TD n°2

Systèmes à 1 degré de liberté. Diagramme de phase. II

Exercice 1. Une particule de masse m évolue à une dimension x. Elle est soumise à une force :

$$F(x) = -Kx - \gamma \frac{dx}{dt}, \qquad K > 0, \gamma > 0$$

Interpréter chacun des termes. Ecrire les équations de mouvement de Newton dans l'espace de phase (x, p). Les résoudre[1] et donner une description précise des trajectoires, de la fréquence d'oscillation et du coefficient d'amortissement. Il faut discuter le cas $\Delta > 0$ et le cas $\Delta < 0$.

Exercice 2. Tracer le diagramme de phase pour le potentiel $U(x) = 0$ si $0 < x < L$ et $U(x) = +\infty$ ailleurs, qui modélise une particule libre entre deux murs.

Exercice 3. Tracer le diagramme de phase et étudier la stabilité des points fixes pour le potentiel $U(x) = \alpha x^4 - \beta x^2$ avec $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ (double puits de potentiel). On appelle x_1, x_2, x_3 les points fixes. Tracer $x_1(\beta), x_2(\beta), x_3(\beta)$ en indiquant si ils sont stables ou instables. Observer une bifurcation de la stabilité en $\beta = 0$, qui s'appelle **bifurcation de Hopf**.

Exercice 4. (option). Bifurcation et Hystérésis.

1. Etudier les points fixes et leur stabilité, pour le potentiel

$$U(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\beta x^2$$

   Remarque : le potentiel $U(x)$ peut modéliser une tige métallique de longueur L tenue verticalement à sa base. Le paramètre β est relié à la longueur L. x correspond à l'écart entre le sommet de la tige et la verticale.

2. Tracer la position des points fixes en fonction de β et préciser leur stabilité (diagramme de bifurcation). On suppose qu'il y a une légère force supplémentaire de dissipation qui stabilise l'état dans un minimum de potentiel.
3. On suppose que $\beta(t)$ oscille lentement et périodiquement entre $\beta_{min} = -0.5$ et $\beta_{max} = 0.5$. Discuter le phénomène d'hystérésis qui se produit.

---

1. **Aide :** on obtient une EDO linéaire de la forme $\frac{dE}{dt} = AE$, avec une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & -c \end{pmatrix}$ qui se diagonalise :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, d_1 = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\Delta}, d_2 = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\Delta}, \Delta = c^2 - 4ab \\ P &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} + c & -\sqrt{\Delta} + c \\ -2b & -2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d_1, d_2 sont les valeurs propres de A et la "matrice de passage" P contient les coordonnées des vecteurs propres $P \equiv (V_1, V_2)$ disposés en colonnes. Avec le logiciel gratuit **xcas** de calcul formel (pour l'obtenir, taper **xcas** dans google). Et dans xcas, écrire : `A:=[[0,a],[-b,-c]]; D:=egvl(A); P:=egv(A);` On vérifira que `simplify(P*D*inv(P));` redonne bien la matrice `A` .