Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014

TD de Mécanique Analytique
Série N° 2
Parcours Physique Moderne : Portrait de phase. Formalisme de Hamilton.

Exercice 1

Une particule de masse m évolue à une dimension x. Elle est soumise à la force

$$F(x) = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}, \quad k > 0, \gamma > 0.$$

1. Interpréter chacun des termes.
2. En appliquant le PFD, montrer que les équations du mouvement dans l'espace de phases peuvent se mettre sous la forme matricielle $\dot{E} = AE$ avec $E^T = (x, p)$ où (x, p) est la coordonnée de position et son moment conjugué. Expliciter l'expression de A.
3. Résoudre les équations du mouvement en fonction des directions principales.[1] Noter par (X, P) les nouvelles coordonnées obtenus Donner une description précise des trajectoires, de la fréquence d'oscillation et du coefficient d'amortissement.

Exercice 2

Considérons une particule libre évoluant selon une dimension x entre deux murs, séparés par une distance égale à L, dont le potentiel peut être modélisé comme suit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < x < L \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tracer le portrait de phase.

Exercice 3

Considérons le potentiel[2]

$$U(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\beta x^2.$$

1. Etudier les points fixes de $U(x)$ en fonction de β et leurs stabilités. Tracer $U(x)$ en fonction de x et ce selon β.
2. Tracer la position des points fixes en fonction de β et préciser leurs stabilités (Prendre β en ordonnée et x en abscisse). On suppose qu'il y a une légère force supplémentaire de dissipation qui stabilise l'état dans un minimum de potentiel.
3. On suppose que β oscille lentement et périodiquement entre $\beta_{min} = -0.5$ et $\beta_{max} = 0.5$. Discuter l'évolution des positions des points fixes. Commenter.

1. Diagonaliser A, trouver ses vecteurs propres et la matrice de passage P correspondante. Exprimer E dans la base formée par les vecteurs propres.
2. Ce potentiel peut modéliser une tige métallique de Longeur L tenue verticalement à sa base. Le paramètre β est relié à la longueur L. x correspond à l'écart entre le sommet de la tige et la verticale.

Exercice 4

On étudie classiquement le mouvement d'un électron de masse m et de charge $-e$ soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau de charge $+Ze$.

1. Ecrire le potentiel $V(\vec{r})$ en coordonnées sphériques (r, θ, φ). On posera $k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$.
2. Ecrire le lagragien $\mathcal{L}$ du système en coordonnées sphériques. En déduire le hamiltonien $\mathcal{H}$ du système. Vérfier qu'il est conservé.
3. Soit L le moment cinétique orbital. Calculer les crochets de Poisson de $\{\mathcal{H}, L\}$. Conclure.
4. On prend $\varphi(t) = \text{Constante}, \forall t$. Justifier ce choix. Donner le nouveau hamiltonien.
5. Ecrire les équations de Hamilton et identifier une nouvelle constante du mouvement.
6. Montrer qu'un mouvement circulaire et stable est possible. Donner le rayon r_c du cercle.

Exercice 5

Soit la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

1. A quelle consition cette transformation est canonique dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que ces transformations linéaires forment un sous groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ [3]

Exercice 6

Considérons la transformation donnée par

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos\lambda + \tfrac{\sin\lambda}{m\omega} P_2, & q_2 &= Q_2 \cos\lambda + \tfrac{\sin\lambda}{m\omega} P_1, \\ p_1 &= -m\omega Q_2 \sin\lambda + P_1 \cos\lambda, & p_2 &= -m\omega Q_1 \sin\lambda + P_2 \cos\lambda. \end{aligned}$$

1. Déterminer la fonction génératrice de cette transformation. m, ω et λ sont des constantes.
2. Trouver la nouvelle fonction de Hamilton $\mathcal{H}(Q_i, P_i)$.

3. $GL(2, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices 2×2 à éléments dans $\mathbb{R}$.