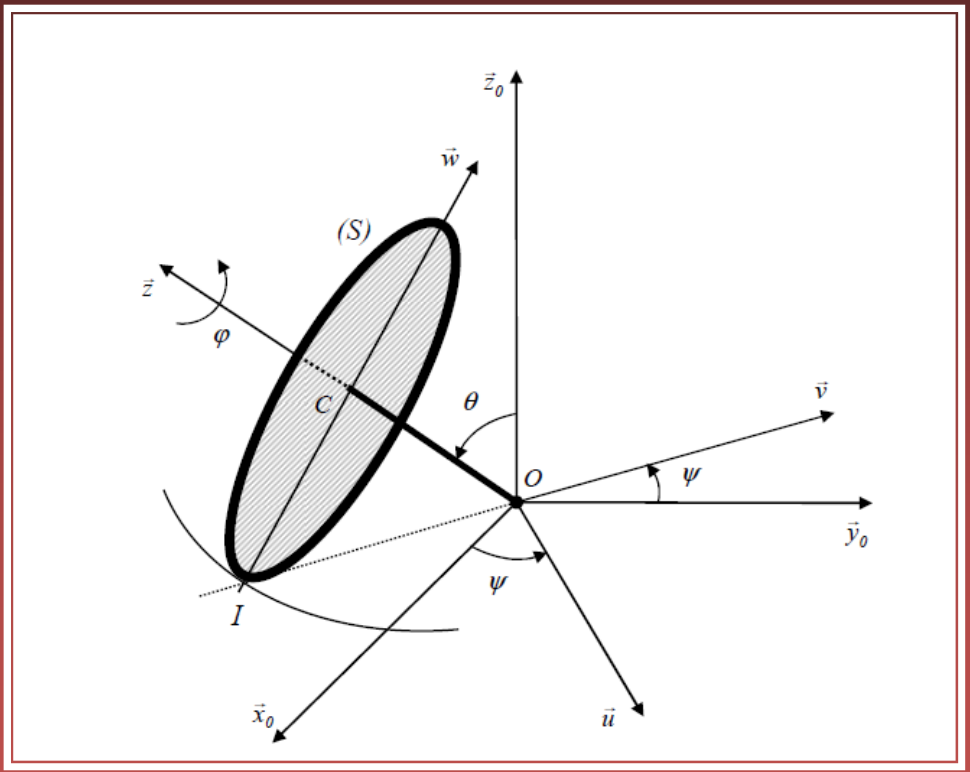
$$avec\ I_{Gz} = \int_{P\in(AB)} r^2 dm = \lambda\int_{-a}^{+a} r^2 dr = \lambda\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{m}{2a}\times 2\times\frac{a^3}{3} = \frac{ma^2}{3}$$

D'où :

$$T(AB/R) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$

Calcul effectué en G car le solide n'admet pas de point fixe.

Exemple 2: un ancien examen de mécanique du solide (Janvier 2012)



$$Au\ cours\ du\ mouvement,\ on\ a\ toujours\ \tan\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \theta = Arc\tan\left(\frac{l}{r}\right) = Cte$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}{}^{T}\vec{\Omega}(S/R_0)M_O^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$= \frac{A}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \frac{C}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$$

Calcul effectué en O qui est un point fixe.

2

Energie potentielle

Définition et calcul de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle mécanique est une énergie qui est échangée par un corps lorsqu'il se déplace tout en étant soumis à une force conservative.
Elle est exprimée en joules (c'est-à-dire en newton mètre).
Cette énergie potentielle, définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace. Cette énergie est appelée potentielle car elle peut être emmagasinée par un corps et peut ensuite être transformée par exemple en énergie cinétique lorsque le corps est mis en mouvement.
De manière plus précise, la variation d'énergie potentielle d'un corps lorsqu'il se déplace entre deux points est l'opposé du travail fourni par la force à laquelle il est soumis entre ces deux points. Ainsi le travail d'une force conservative vérifie la relation:

$$dW = -dV$$

Chaque force conservative donne naissance à une énergie potentielle. On peut ainsi distinguer :

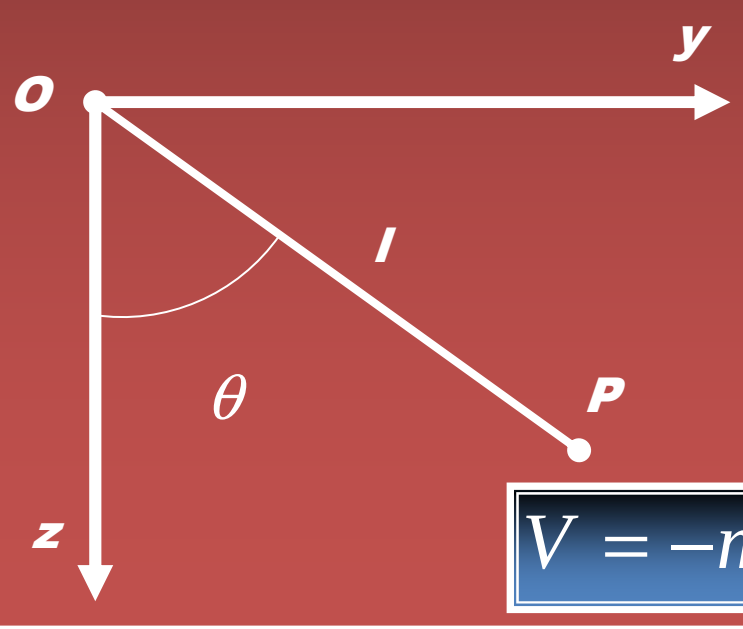
- **Énergie potentielle de pesanteur,**
- **Énergie potentielle gravitationnelle,**
- **Énergie potentielle élastique,**
- **Énergie potentielle électrostatique,**
- **Énergie potentielle magnétique,**
- **Énergie potentielle de pression**

1- Calcul de l'énergie potentielle de pesanteur

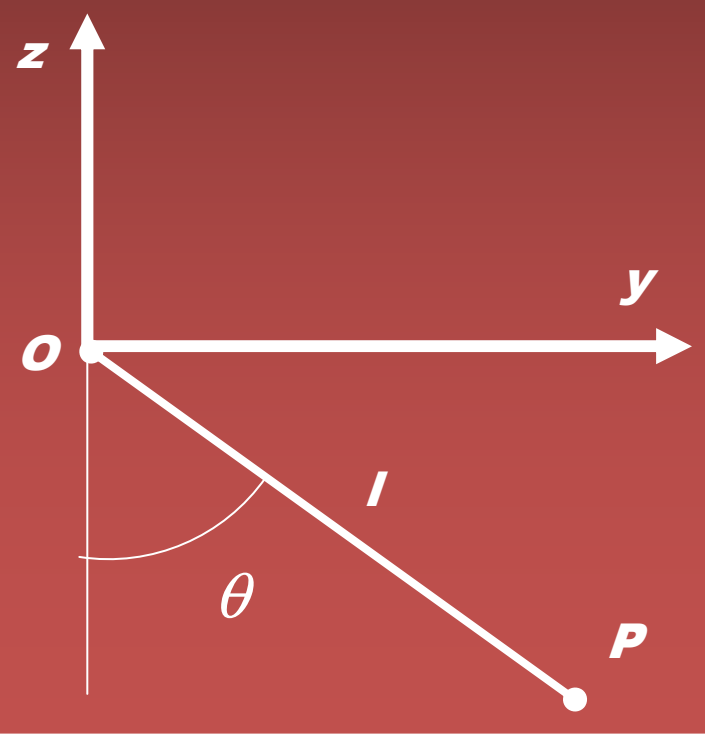
$$V_{pes} = \pm mgz + cte$$

$$= \begin{cases} +mgz \ \ si \ \ l'axe \ \ de \ \ projection \ \ est \ \ ascendant \uparrow \\ -mgz \ \ si \ \ l'axe \ \ de \ \ projection \ \ est \ \ descendant \downarrow \end{cases}$$

Exemple



$$V = -mgl\cos\theta$$

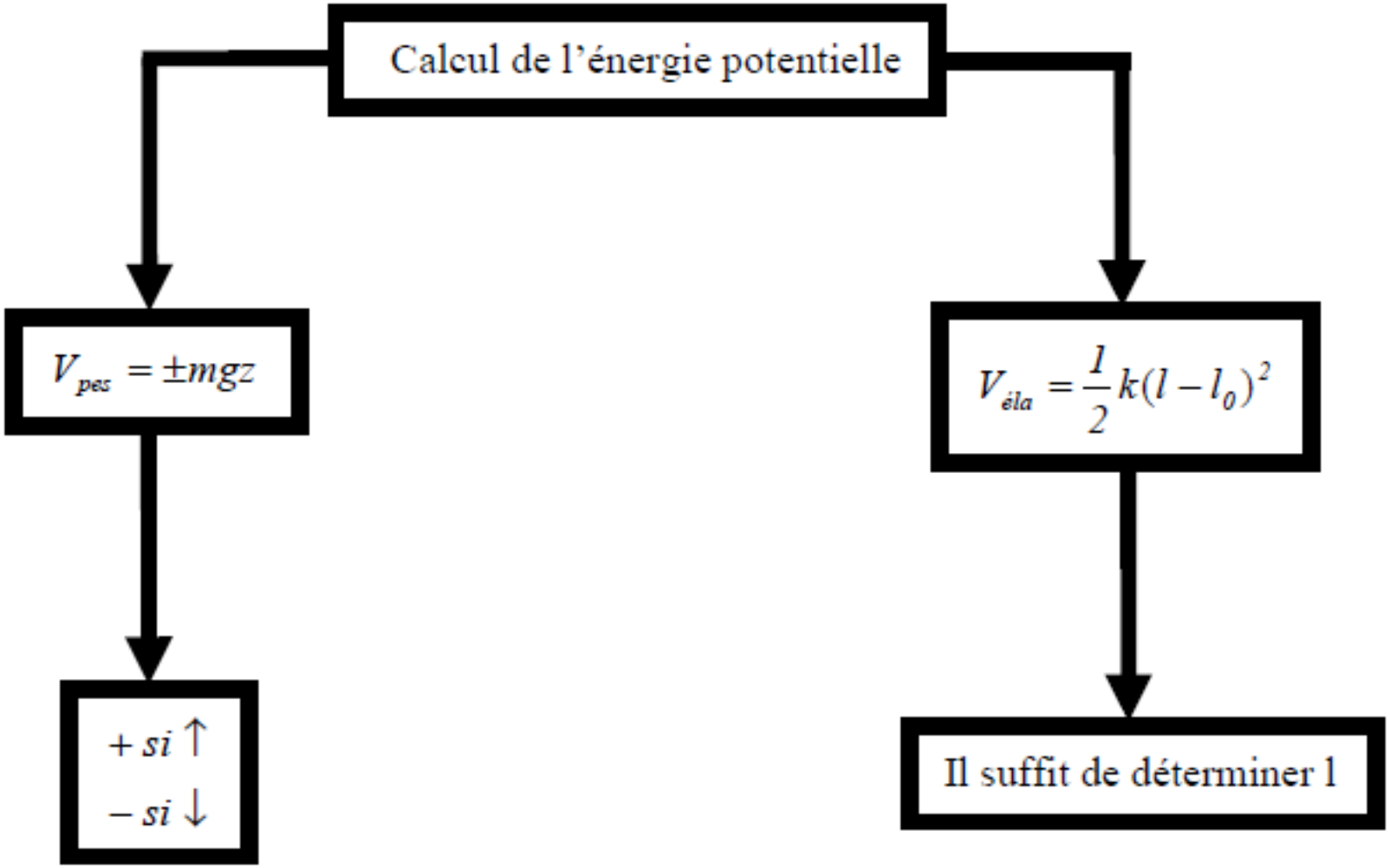


2- Calcul de l'énergie potentielle élastique

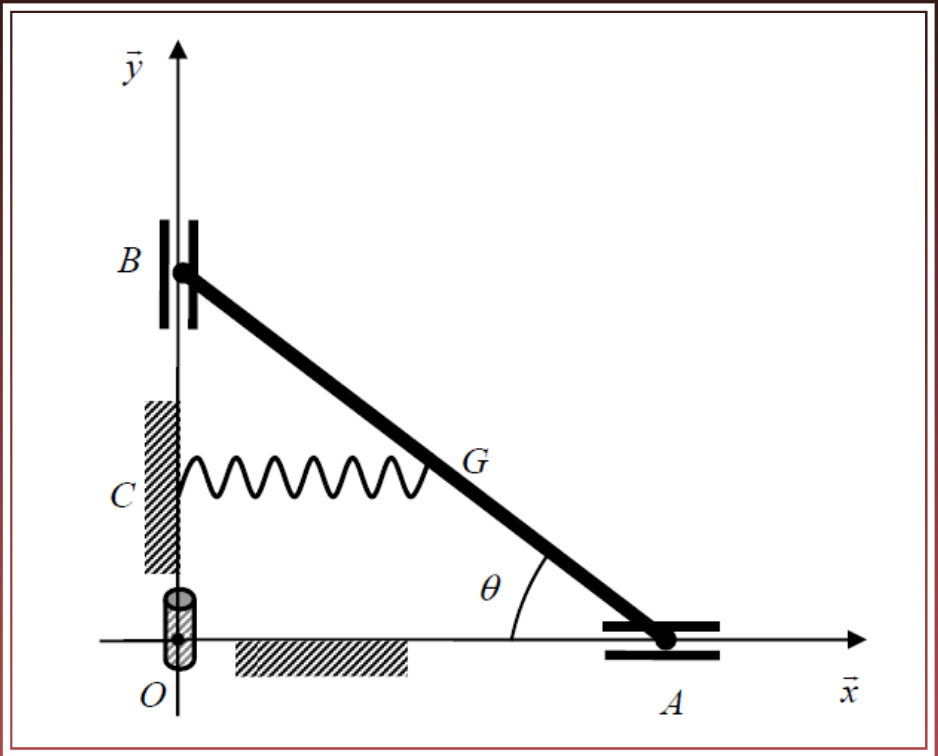
$$V_{éla} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte$$

Pour calculer l'énergie cinétique élastique, il suffit de déterminer la longueur l du ressort à un instant t donné.

Organigramme de calcul de l'énergie potentielle



Exemple: session de rattrapage de mars 2015



$$V = Vpes + Vél \qquad avec\ V_{pes} = mgy = mga\sin\theta\ et\ V_{él} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2\ où\ l = a\cos\theta$$

D'où :

$$\boxed{V = mga\sin\theta + \frac{1}{2}k(a\cos\theta - l_0)^2}$$

Remarque importante concernant la constante

L'énergie potentielle est définie à une constante additive près. Celle-ci n'a aucune influence sur les résultats puisque l'énergie potentielle est utilisée dans des opérations de dérivation (calcul d'une force conservative) ou de variation (calcul d'un travail). Ces deux opérations faisant disparaître la constante, le choix de cette dernière est donc purement arbitraire et sa détermination se fait généralement de façon à simplifier les calculs.

N.B.
En mécanique analytique, on ne se préoccupe pas de la constante sauf mention contraire.

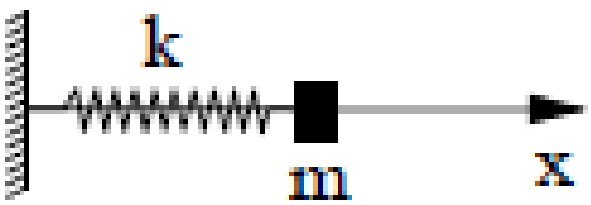
§-1-3

Lagrangien de quelques systèmes simples

a- Cas d'un oscillateur harmonique unidimensionnel

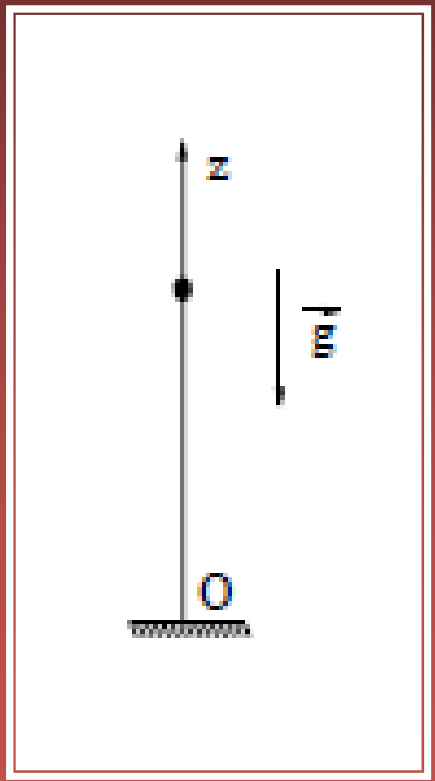
La coordonnée généralisée est q = x . Le lagrangien correspondant est

$$\boxed{\mathcal{L}(\dot{x}, x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2}$$



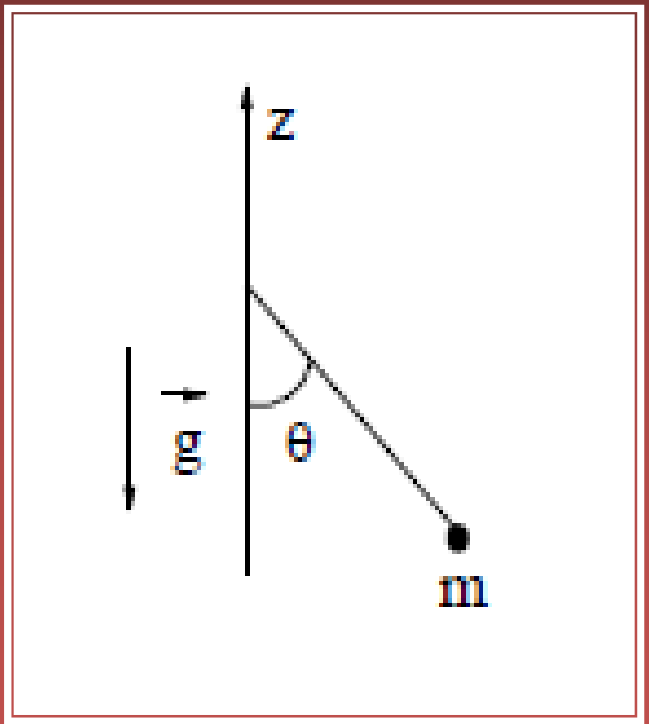
b- Particule en chute libre

La coordonnée généralisée est $q = z \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\dot{z}, z) = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - mgz}$



c- Pendule simple

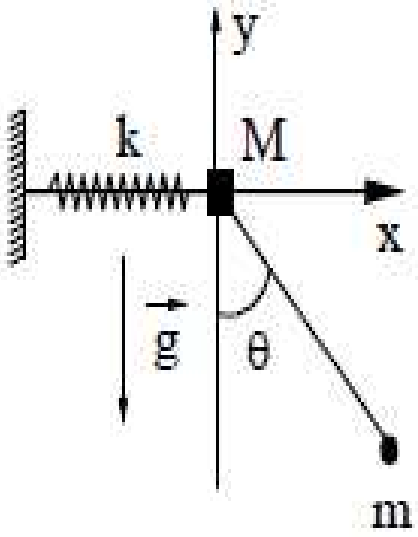
La coordonnée généralisée est $q = \theta \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\dot{\theta},\theta) = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta}$



d- Association de l'oscillateur et du pendule

Les coordonnées généralisées sont $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}(\dot{x},\dot{\theta},x,\theta) = \underbrace{\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}\ell\cos\theta}_{E_c} \underbrace{- \frac{1}{2}kx^2 + mg\ell\cos\theta}_{E_p}}$$



§-2-

Calcul variationnel
Equation d'Euler

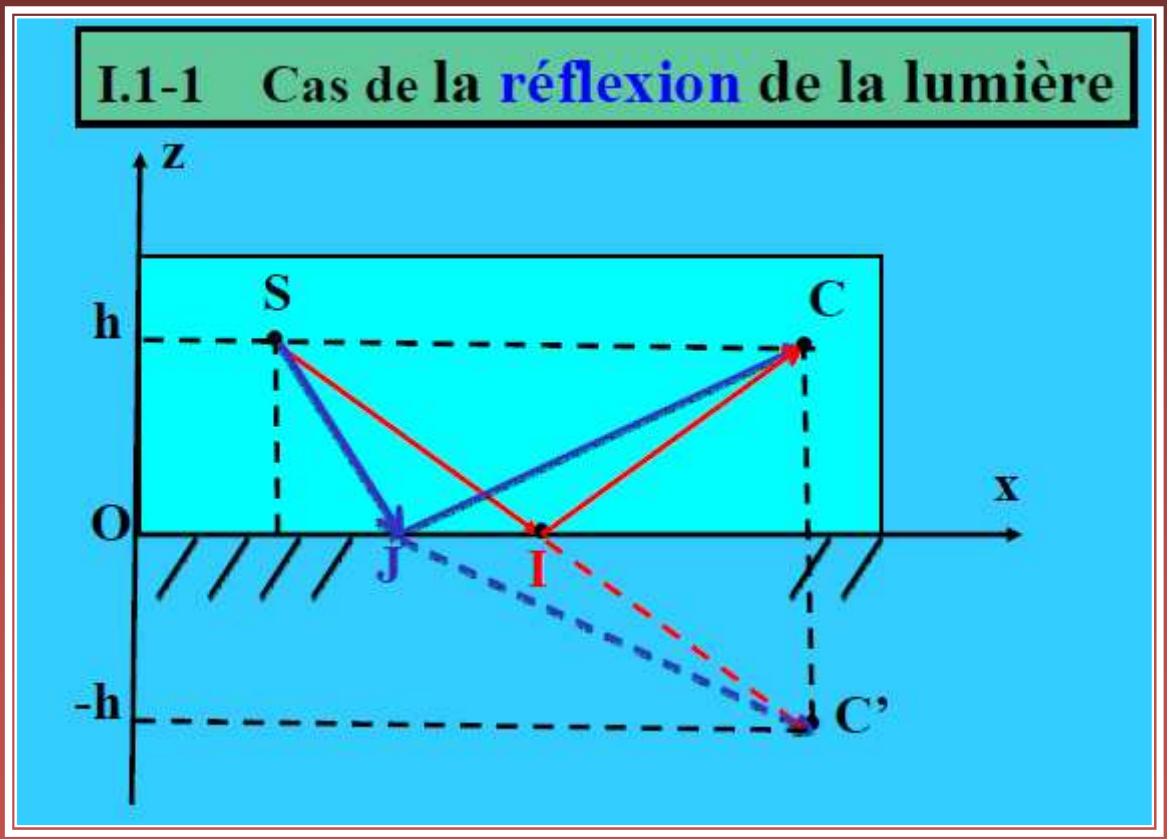
§-2-1

Introduction

Les principes variationnels permettent de considérer l'évolution des phénomènes naturels comme <u>des problèmes d'optimisation.</u>

<u>Exemple: principe de Fermat (1606-1665)</u>

Fermat a étudié l'optimisation du chemin optique emprunté par un rayon lumineux.



Le chemin réel SIC = SIC' est le plus court et qui correspond à une durée minimale.

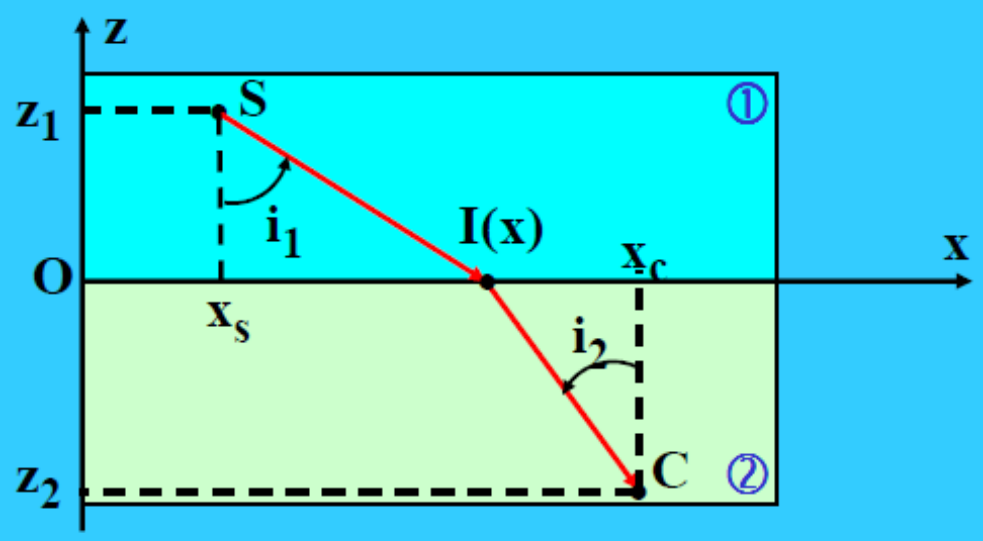
Résultat: L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

☞ Loi de Snell-Descartes [Mathématicien, Physicien et Philosophe français : 1596-1650] pour la réflexion.

$$\sin(i) = \sin(r)$$

I.1-2 Cas de la réfraction de la lumière

Ce problème n'a été résolu par Fermat que vers la fin de 1661 (25 années après) [de 1637 à 1661].



Fermat proposa de chercher l'optimum de la durée du trajet* SIC:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

I.1.3 Enoncé du principe de Fermat

la nature agit toujours selon les voies les plus courtes.

Ce principe quasi-phylosophique est appelé:

principe de moindre temps

ou **principe d'économie naturelle**

ou **Principe du meilleur**

§-2-2

Calcul variationnel

Principes variationnels

$$\boxed{I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx}$$

Pb: On veut trouver la fonction ***y(x)*** qui minimise (ou maximise) l'intégrale *I* où les extrémités sont fixes. *I* est une **fonctionnelle** !

Problèmes typiques:

- Mirages → minimise le temps de parcours de la lumière
- Corde pesante → minimise l'énergie potentielle de pesanteur
- Films de savon → minimise l'énergie potentielle de surface
- Brachistochrone → minimise le temps de parcours dans le champ de pesanteur
- Géodésiques → minimise la distance entre deux points sur une surface

Principes variationnels

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale

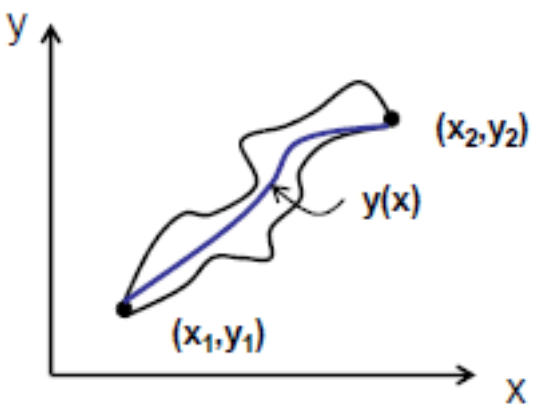
$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx$$

soit stationnaire avec les conditions $y(x_1)=y_1$ et $y(x_2)=y_2$ est que l'équation différentielle dite d'**Euler**

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0}$$

Equation d'Euler

soit satisfaite.



L'inconnue est une fonction !

Démonstration

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \dot{y})dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x, y, \dot{y})dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right] dx$$

(Commutativité de delta avec l'intégration)

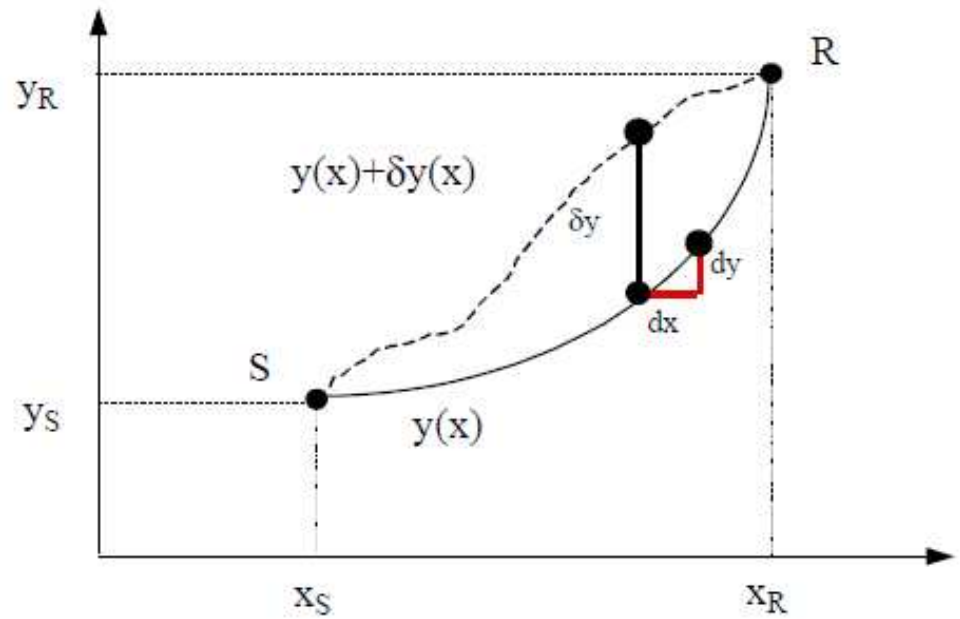
$$\delta \dot{y} = \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

(Commutativité de delta avec la dérivation)

$$\Rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta y \right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \right] dx + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta y \right]_{x_1}^{x_2}$$

Faites bien attention à faire la distinction entre dy et $\delta(y)$: dy est une variation de y = y(x) due à une variation de x, tandis que $\delta(y)$ est une variation de y au sens où l'on change de fonction: on passe de y(x) à (y + δy)(x) pour toutes les valeurs de x: cette opération sur y se fait à <u>x constant</u> (voir figure).



y(x) est un chemin possible entre S et R. y(x) + δy(x) en est un autre infiniment voisin. Tous ces chemins passent par les points S et R.

$$or \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad car \quad \delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \delta I = \left\{\left[\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right]dx\right]\right\}\delta y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \quad CQFD$$

Principes variationnels

Généralisation à plusieurs variables

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, y_2, ..., y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n, x)\, dx$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_k} = 0 \quad k = 1, 2, ..., n}$$

Système d'équations différentielles couplées du deuxième ordre en y

Equation d'Euler généralisée (présence de $\ddot{y}$)

Remarque importante

Supposons qu'on fait le choix des variables suivant:

$$\begin{cases} x \rightarrow t \\ y = y(x) \rightarrow q = q(t) \\ \dot{y} = \dot{y}(x) \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(t) \end{cases} \Rightarrow f(y_i, \dot{y}_i, x) = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

alors, la fonctionnelle I devient:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_i, \dot{y}_i, x) \Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

La nouvelle grandeur notée « S » est appelée « <u>action</u> » ou « action hamiltonienne ». Dans ce cas l'équation d'Euler s'écrit:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

Ces équations sont appelées <u>les équations d'Euler-Lagrange</u>

Principes variationnels

Propriétés:

équation différentielle du second ordre

- $$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}}\dot{y} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2}\ddot{y} = 0}$$

Formule de **Beltrami**

- Si *f* ne dépend pas explicitement de x → $$\boxed{\exists\, k \;/\; f - \dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = k}$$

$$f(y, \dot{y}, \cancel{x})$$

(1835-1900)

Démonstration de la formule de Beltrami

Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}] &= \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial f}{\partial y'} - y'[\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''] \\ &= y'[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''].\end{aligned}$$

D'après l'équation d'Euler, le terme entre crochets est nul, ce qui démontre la formule.

Remarque

La relation de Beltrami va être utiliser lorsque nous aborderons le chapitre 3 sur les intégrales premières, en particulier lorsque nous étudierons l'intégrale première de Jacobi.

§-2-3

2 exemples classiques

1

Distance minimale entre deux points sur un plan.
Géodésique

Applications du principe variationnel

Distance minimale entre deux points sur un plan

Le problème est de détérminer la distance minimale entre deux points A et B dans un plan.

$\rightarrow$ la quantité à minimiser : la distance entre les deux points $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$\rightarrow$ Minimiser la fonctionnelle

$$S = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{et} \quad \boxed{L(y') = \sqrt{1 + y'^2}}$$

y est cyclique ce qui implique

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'} = p_y = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}}$$

est constant ce qui implique $y' = dy/dx$ est constant et donc $y = f(x)$ est une droite.

La distance minimale est la longueur du segment droit qui sépare les points A et B.

2

Exemple historique
La brachistochrone

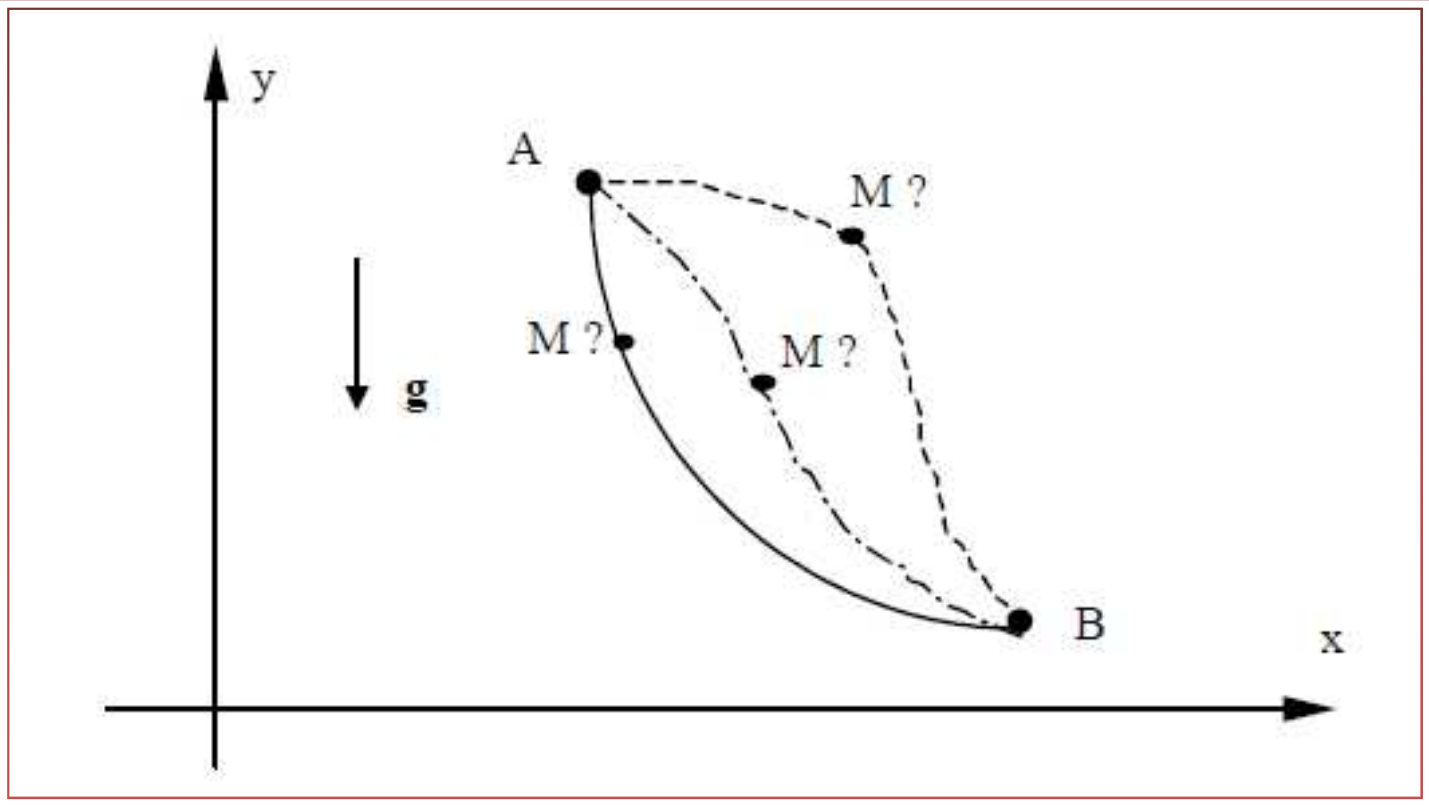
Un peu d' étymologie et d' histoire

Le mot *brachistochrone* vient du grec *brakhistos* « le plus court » et s'écrit avec un i et non un y, et de *chronos* « temps ».

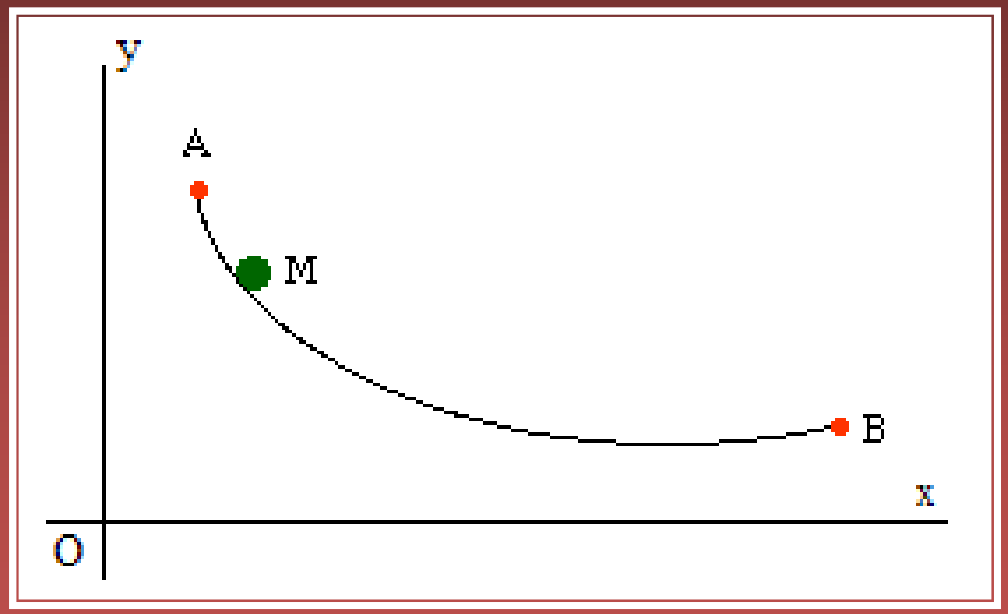
✣ ✣ ✣

Elle fut étudiée et nommée ainsi par Jean Bernoulli en 1718 et Euler en 1736.

En juin 1696, **Jean Bernoulli** (1667-1748) posa la question suivante au monde scientifique de son époque ‡ : étant donnés deux points *A* et *B* situés dans un plan vertical, quelle doit être la trajectoire d'un point matériel M pour que, partant du point A, il atteigne le plus rapidement possible le point B sous le seul effet de son poids ?



Le mot <u>brachistochrone</u> désigne une courbe dans un plan vertical sur laquelle un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant <u>sans frottement</u> et <u>sans vitesse initiale</u>, présente un temps de parcours <u>minimal</u> parmi toutes les courbes joignant deux points fixés : on parle de *problème de la courbe brachistochrone*.



Applications du principe variationnel

la brachistochrone

M glisse sans frottement sur un plan vertical sous l'action de son poids. Quelle est l'équation de la courbe joignant deux points O et A pour laquelle le temps mis par le point matériel est minimum ?

$\rightarrow$ la quantité à minimiser : le temps $dt = ds/v$, v étant la vitesse du point matériel :

$$\begin{aligned} S &= \int_O^A dt \\ &= \int_O^A \frac{ds}{v} \\ &= \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \end{aligned}$$

où $v = \sqrt{2gy}$, déduite à partir du théorème de l'énergie cinétique.

Applications du principe variationnel

la brachistochrone

Le "lagrangien"

$$\boxed{L(y, y') \quad = \quad \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}.}$$

ne dépend pas de x, qui joue le rôle du temps, $\Longrightarrow \partial L / \partial x = 0$ et donc le hamiltonien est une intégrale première

$$\boxed{H \quad = \quad y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{-1}{\sqrt{2gy(1 + y')}}}$$

ce qui donne finalement $y(1 + y'^2) = a$, où a est une constante.

La solution de cette équation est un cycloide.

§-3-

Principe de moindre action
Equations d' Euler-Lagrange

« La nature agit toujours par les voies les plus courtes»

Pierre de Fermat

« Au commencement était l'action»

Johann Wolfgang Von Goethe

Bref historique

Ce principe s'est développé pendant un siècle sur la base de

l'optique et de la mécanique, commençant avec Fermat puis Maupertuis et continuant sur un plan mathématique avec Euler, Lagrange, puis Hamilton (1740-1840).

Il s'est étendu dans la seconde moitié du 19ème siècle à l'hydrodynamique, l'électromagnétisme et la thermodynamique.

Introduction

Dans sa *Mécanique analytique*, en 1787, un siècle après les *Principia* de Newton, Lagrange propose une façon nouvelle de considérer les problèmes de mécanique. Au lieu de déterminer la position $\boldsymbol{r}(t)$ et la vitesse $\boldsymbol{v}(t)$ d'une particule à l'instant t connaissant son état initial $\boldsymbol{r}(0)$, $\boldsymbol{v}(0)$, Lagrange se pose la question sous l'angle suivant : quelle est la *trajectoire effectivement suivie* par la particule si, partant de $\boldsymbol{r}_1$ à l'instant t_1, elle arrive en $\boldsymbol{r}_2$ à t_2 ?

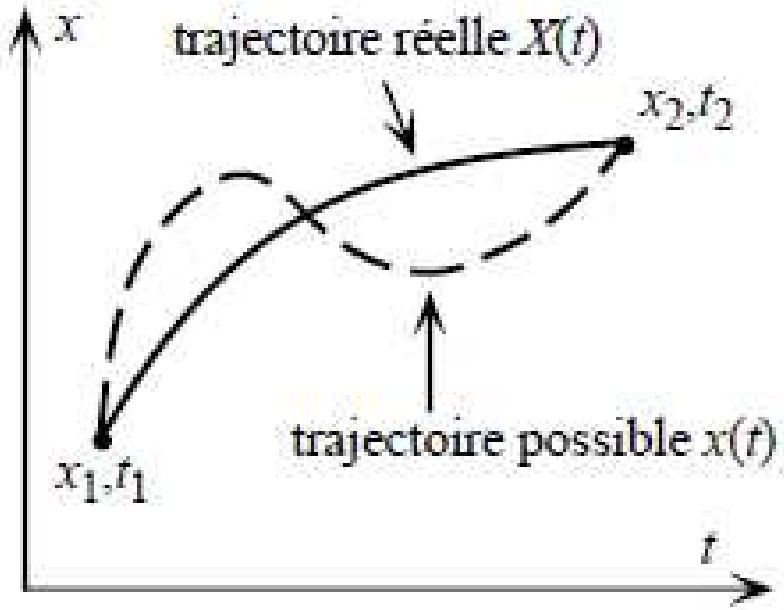


FIG. 15.1: Exemples de trajectoires partant de x_1 à l'instant t_1 et aboutissant en x_2 à l'instant t_2. Parmi toutes ces trajectoires, la trajectoire physique effectivement suivie par la particule est celle qui rend l'action S extrémale.

Principe de moindre action-énoncé

On postule l'existence de la fonction de Lagrange $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ et on définit l'action par

☞

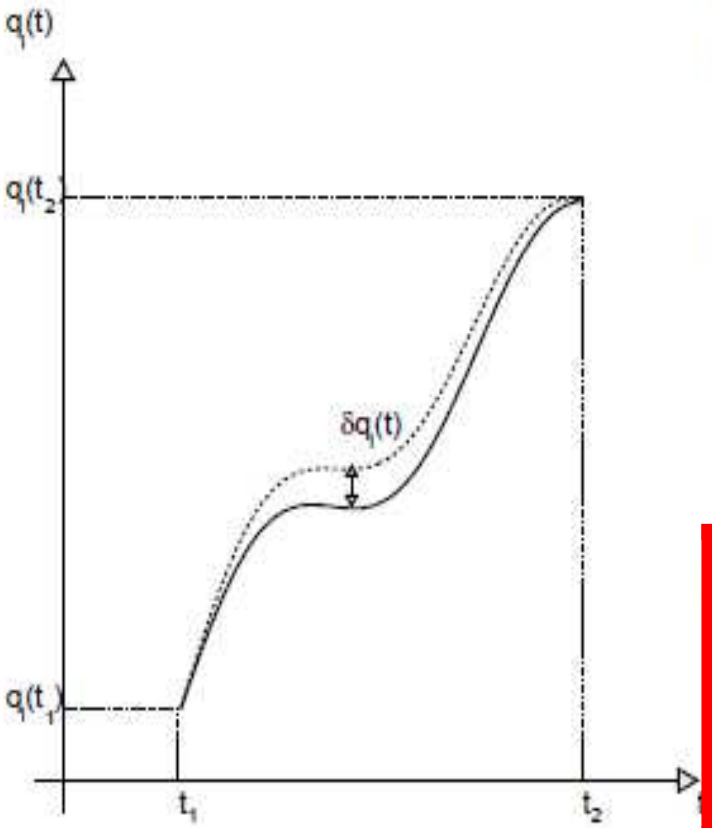
$$\boxed{\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt.}$$

Principe de moindre action :

L'action est extremale pour la trajectoire empruntée effectivement par le système entre les instants t_1 et t_1.

Principe de moindre action-hypothèses

Considérons 2 trajectoires infiniment voisines l'une de l'autre :



- $q_i(t)$ trajectoire effective
- $q_i(t) + \delta q_i(t)$ trajectoire variée

$\rightarrow$ $\delta q_i(t)$ un accroissement infinitésimal,

$\rightarrow$ $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ les deux trajectoires se confondent en ces points.

Principe de moindre action

$$\Downarrow$$

$$\delta \mathcal{S} = 0$$

Principe de moindre action - calculs

Calculons l'accroissement de l'action :

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t^2} \left(L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)\right) dt \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\delta q_i}{dt} dt\right)\end{aligned}$$

nous avons utilisé $\delta \dot{q}_i = d\delta q_i / dt$.

En intégrant par partie le deuxième terme, on obtient

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \Longrightarrow \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Principe de moindre action - calculs

sachant que les δq_i sont arbitraires et indépendants

$$\delta \mathcal{S} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

Ce sont les équations d'Euler-Lagrange

Equations d'Euler-Lagrange (EEL)

Généralement les équation d'Euler-Lagrange sont mises sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{F} = 0$$

$$i = 1,\ldots,n$$

Voir applications pédagogiques

Attention

Il y a équivalence entre le «PMA » et les «EEL »

PMA $\Longleftrightarrow$ ***EEL***

$$\delta S = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

§-3-1

2 exemples classiques

Exemple 1.3 : Pendule simple

Considérons le pendule simple de l'exemple 1.1 ci-dessus. Les coordonnées (x, y, z) du pendule s'expriment ainsi en fonction de la coordonnée généralisée φ :

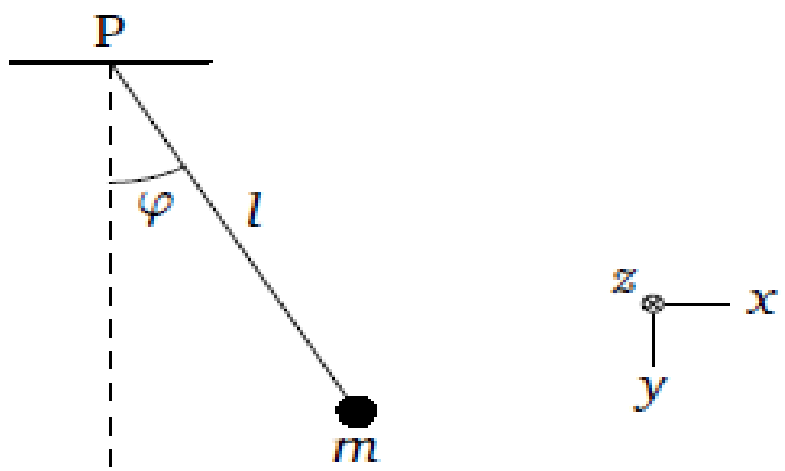
$$x = l\sin\varphi \qquad y = l\cos\varphi \qquad z = 0 \tag{1.30}$$

Notez que y est défini positif vers le bas. Donc les composantes de la vitesse dépendent de φ et $\dot{\varphi}$ de la manière suivante :

$$\dot{x} = l\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \dot{y} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \dot{z} = 0 \tag{1.31}$$

et l'énergie cinétique prend la forme

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2} \tag{1.32}$$



L'énergie potentielle gravitationnelle est, quant à elle,

$$\boxed{V = -mgy = -mgl\cos\varphi} \tag{1.33}$$

Le lagrangien est donc

$$\boxed{L = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi} \tag{1.34}$$

et l'équation de Lagrange prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0} \tag{1.35}$$

ou encore

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0 \quad \text{où} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1.36}$$

C'est l'équation bien connue qui gouverne l'oscillation d'un pendule. Sa solution ne peut pas s'exprimer par fonctions élémentaires, sauf dans l'approximation des petites oscillations ($\varphi \ll 1$), ou l'équation devient

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi(t) = A\cos(\omega t + \xi) \tag{1.37}$$

les constantes A et ξ étant fixées par les valeurs initiales $\varphi(0)$ et $\dot{p}(0)$.

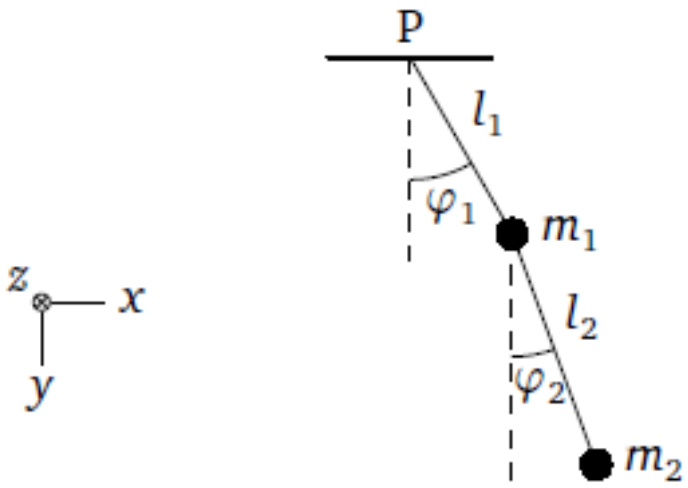
Exemple 1.6 : Pendule double

Le lagrangien du pendule double (exemple 1.2 ci-haut) dépend des deux angles φ_1 et φ_2 et de leurs dérivées. Les coordonnées des deux masses sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\varphi_1 & y_1 &= l_1 \cos\varphi_1 \\ x_2 &= l_2 \sin\varphi_2 + x_1 & y_2 &= l_2 \cos\varphi_2 + y_1 \end{aligned} \tag{1.51}$$

et leurs vitesses sont

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 & \dot{y}_1 &= -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \\ \dot{x}_2 &= l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 + \dot{x}_1 & \dot{y}_2 &= -l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + \dot{y}_1 \end{aligned} \tag{1.52}$$



De sorte que l'énergie cinétique prend la forme

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{1.53}$$

et l'énergie potentielle la forme

$$\boxed{V = -g(m_1 y_1 + m_2 y_2) = -(m_1+m_2)g l_1\cos\varphi_1 - m_2 g l_2\cos\varphi_2} \tag{1.54}$$

Donc

$$\boxed{L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2)g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2\cos\varphi_2} \tag{1.55}$$

Les termes de l'équation de Lagrange sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -(m_1+m_2)g l_1\sin\varphi_1 - m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\\
\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= -m_2 g l_2\sin\varphi_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= (m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)$$

Les équations de Lagrange pour les deux coordonnées généralisées sont donc

$$\boxed{\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + m_2 g l_2 \sin\varphi_2 = 0\end{aligned}} \qquad (1.57)$$

Il s'agit d'un système de deux équations différentielles du deuxième ordre couplées, dont la solution est bien évidemment impossible. Une simplification importante intervient si on suppose que les angles φ_1 et φ_2 sont petits. Dans ce cas, on peut se limiter aux termes du premier ordre en $\varphi_{1,2}$ et en leurs dérivées. On peut également remplacer $\sin\varphi_{1,2}$ par $\varphi_{1,2}$ et $\cos\varphi_{1,2}$ par 1. Dans cette approximation, on obtient donc l'équivalent de deux oscillateurs harmoniques couplés et les équations du mouvement deviennent alors

$$\boxed{\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1+m_2) g l_1 \varphi_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0\end{aligned}} \qquad (1.58)$$

§-3-2

Propriétés physiques du lagrangien

	Propriétés physiques du lagrangien
1	Les équations du mouvement ne changent pas si *L* est multiplié par une constante
2	La forme de *L* doit obéir aux symétries du système physique (invariance par translation dans le temps et dans l'espace)
3	Les équations du mouvement <u>restent inchangées</u> si l'on ajoute au lagrangien une dérivée totale d'une fonction des coordonnées et du temps : $L' = L + \frac{dF(q_i, t)}{dt}$
4	Le lagrangien de deux systèmes indépendants est égal à la somme de chacun des deux systèmes : $L = L_1 + L_2$

§-3-3

Applications pédagogiques

Application pédagogique 1

Non unicité du Lagrangien

Invariance de jauge

Montrons que si

$$L' = L + \frac{dF(q_i, t)}{dt}$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Démonstration

$$L'(q_i,\dot{q}_i,t) = L(q_i,\dot{q}_i,t) + \frac{dF(q_i,t)}{dt} = L(q_i,\dot{q}_i,t) + \frac{\partial F(q_i,t)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F(q_i,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i^2}\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F(q_i,t)}{\partial t}\right)$$

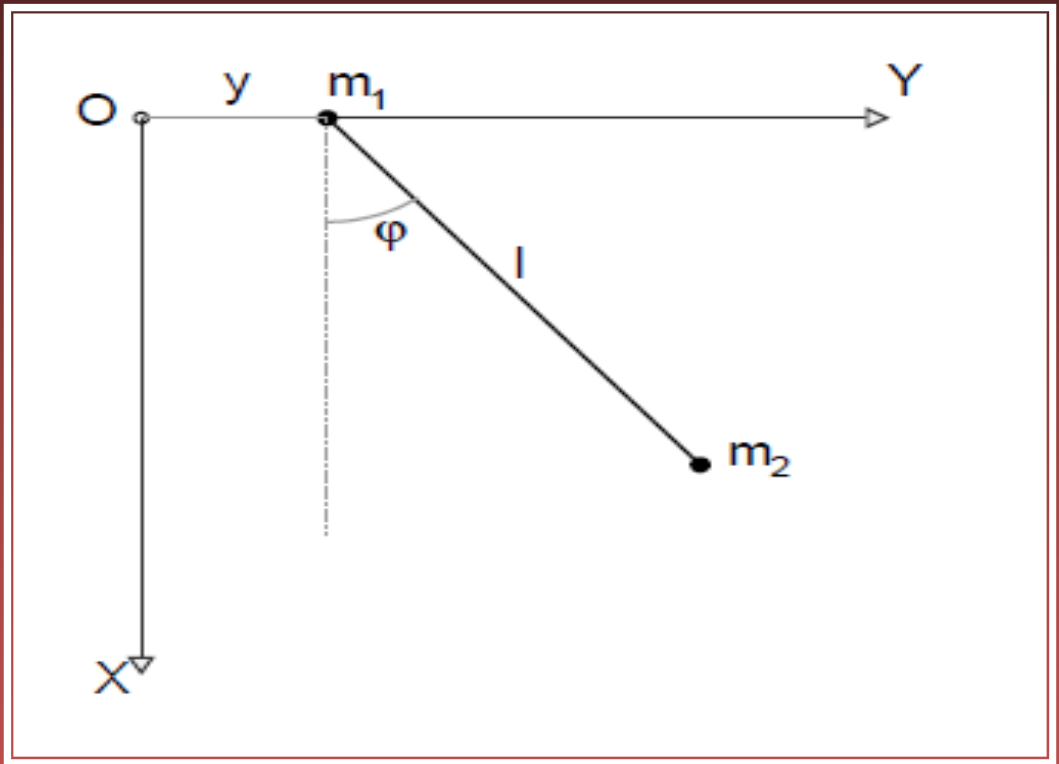
$$et \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F(q_i,t)}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(q_i,t)}{\partial q_i}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial^2 F(q_i,t)}{\partial q_i^2}\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F(q_i,t)}{\partial q_i}\right)$$

$$Puisquet \quad \frac{\partial^2 F(q_i,t)}{\partial t \partial q} = \frac{\partial^2 F(q_i,t)}{\partial q \partial t}, \quad il \ \ vient:$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Application pédagogique 2



§-4-

Symétries et lois de conservation
Théorème de Noether

§-4-1

Impulsion généralisée-moment conjugué

A la variable généralisée q_i, on associe l'***impulsion généralisée*** ou ***moment conjugué*** p_i, défini par

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_i, q_i, t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

- ***Oscillateur harmonique:*** $\mathcal{L}(\dot{x}, x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$ et $p_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}(\dot{x}, x) = m\dot{x}$

- ***Pendule simple :*** $\mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$ et $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta)}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$

- ***Particule en chute libre :*** $\mathcal{L}(\dot{z}, z) = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - mgz$ et $p_z = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \mathcal{L}(\dot{z}, z) = m\dot{z}$

§-4-2

Variable cyclique – variable cachée

Une variable q_k est dite cyclique si le lagrangien ne dépend pas explicitement de cette variable

☞ $$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Or, en utilisant les équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}p_k = 0$$

☞ **Le moment conjugué d'une variable cyclique est conservé.**

§-4-3

Lagrangien indépendant du temps
Système fermé

Si le lagrangien d'un système est indépendant du temps, alors:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

(système fermé)

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad \text{avec} \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

§-4-4

Signification physique de l’hamiltonien H

$$v_\alpha^2 = \vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha = \left(\sum_i \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_i \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Dans le cas de contraintes scléronomes $\partial_t = 0$, l'énergie cinétique est uniquement une fonction quadratique de $\dot{q}_i$, c'est à dire

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j} \qquad (1.5)$$

(a) Pour V(q), on a $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_{ij}(q)\dot{q}_j$

$$H = \sum_i \sum_j m_{ij}(q)\dot{q}_j\dot{q}_i - T + V = 2T - T + V = T + V = E$$

(b) Lorsque $V(q, \dot{q})$, on a

$$\begin{aligned} H &= p_i\dot{q}_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \\ &= \dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - T + V \\ &= T + V - \dot{q}_i\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned}$$

§-5

Théorème de Noether

Naissance 23 mars 1882 · Erlangen (Allemagne).
Décès, 14 avril 1935 (à 53 ans)

Le théorème de Noether exprime l'équivalence qui existe entre les lois de conservation et l'invariance des lois physiques en ce qui concerne certaines transformations (typiquement appelées *symétries*).

Établi en 1918 par la mathématicienne Emmy Nöether, ce théorème fut qualifié par Albert Einstein de « monument de la pensée mathématique » dans une lettre envoyée à David Hilbert en vue de soutenir la carrière de la mathématicienne.

Théorème de Noether

À toute transformation infinitésimale qui laisse invariante l'intégrale d'action correspond une grandeur qui se conserve !

Soient $q_i^{(s)}$ des coordonnées généralisées qui dépendent continûment d'un paramètre s. Si le lagrangien L est indépendant de s c'est-à-dire $L(q_i^{(s)}, \dot{q}_i^{(s)}, t) = L(q_i^{(0)}, \dot{q}_i^{(0)}, t)$ alors : $I(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i^{(s)}}{ds}\Big|_{s=0}$ est une intégrale première.

Théorème de Noether

Symétries d'espace-temps, dites « **externes** »
→ Translations d'espace et de temps, rotation d'espace

Rq: Il existe aussi des symétries dites « **internes** » (jauge)

Démonstration

L indépendant de s :

$$\frac{dL}{ds} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i}\frac{d\tilde{q}_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}\frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{ds} = 0$$

Or, $\frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{ds} = \frac{d}{dt}\frac{d\tilde{q}_i}{ds}$ et, avec l'équation de Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dL}{ds} &= \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}\frac{d\tilde{q}_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{q}_i}{ds} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}\frac{d\tilde{q}_i}{ds}\right) = 0\end{aligned}$$

CQFD

Si $q_i = x$ est une longueur, alors $p_i = m\dot{x}$ est l'impulsion associée. L'invariance de L par rapport à une translation selon x se traduit donc par la conservation de la quantité de mouvement.

Si $q_i = \theta$ est un angle, alors $p_i = I\dot{\theta}$ est le moment cinétique associé. L'invariance de L par rapport à une rotation d'angle θ implique la conservation d'une composante du moment cinétique.

Supposons qu'un système soit invariant par translation dans une direction x. On peut alors faire un changement de coordonnées tel que $\tilde{q}_i(s) = q_i + s$, pour i tel que q_i soit associé à la coordonnée x de chaque particule du système et $\tilde{q}_k(s) = q_k$ pour les autres. Alors, d'après le théorème de Noether,

$$\boxed{I = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\alpha p_{\alpha,x}}$$

est un invariant : c'est la somme des composantes x des impulsions généralisées.

Si un système est invariant par translation dans les trois directions, alors on peut répéter ce jeu et on obtient que l'impulsion totale

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}} \tag{1.9}$$

est une intégrale première. A noter que ceci est valable pour les quantités de mouvement comme pour les moments cinétiques d'un système. Invariance par rotation autour d'un axe Oz implique la conservation de la composante selon z du moment cinétique total du système. Un système possédant une symétrie sphérique a un moment cinétique total

$$\boxed{\vec{J} = \sum_{\alpha} \vec{J}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge \dot{\vec{r}}_{\alpha}} \tag{1.10}$$

conservé.

En résumé

Lois de conservation

Pour un système **fermé** il y a **7** intégrales premières

$$(E, \vec{P}, \vec{M})$$

Energie totale
(1 quantité conservée)

Quantité de mouvement
(3 quantités conservées)

Moment cinétique
(3 quantités conservées)

Fiches de synthèse

Ce qu'il faut absolument savoir

Fiche 1

Lagrangien

$$L = T - V$$

Action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt$$

Principe de moindre action (PMA)

$$\delta S = 0$$

Equations d'Euler-Lagrange (EEL)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Fiche 2

Invariance du lagrangian par une...	L'*intégrale première* associée est...
translation spatiale : la variable cyclique est une coordonnée cartésienne,	la ***quantité de mouvement*** le long de l'axe de la translation,
rotation spatiale : la variable cyclique est un angle,	le ***moment cinétique*** le long de l'axe de la rotation,
translation temporelle : la variable cyclique est le temps,	l'***énergie mécanique*** du problème,

Méthodologie à suivre pour résoudre un problème en utilisant les équations d'Euler-Lagrange (EEL) (voir TD1)

1- Calculer T
2- Calculer V
3- Construire L
4- Ecrire les EEL

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{2}}_{3} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{1} = 0$$

Les calculs se font de droite à gauche

Mise en œuvre

☞ **Voir applications pédagogiques**

Euler

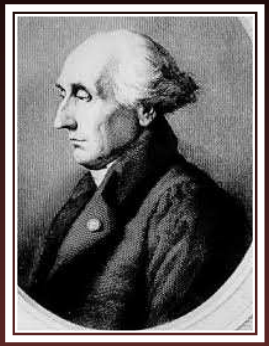
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

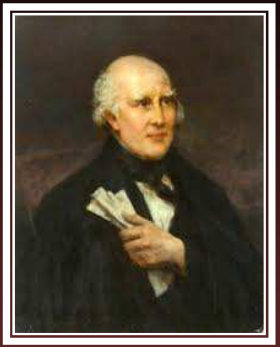
EEL

↓

TD1

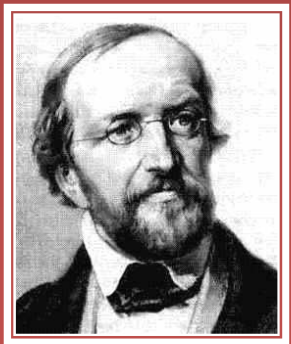
Lagrange





Et maintenant, c'est à vous de jouer

A vos dossiers pédagogiques



FIN DU CHAPITRE 1

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 Département de physique
Faculté des sciences
Agadir

email: r.mesrar@uiz.ac.ma