Mécanique Analytique L3

$\boxed{\text{TD n°1 \quad Corrigé}}$

Exercice 1

Au départ, Energie cinétique $E_{c_0} = 0$

Energie potentielle $U_0 = mgH$

A la fin Energie cinétique $E_{c_1} = 0$

Energie potentielle $U_1 = -mgh + \frac{1}{2} K h^2$

La conservation de l'énergie totale donne :

$$\mathcal{E} = E_{c_0} + U_0 = E_{c_1} + U_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad mgH = -mgh + \frac{1}{2} K h^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad A h^2 + B h + C = 0, \qquad A = \frac{1}{2} K, \quad B = -mg, \quad C = -mgH$$

$$\longrightarrow \quad h_\pm = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2Kmg H}}{K}$$

La solution $h_- < 0$ est celle recherchée.

Exercice 2

si $U(x)$ est indépendant de t, alors $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + U(x)$ est conservée. D'après les équations de mouvement de Hamilton :

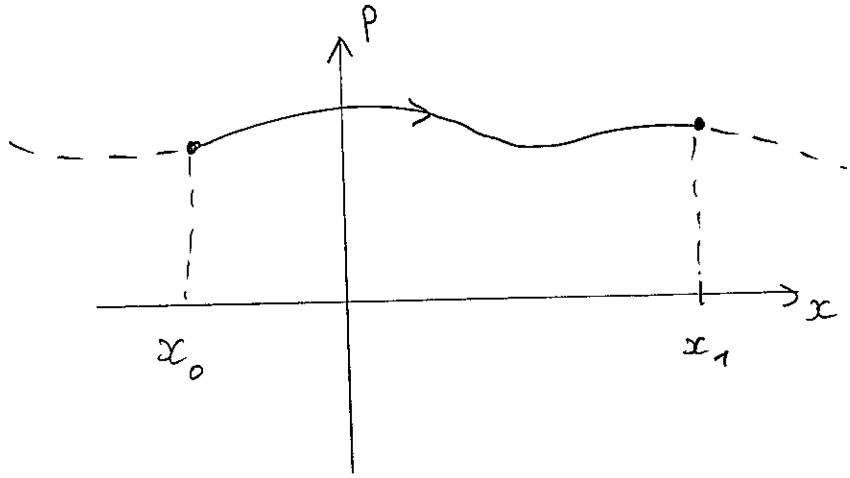
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \frac{1}{m}\sqrt{2m\left(\mathcal{E} - U(x)\right)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad dt = \frac{m}{\sqrt{2m\left(\mathcal{E} - U(x)\right)}}\, dx$$

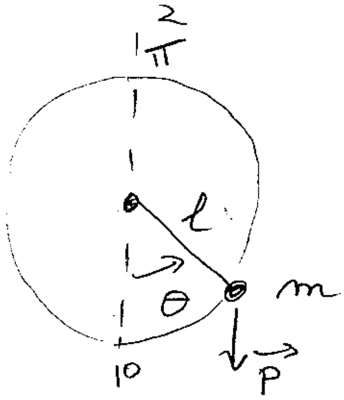
donc

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{m}{2\left(\mathcal{E} - U(x)\right)}}\; dx$$

schéma dans l'espace de phase :



Exercice 3



① on a $z = -\ell \cos\theta$,

$$U(\theta) = mgz = -mg\ell\cos(\theta)$$

Si $s = \ell . \theta$ = coordonnée curviligne,

alors avec le changement de variable $s \longleftrightarrow \theta$

on a : $p_s = \frac{p_\theta}{\ell}$

en effet la vitesse $v_s = \dot{s} = \ell\dot{\theta} = \ell . v_\theta$

et l'énergie $E_c = \frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{1}{2}(p_s \cdot v_s)$ doit être invariante

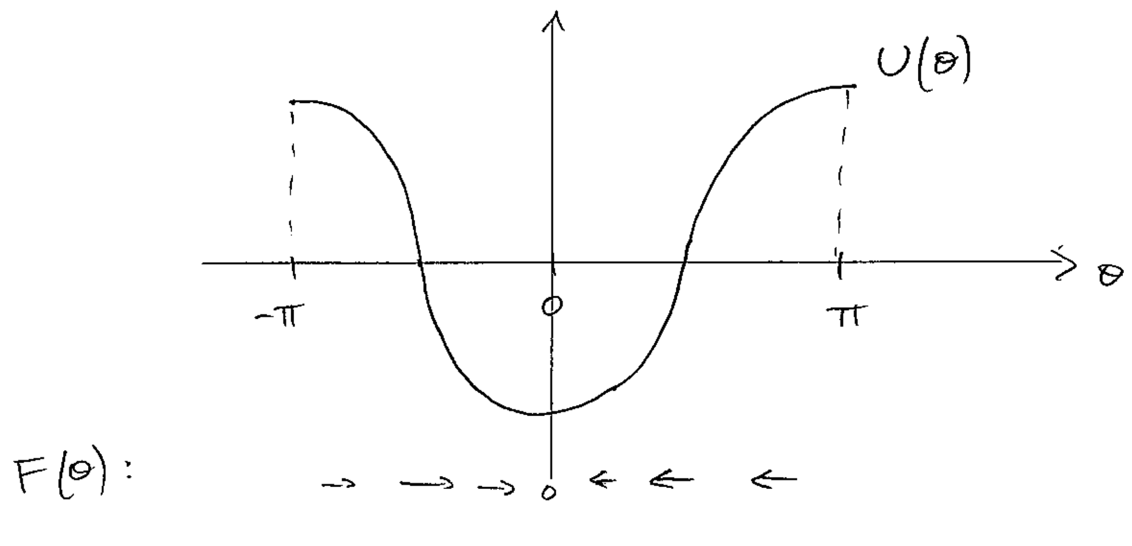
$$= \frac{1}{2}(p_\theta \cdot v_\theta)$$

$$p_\theta v_\theta = p_s v_s \longleftrightarrow p_s = \frac{p_\theta}{\ell}$$

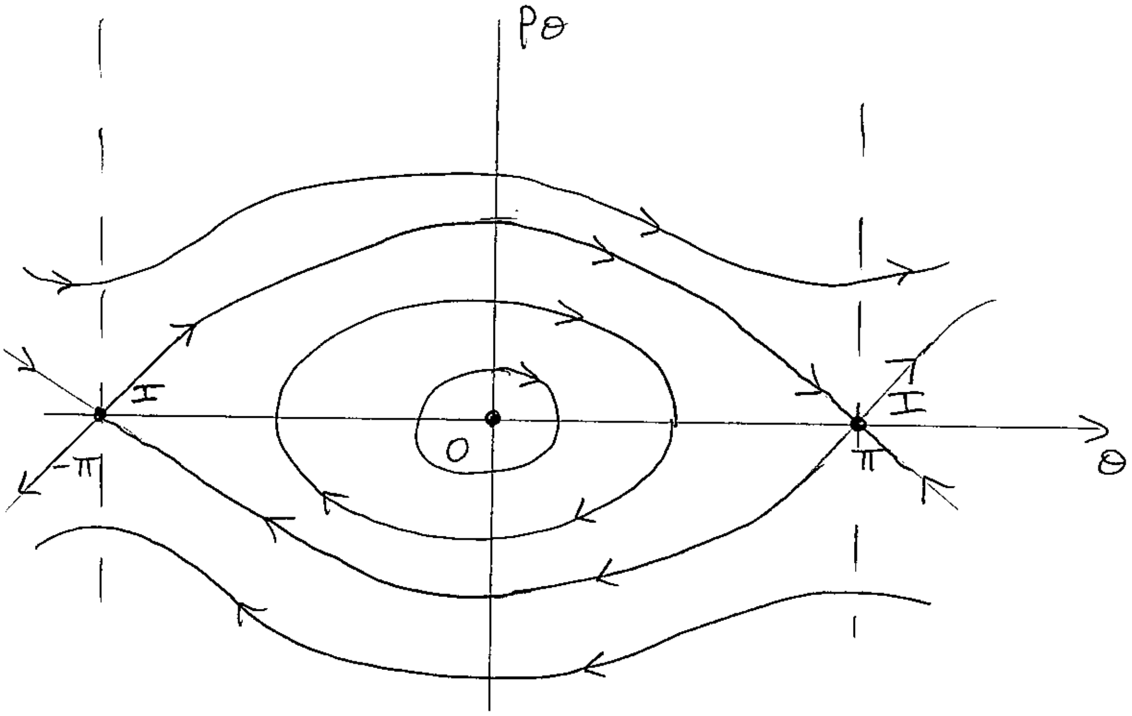
donc $E_c = \frac{p_s^2}{2m} = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2}$

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos(\theta) = E_c + U(\theta)$$

$$F(\theta) := -\frac{dU}{d\theta} = -mg\ell\sin\theta$$



(2)



d'après le cours, près du point fixe stable $(0,0)$,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(0)}{m\ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

et le coef d'instabilité du point fixe instable $(\pi,0) = I$

est $\lambda = \sqrt{\frac{-U''(\pi)}{m\ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ (instabilité $\propto e^{\lambda t}$)

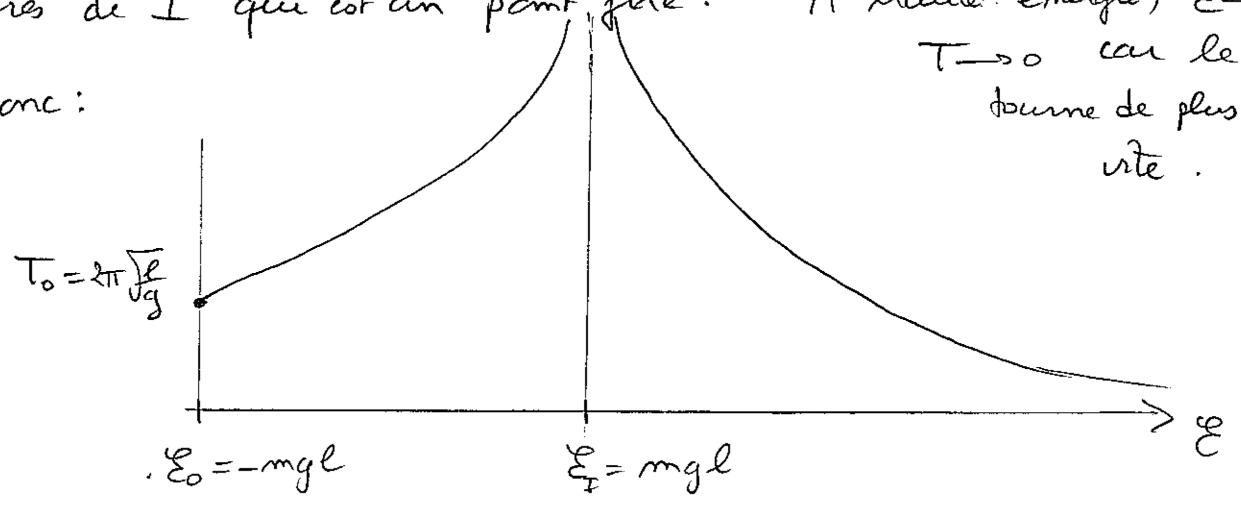
(3). Au minimum d'énergie, $(\theta,p) = (0,0)$, $\mathcal{E}_0 = -mg\ell$

la période est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

. au point fixe instable $(\theta, p) = (\pi,0)$ d'énergie $\mathcal{E}_I = +mg\ell$,

la période devient infinie, car les trajectoires passent près de I qui est un point fixe. A haute énergie, $\mathcal{E} \to \infty$ $T \to 0$ car le pendule tourne de plus en plus vite.

donc :



Si on rajoute une force de frottement $F_2(\theta) = -\gamma \frac{d\theta}{dt}$,

alors : $\begin{cases} \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} + F_2(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$

$\uparrow$ force supplémentaire

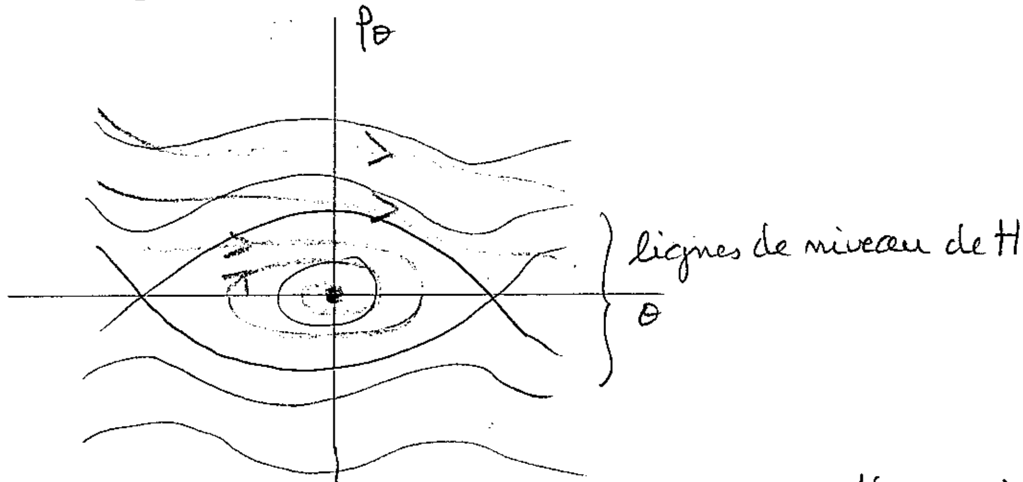
l'énergie n'est plus conservée : $\mathcal{E}(t) = H(\theta(t), p_\theta(t))$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta} + \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \cdot \dot{p}_\theta = \cancel{\frac{\partial H}{\partial \theta}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)\left(\cancel{-\frac{\partial H}{\partial \theta}} + F_2\right)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot F_2 = -\gamma \cdot (\dot{\theta})^2 = -\gamma \left(\frac{p^2}{ml^2}\right)^2 \leq 0$$

$\mathcal{E}(t)$ va diminuer (sauf aux points $p=0$).

schéma :



les trajectoires vont s'enrouler vers le point $(0,0)$ d'énergie minimale.

Exercice 4

$$F(x) = \underbrace{-kx}_{\substack{\text{force conservation} \\ \text{(ressort)}}} - \gamma \frac{dx}{dt}$$

force de frottement (non conservative)

. équations du mouvement :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -kx - \gamma \dot{x} = -kx - \frac{\gamma}{m} p \end{cases} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{E} = A . E \quad \text{avec} \quad E = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

. On diagonalise : $A = P . D . P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.

on pose $X = P^{-1} . E = (X_1, X_2)$: changement de variables $(x, p) \to (X_1, X_2)$.

alors $\dot{E} = A E = P D P^{-1} E$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{X} = D X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = d_1 X_1 \\ \dot{X}_2 = d_2 X_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X_1(t) = X_1(0) e^{d_1 t} \\ X_2(t) = X_2(0) e^{d_2 t} \end{cases} \quad (*)$$

avec $d_1 = -\frac{\gamma}{2m} + \frac{1\sqrt{\Delta}}{2}$, $\quad d_2 = -\frac{\gamma}{2m} - \frac{1\sqrt{\Delta}}{2}$

$$\Delta = \frac{1}{m} \left(\frac{\gamma^2}{m} - 4k \right)$$

$$P = \left(\underbrace{\begin{matrix} \sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ \hline -2k \end{matrix}}_{V_1} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -\sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ \hline -2k \end{matrix}}_{V_2} \right)$$