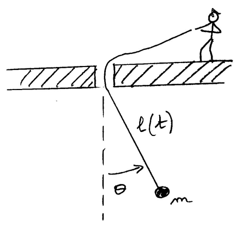
TD n^{o}9

Variables Angle-Action. Invariants adiabatiques



Exercice 1. Pendule dont la longueur varie lentement

On considère un pendule de masse m et de longueur l

1. Ecrire le Lagrangien et déduire le Hamiltonien $H(\theta, p)$ en coordonnées polaires.
2. On suppose que les oscillations sont petites ($\theta \ll 1$). Donner l'expression approximative de $H(\theta, p)$ (approximation quadratique). Dans cette approximation, calculer la surface S et l'action I d'une trajectoire dans l'espace de phase. Déduire l'énergie $H(I)$ et déduire que la fréquence est $\omega = \sqrt{g/l}$.
3. On suppose maintenant que la longueur $l(t)$ **varie lentement**. En utilisant le **théorème adiabatique** qui affirme que l'action $I(t)$ est presque constante, déduire comment l'énergie $H(t)$ du pendule varie avec le temps.
4. On note $\theta_{max}(t)$ l'amplitude de l'oscillation de $\theta(t)$. Montrer avec l'approximation adiabatique que
$$\theta_{max}(t) = \theta_{max}(0) \left(\frac{l(0)}{l(t)}\right)^{3/4}$$
5. On suppose maintenant que la longueur du pendule **varie brusquement** de l_1 à l_2 (et reste constante avant et après). Comment varie l'énergie H et l'amplitude θ_{max} ?

Exercice 2. Balle dans un ascenseur.

Une balle de masse m rebondit verticalement (et sans frottement) dans un ascenceur, dans le champ de pesanteur g. Initialement l'ascenseur est immobile.

1. Ecrire le Hamiltonien $H(z, p)$. Calculer la surface S et l'action I d'une trajectoire dans l'espace de phase. Déduire l'énergie $H(I)$.
2. On suppose maintenant que l'ascenseur a une accélération $a(t)$. Justifier pourquoi l'expression de $H(z, p, t)$ est maintenant obtenue en remplaçant g par $g + a(t)$. On suppose que $a(t)$ **varie lentement**. En utilisant le **théorème adiabatique**, déduire comment l'énergie $H(t)$ de la balle varie avec le temps.
3. On note $z_{max}(t)$ l'amplitude des rebonds. Montrer avec l'approximation adiabatique que
$$z_{max}(t) = z_{max}(0) \left(\frac{g}{g + a(t)}\right)^{1/3}$$