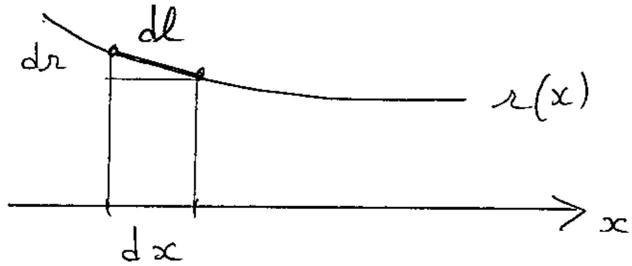
Le film de Savon

(1) Un rayon plus faible a pour effet de diminuer la surface totale du film de savon, par rapport à la situation du cylindre ($r(x) = \text{cste}$).

(2) D'après la figure,

on a $dl^2 = dx^2 + dr^2$



$$\rightarrow \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2$$

$$\rightarrow dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

La surface de révolution associée au segment dx

est $\quad dS = (2\pi r) \cdot dl$

donc

$$S = \int dS = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

(3) On écrit $\quad S = \int_{x_1}^{x_2} L(r, \dot{r})\, dx$

avec $\quad L(r, \dot{r}) = 2\pi r \cdot \sqrt{1 + \dot{r}^2}$

L'équation de Euler-Lagrange donne : $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial r}$

avec $\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2\pi r \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}$

④ Inversement $\dot{r}^2 = \dfrac{p^2}{(2\pi r)^2 - p^2}$

Le Hamiltonien est :

$$H(r,p) = p\dot{r} - L = \frac{2\pi r\,\dot{r}^2}{(1+\dot{r}^2)^{1/2}} - 2\pi r\,(1+\dot{r}^2)^{1/2}$$

$$= \frac{-2\pi r}{(1+\dot{r}^2)^{1/2}}$$

$$= -\left[(2\pi r)^2 - p^2\right]^{1/2} \leq 0$$

Comme $H(r,p)$ est indépendant de x,

la quantitée : $E = H(r(x), p(x))$ est conservée

$$= -\left[(2\pi r)^2 - p^2\right]^{1/2} \leq 0$$

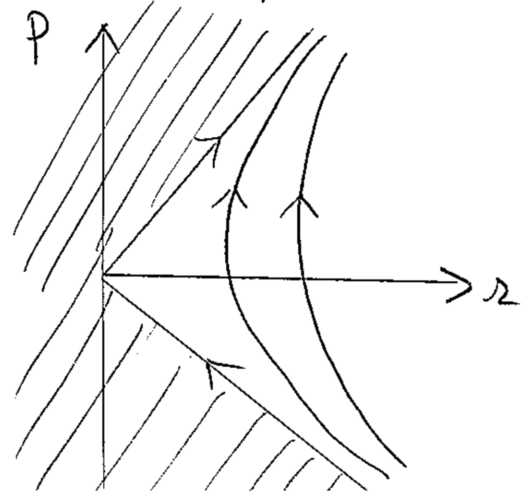
Les équations de Hamilton sont :

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{\sqrt{\ \ }''} = \dfrac{p}{(-E)} \\[2ex] \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{(2\pi)^2 r}{\sqrt{\ \ }''} = \dfrac{(2\pi)^2 r}{(-E)} \end{cases}$$

ce sont des équations linéaires.

L'équation : $E^2 = (2\pi r)^2 - p^2$ montre que les trajectoires $r(x), p(x)$ sont des hyperboles :

(on rappelle que $r \geq 0$ et $(2\pi r)^2 - p^2 \geq 0$)



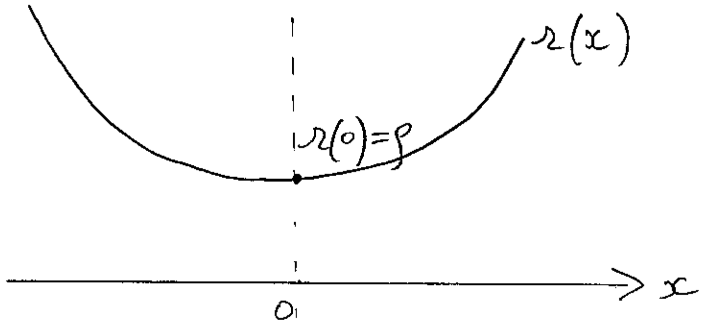
5 on obtient :

$$\frac{d^2 r}{dx^2} = \frac{(2\pi)^2 r}{E^2}$$

Soit : $r(x) = \rho \cosh\left(\frac{x}{\rho}\right)$ avec $\rho > 0$

on calcule $\frac{d^2 r}{dx^2} = \frac{1}{\rho} \cosh\left(\frac{x}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2} r$

donc c'est une solution, avec : $\frac{1}{\rho} = \frac{2\pi}{E}$



6 La solution ci-dessus nous donne :

$$r(L) = \rho \cosh\left(\frac{L}{\rho}\right) = R$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cosh(\alpha) = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{L}\frac{L}{\rho} = \left(\frac{R}{L}\right)\cdot\alpha$$

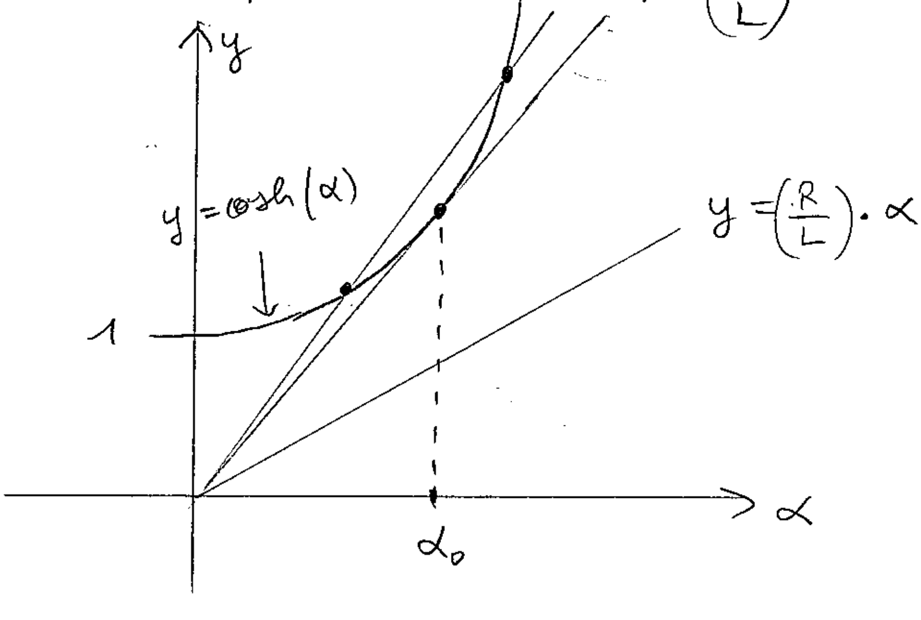
avec $\alpha = \frac{L}{\rho}$.

Il faut résoudre l'équation : $\cosh(\alpha) = \left(\frac{R}{L}\right)\cdot \alpha$

schéma :

on trace $y = \cosh(\alpha)$

et $y = \left(\frac{R}{L}\right)\cdot\alpha$: droite



on observe que il y a une valeur particulière $C > 0$

telle que
$$\begin{cases} \text{si } \left(\frac{R}{L}\right) > C & \text{alors l'équat}^{\circ} \text{ a 2 solution} \\ \text{si } \left(\frac{R}{L}\right) = C & \text{'' '' '' 1 solution} \\ \text{si } \left(\frac{R}{L}\right) < C & \text{'' '' 0 solution.} \end{cases}$$

La valeur de C (pente) est donnée par la pente de la tangente à $ch(\alpha)$ qui passe en $(0,0)$.

donc
$$\begin{cases} ch'(\alpha_0)\left(\alpha - \alpha_0\right) = \left(y - ch(\alpha_0)\right) \\ \alpha = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad sh(\alpha_0) \cdot \alpha_0 = ch(\alpha_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad th(\alpha_0) \cdot \alpha_0 = 1 \quad : \text{à résoudre} \qquad (*)$$

donnant : $C = ch'(\alpha_0) = sh(\alpha_0)$

On peut résoudre (*) en itérant : $\alpha_{n+1} = coth(\alpha_n)$

on trouve $\alpha_0 = 1,199678$

$C = 1,50887$

Si $R < C.L$ alors la solution ci-dessus n'est plus valable. En fait le film de savon se casse.

Eventuellement, forme 2 disques :

Rouleau qui roule

1. pour une petit déplacement, on a

$$\delta x = - R\, \delta\theta$$

donc $\dot{x} = - R\,\dot{\theta}$

$\Leftrightarrow$ $x(t) = - R.\theta(t) + cste$

que l'on prend à 0

2. L'énergie cinétique est :

$$E_{c\ translation} = \frac{1}{2} M (\dot{x})^2$$

$$+ \quad E_{c\ rotation} = \frac{1}{2} I (\dot{\theta})^2$$

avec $I = \frac{1}{2} M R^2$ (voir cours)

L'énergie potentielle de pesanteur est :

$$U = M g z = - M g\, x . \sin\alpha = M g \sin\alpha . R\theta$$

donc

$$L(\theta,\dot{\theta}) = E_c - U = \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I (\dot{\theta})^2 - M g \sin(\alpha) R\,\theta$$

$$= M R^2 \dot{\theta}^2 + M g \sin(\alpha) R\,\theta$$

3. $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 M R^2 \dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \dfrac{1}{2MR^2} p$

$\dot{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \theta} \Leftrightarrow 2MR^2 \ddot{\theta} = - M g \sin(\alpha) R$

$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{2R} \sin(\alpha)$: accélération uniforme

$\Leftrightarrow \ddot{x} = - R\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{2}\sin(\alpha)$

④ $$H(\theta, p) = p\dot{\theta} - L$$
$$= MR^2 \dot{\theta}^2 - Mg\sin(\alpha) R\theta$$
$$= \frac{p^2}{4MR^2} - Mg\sin(\alpha) R\theta$$

équ. de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2MR^2} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = +Mg\sin(\alpha) R \end{cases}$$

$$\longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{g\sin(\alpha)}{2R}$$: accélération uniforme.

⑤ solution : $$\dot{\theta}(t) = \frac{g\sin(\alpha)}{2R} t + \dot{\theta}(0)$$
$$\theta(t) = \frac{g\sin(\alpha)}{2R} \frac{t^2}{2} + \dot{\theta}(0) \cdot t + \theta(0)$$

on a $$\ddot{x} = -\frac{g}{2} \sin(\alpha)$$

alors que pour un point on aurait :

$$\ddot{x} = -g \cdot \sin(\alpha)$$

Le facteur 2 vient que pour le cylindre $E_{c\,transl} = E_{c\,rot}$.

donc $E_c = 2 \cdot E_{c\,translation}$.