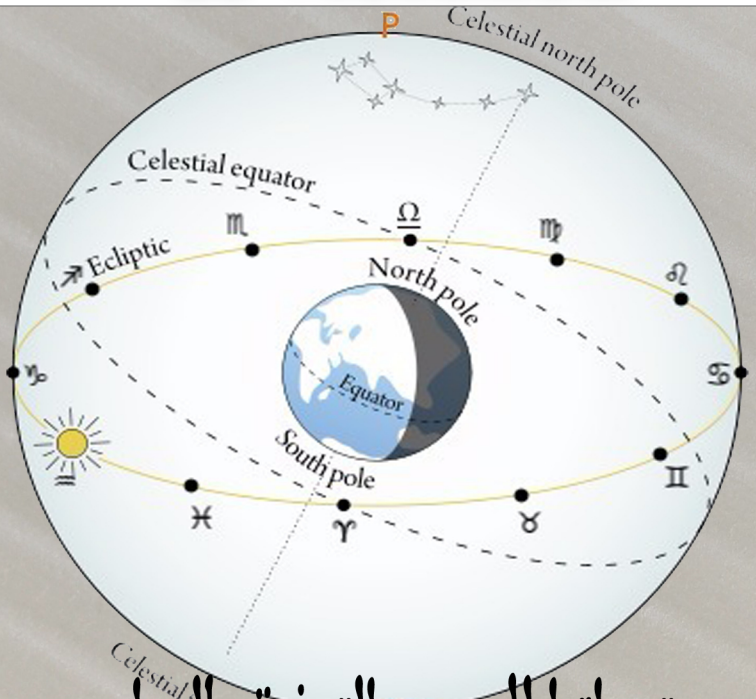
UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES EL JADIDA MAROC

نادي النجاح كلية العلوم
success club

Les TD avec solution

Mécanique Analytique & vibration



متمنياتنا للجميع بالتوفيق والنجاح

2016/2017

www.clubnajah.com
Clubnajah2013@gmail.com
www.facebook.com/succes.club

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des sciences
Département de Physique
El Jadida

Année Universitaire 2015/2016
TD – SMP5 - Série 1

MECANIQUE ANALYTIQUE
- Paramétrage et Puissances virtuelles -

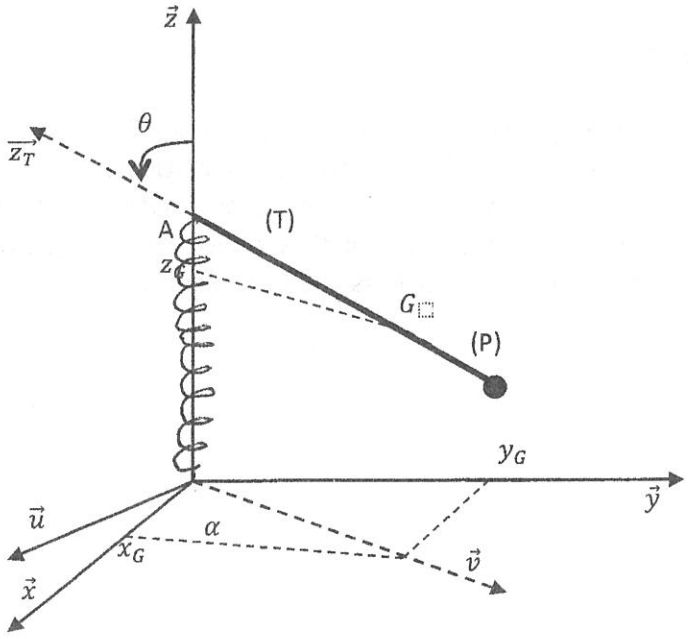
Exercice 1 :

$R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: Repère fixe/sol

(T) est une tige homogène de longueur L et de masse m. L'extrémité A de (T) est reliée à un ressort (r) (sans masse, de raideur k et de longueur naturelle l_0) et elle se déplace sur l'axe Oz.

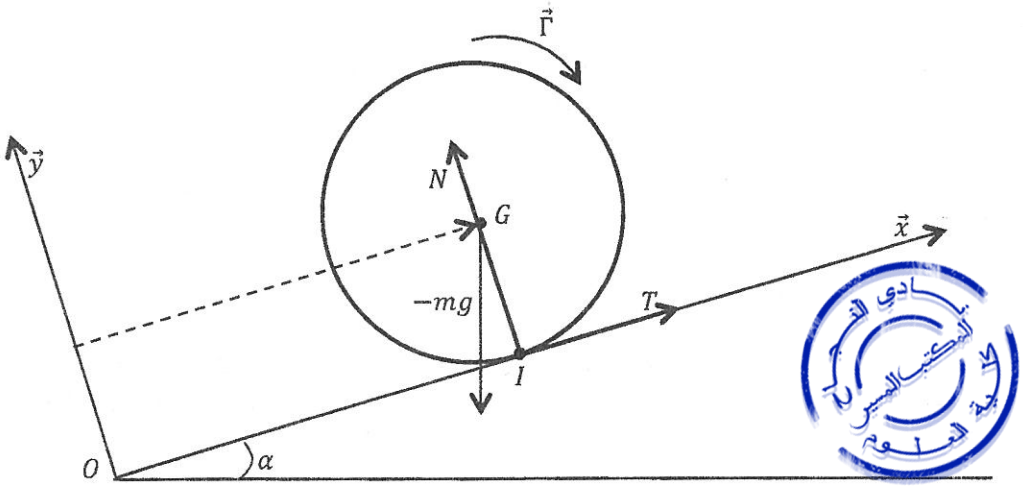
A l'autre extrémité de (T), on fixe un point matériel (P) de masse m. $\sum = (T) \cup (P)$

1) Paramétrer le système matériel Σ. $\vec{OA} = \lambda(t)\,\vec{z}$ (λ connue $\forall t$)
2) Ecrire les équations de liaison imposées à Σ sous la forme $f(q,t) = 0$ ou $f(q,\dot{q},t) = 0$. Indiquer la nature de ces liaisons.
3) Donner, si possible, un paramétrage complet du système.
4) Déterminer le nombre de degré de liberté de Σ.
5) Déterminer les énergies cinétique et potentielle de Σ.



Exercice 2

On se propose de déterminer le couple Γ nécessaire à appliquer à un rouleau cylindrique qui remonte une pente en roulant sans glisser :



Le rayon de la base du rouleau et le moment d'inertie du rouleau par rapport à $(G, \vec{z})$ sont notés respectivement r et J.
D'autre part, seuls m, α, r, J, et $\ddot{x}$ sont connus.

1. Ecrire le principe des travaux virtuelles en choisissant une rotation virtuelle $-\delta\theta$ dans un premier temps puis un déplacement virtuel δx dans un deuxième temps.
2. En tenant compte de la condition de roulement sans glissement de la roue sur la pente, déduire l'expression du couple Γ en fonction des données.
3. De même, appliquez le principe des puissances virtuelles en choisissant une vitesse de rotation virtuelle $-\dot{\theta}^*\vec{z}$ et une vitesse virtuelle $\dot{x}^*\vec{x}$

Exercice 3

Soit un double pendule représenté sur la figure ci-dessous. On se propose d'appliquer le principe des puissances virtuelles :
• pour calculer la valeur des couples moteur C_1 et C_2 à installer sur chaque axe d'articulation pour obtenir des trajectoires imposées,
• pour déterminer la tension dans le premier pendule,

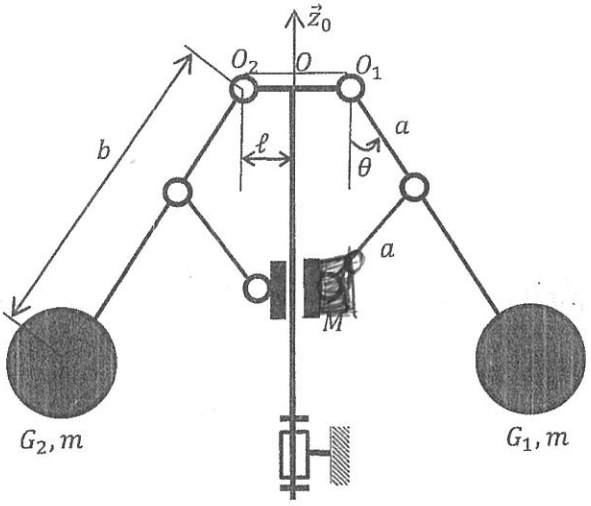
Université Chouaïb Doukkali
Faculté des sciences
Département de Physique
El Jadida

Année Universitaire 2015/2016
TD – SMP5 - Série 2

MECANIQUE LAGRANGIENNE
- Equations de Lagrange -

Exercice 1

Soit le régulateur à boules représenté sur la figure ci-dessous :



On suppose toutes les liaisons parfaites.
Le coulisseau a pour masse M et coulisse le long de la tige verticale entraînée suivant une loi imposée $\psi(t)$ autour de $(O, \vec{z}_0)$. Son moment d'inertie par rapport à $(O, \vec{z}_0)$ est négligé. Les tiges mobiles de masses négligeables, de longueur b sont articulées respectivement en O_1 et O_2, $(O_1O_2 = \mathscr{a})$. A l'extrémité de ces tiges sont montées des sphères identiques de masse m et de moment d'inertie par rapport à leur diamètre égal à I.

1. Montrer que $q = (\theta)$ est un paramétrage complet du système formé par les masses m et le coulisseau M.
2. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de ce régulateur.
3. Ecrire l'équation du mouvement par la méthode de Lagrange.
4. Trouver une condition suffisante d'existence d'une intégrale première de Painlevé. Ecrire l'intégrale première.

Exercice 2

$R_0 = (O, x_0, y_0, z_0)$: repère fixe/sol

(P_0) est un plan horizontal confondu avec x_0Oy_0.

(S) est un solide de révolution homogène constitué d'un hémisphère et d'un cylindre de même base.

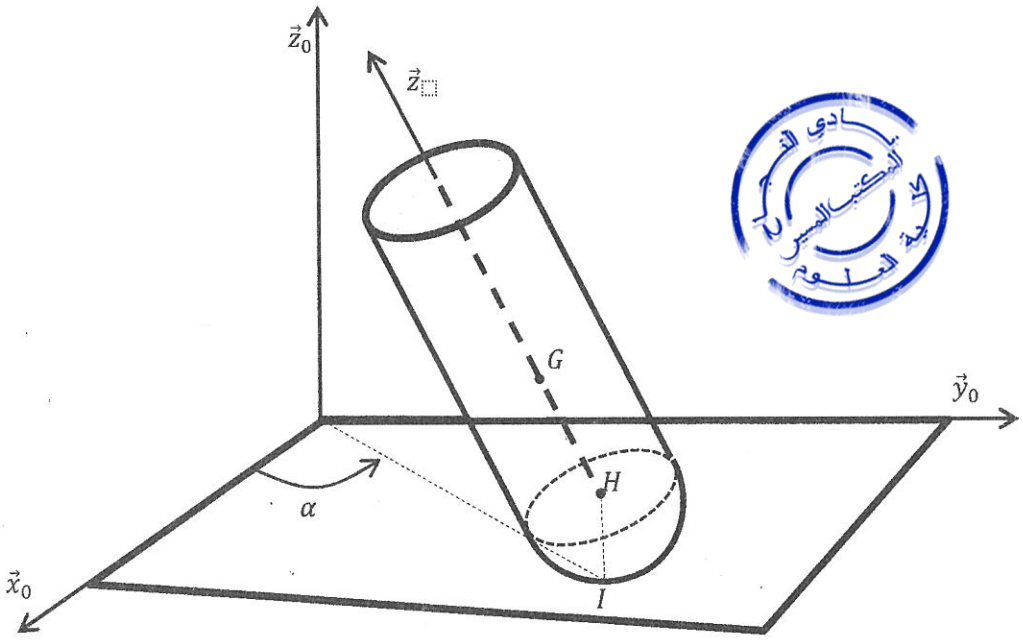
Dans son mouvement $/R_0$, (S) reste en contact, par sa partie sphérique uniquement, avec le plan (P_0). Ce contact s'effectue sans glissement.

On donne :

M la masse de (S), a le rayon de la base, G le centre de masse de (S), I le point de contact entre (S) et (P_0). $\overrightarrow{HG} = h\vec{z}$

A et C sont les moments d'inertie de (S) respectivement par rapport à $G\vec{x}$ et $G\vec{z}$. $\Sigma = (S)$

1. Ecrire l'équation de liaison (ℓ) traduisant le contact géométrique entre (S) et (P_0).
2. On suppose que le contact $S - P_0$ au point I s'effectue sans frottements.
   a. Ecrire les équations de Lagrange du mouvement de (S) en choisissant la liaison (ℓ) comme principale et un C.V.V compatible avec (ℓ).
   b. A-t-on l'intégrale première de l'énergie cinétique ?
   c. La liaison (ℓ) étant prise comme complémentaire. Ecrire les équations de Lagrange en utilisant un C.V.V non compatible avec (ℓ). Quel est l'intérêt de cette méthode ?
3. On suppose que le contact en I est sans glissement.
   a. Ecrire les équations (ℓ_c) qui traduisent le non glissement.
   b. Ecrire les équations de Lagrange en utilisant un C.V.V compatible avec la liaison principale (ℓ) et non compatible avec les la liaison complémentaire (ℓ_c).
   c. Indiquer comment est modifiée la mise en équation si (ℓ) et (ℓ_c) sont complémentaire et si le C.V.V est non compatible avec (ℓ) et (ℓ_c).
   d. A-t-on l'intégrale première de l'énergie cinétique ?



Exercice 3 :

Un point matériel de masse m glisse sans frottement le long d'un rail en forme d'hélice dont les équations en coordonnées cylindriques sont :

$$r = a \quad ; \quad z = b\theta \qquad (1)$$

A $t = 0$, la bille est à l'arrêt en $r = a$, $\theta = 0$, $z = 0$. On suppose que $\vec{z}$ est orienté vers le bas. La bille est soumise à l'accélération de la pesanteur g.

1. En utilisant les équations de liaison (1), écrire le Lagrangien L_z en fonction de la seule coordonnée z.
2. En déduire $z(t)$.

   On souhaite maintenant déterminer les forces de liaison dues à la liaison $z = b\theta$. Dans ce but, on réécrit l'équation de liaison holonome $f(z,\theta) = 0$ avec $f(z,\theta) = z - b\theta$, et on se propose de traiter cette liaison à l'aide d'un paramètre de Lagrange.
3. Déterminer le Lagrangien $L_{\theta z}$ du système en fonction des variables θ et z.
4. Ecrire les équations de Lagrange du système à l'aide d'un paramètre de Lagrange λ .
5. Déterminer λ.
6. En déduire les composantes L_z et L_θ de la force généralisée.
7. En utilisant la même méthode, déterminer la force généralisée L_r due à la liaison $r = a$
8. En déduire les composantes $R_r; R_\theta; R_z$ de la réaction du rail sur la bille m

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année 2014-2015

TD de Physique de vibrations – Filière SMP5
Série N°1
(Oscillateurs harmoniques)

Exercice 1

L'une des extrémités d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, est accrochée à un support vertical fixe. On vient attacher à l'autre extrémité un bloc de masse m. Le tout est immergé dans l'eau et le bloc est choisi de manière à ce que la poussée d'Archimède compense exactement son poids. Le poids du ressort et les forces de frottements sur celui-ci sont négligées.

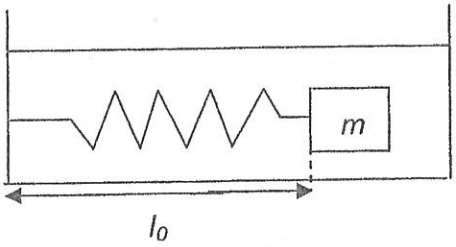


Schéma du dispositif.

1. Le bloc est écarté d'une distance a_0 de sa position d'équilibre. Il est ensuite lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution du mouvement du bloc. On prend en compte la force de frottement dans l'eau qui est de nature visqueuse, de norme proportionnelle à la vitesse du bloc et de sens opposé à celle-ci ($\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$, λ est le coefficient de frottement). On négligera tout autre effet.

2. On se place dans le cas où $k.m > \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$. Qualifier le mouvement, résoudre l'équation différentielle et représenter l'évolution temporelle de la position du bloc.

Exercice 2

On considère un bloc solide de masse m attaché par un ressort de constante de raideur k fixé à un support vertical. L'ensemble repose sur un support horizontal. A l'équilibre, le ressort n'est pas comprimé de sorte que sa longueur est égale à sa longueur à vide.

A l'instant $t = 0$, on met en marche un système mécanique permettant de moduler de manière sinusoïdale la position du bloc tel que la force appliquée sur celui-ci s'écrit :

$\vec{F} = F_0.\cos(\omega t).\vec{\imath}$ où ω est la pulsation du forçage (ou de la modulation).

On suppose que le bloc est soumis à une force de frottement de type fluide de norme proportionnelle à sa vitesse et de sens opposé à celle-ci ($\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$, λ est le coefficient de frottement). On notera g l'accélération de la pesanteur.

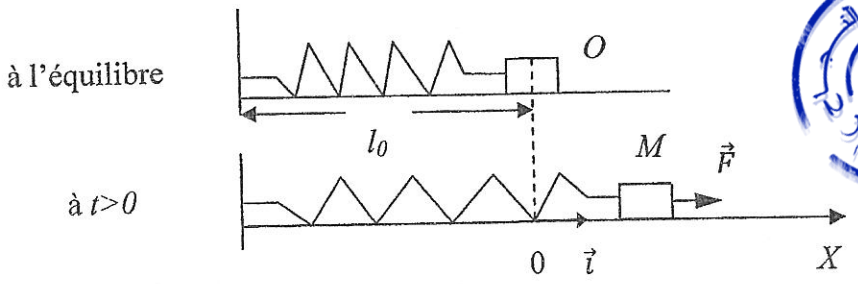


Schéma du dispositif.

1. Etablir l'équation différentielle décrivant l'évolution de la position $x(t)$ du bloc se déplaçant le long de l'axe Ox .
2. On suppose que l'oscillateur étudié est tel que la solution de l'équation précédemment établie s'écrit :

$$x(t) = A_0 e^{\frac{-\gamma.t}{2}}.\cos(\omega_a.t + \varphi) + A(\omega).\cos(\omega t + \phi(\omega)),\ \gamma = \frac{\lambda}{m}$$

   Expliquer clairement à quel type de réponse de l'oscillateur correspond chacun des deux termes composant la fonction $x(t)$. Que pensez-vous du facteur de qualité de l'oscillateur étudié ? Est-il possible de négliger l'un des deux termes et si oui, expliquer à quelle(s) condition(s) ?
3. Déterminer $A(\omega)$ en utilisant la notation complexe.
4. On considère que les frottements sont négligeables de sorte que $\gamma \approx 0$. Que devient l'amplitude des oscillations du bloc lorsque $\omega \to \omega_0$? Nommer le phénomène physique auquel se rattache le comportement obtenu.

Exercice 3

On considère deux blocs de masses respectives m_1 et m_2 liés l'un à l'autre par un ressort de constante de raideur k_2. Le bloc de masse m_1 est lié à un point d'attache fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1 et, à l'autre extrémité du système, le bloc de masse m_2 est lié à un point d'attache fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_3. La masse des ressorts est négligeable et tous les frottements sont considérés comme négligeables.

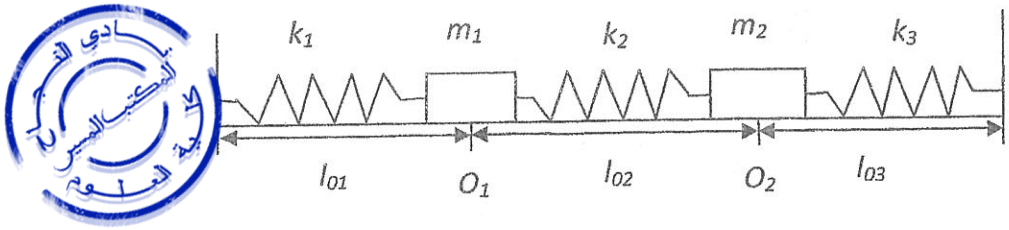


Schéma du dispositif.

1. Etablir le système d'équations différentielles décrivant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps.
2. On considère désormais que les blocs sont de masse identique de sorte que $m_1 = m_2 = m$ et que les ressorts ont la même constante de raideur $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

2.a) Ecrire le système des deux équations différentielles obtenu à la question 1 sous la forme vectorielle : $\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = A.\vec{X}$ et déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2.b) Montrer que la solution générale du système d'équations du mouvement s'écrit sous une forme simple.

2.c) Préciser le ou les mode(s) propre(s) de vibration du système d'oscillateurs et donner la ou les pulsation(s) propre(s) de vibration du système.

3. A l'instant $t = 0$:

3.a) Le bloc de masse m_1 est écarté d'une distance $a_0 > 0$ de sa position d'équilibre tandis que le bloc de masse m_2 en est écarté d'une distance $-a_0 < 0$. Les deux blocs sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.

- Donner les lois horaires d'évolution de la position des deux blocs. Préciser la nature du mode propre de vibration excité par ces conditions initiales.

3.b) Les blocs de masse m_1 et m_2 sont écartés de leur position d'équilibre d'une distance $a_0 > 0$. Les deux blocs sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.

- Donner les lois horaires d'évolution de la position des deux blocs. Préciser la nature du mode propre de vibration excité par ces conditions initiales.

Exercice 4

Considérons deux pendules simples constituée chacune d'une masse m qui peut osciller librement sous l'effet de son poids $-m\vec{g}$ autour d'un axe. La distance entre le centre de masse de chaque pendule et l'axe de rotation est dénotée par l. Les deux pendules sont couplés par un ressort horizontal de constante de rappel k à une distance a de l'axe de rotation.

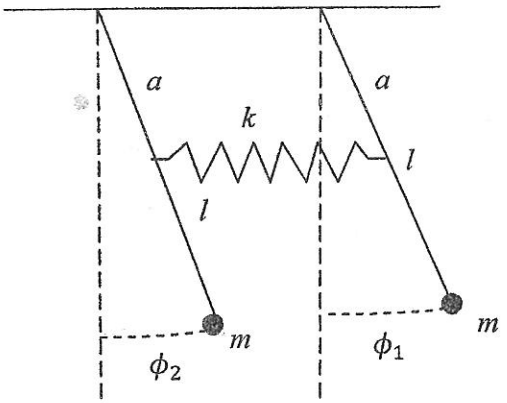


Schéma du dispositif.

1. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir les équations du mouvement pour chacune des deux pendules.
2. En introduisant les changements de variables suivants :

   $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$ et $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)$,

2. a) Ecrire les deux équations différentielles en φ_1 et φ_2.

2. b) Donner les solutions de ces deux équations différentielles en précisant les pulsations de chaque mode de vibrations du système.

3. A l'instant $t = 0$:

   3.a) Les deux pendules sont écartés de leur position d'équilibre d'une rotation de ϕ_0. Les deux pendules sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.

   - Donner les lois d'évolution de la position des deux pendules. Préciser la nature du mode propre de vibration excité par ces conditions initiales. Donner la période d'oscillation correspondante.

   3.b) Le pendule 1 est écarté d'une rotation de $\phi_0 > 0$ de sa position d'équilibre tandis que le pendule 2 est écarté d'une rotation de $-\phi_0 < 0$. Les deux pendules sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.

   - Donner les lois d'évolution de la position des deux pendules. Préciser la nature du mode propre de vibration excité par ces conditions initiales. Donner la période d'oscillation correspondante.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année 2014-2015

TD de Physique de vibrations – Filière SMP5
Série N°II
Propagation des ondes

Exercice 1

Une corde homogène et inextensible de masse linéique μ est tendue horizontalement avec une tension constante T_0. Déplacée de sa position d'équilibre, la corde acquiert un mouvement décrit par le déplacement quasi-vertical $\Psi(x,t)$, mesuré à partir de la position d'équilibre. A l'instant t, la tension $\vec{T}(x,t)$, exercée par la partie de la corde à droite d'un point M d'abscisse x sur la partie gauche de la corde à gauche de M, fait un petit angle $\theta(x,t)$ par rapport à l'horizontale (voir Figure). On négligera les effets de la force de pesanteur et des forces de frottements devant celui de la force de tension.

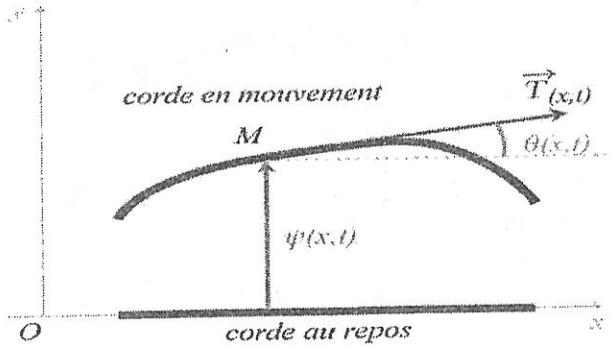


Schéma représentant la corde à l'équilibre et en mouvement.

1. En considérant un tronçon infinitésimal de la corde compris entre x et $x+dx$, montrer que : $T(x,t).\cos(\theta(x,t)) = T(x+dx,t).\cos(\theta(x+dx,t)) \approx T_0$
2. Montrer que le déplacement transversal $\Psi(x,t)$ obéit à l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Exprimer c en fonction de μ et T_0.

3. La corde semi-infinie est le siège de la propagation d'une onde progressive sinusoïdale, de pulsation ω, se déplaçant dans le sens des x croissants telle que : $\Psi(x,t) = A.\cos(\omega t - kx)$.

- En vérifiant que cette onde est effectivement solution de l'équation d'onde, donner l'expression de la relation de dispersion et de la vitesse c.

Exercice 2

Deux cordes de masses linéiques μ_1 et μ_2 sont attachées en un point de jonction O pour former une longue corde tendue horizontalement suivant l'axe Oz avec une force de tension T_0. Le point O se situe en l'abscisse $z=0$.

Une onde transversale progressive se propageant dans le sens des z croissants (l'onde incidente) arrive au niveau de la jonction O. Il s'agit d'une onde sinusoïdale d'amplitude A_I et de pulsation ω. Elle donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans le sens des z décroissants ainsi qu'à une onde transmise se propageant dans le sens des z croissants. Ces deux ondes sont aussi sinusoïdales et progressives (voir figure).

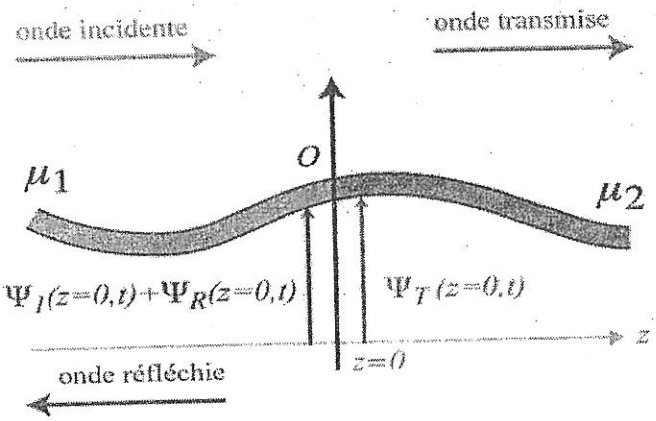


Schéma représentant la propagation d'une onde transverse à la jonction de deux cordes.

1. Donner, en notation réelle, les expressions des ondes incidentes, réfléchies et transmises. Quelle est la relation de dispersion dans la corde de masse linéique μ_1?. Quelle est la relation de dispersion dans la corde de masse linéique μ_2 ?
2. En s'appuyant sur les conditions de continuité caractérisant le passage de l'onde de la corde 1 vers la corde 2, déduire les deux équations liant les amplitudes des ondes incidentes, transmises et réfléchies.
3. Donner le coefficient de réflexion r et de transmission t en amplitude en fonction de μ_1 et de μ_2 .

Exercice 3

A l'origine des temps, une piano de masse linéique μ et de longueur L, tendue le long de l'axe horizontal $x'x$, est frappée par un petit marteau de largeur $e \ll L$ entre les abscisses a et $a+e$. Ce coup de marteau communique aux points de la corde frappés une vitesse initiale u transversale à partir de la position d'équilibre, et une vitesse nulle pour les autres points.

1. Donner l'équation de propagation que satisfont les petites élongations transversales $z(x,t)$ le long de la corde. Cette dernière se trouvant fixée à ses deux extrémités, quelles sont les solutions de cette équation ? Ecrire la solution générale.
2. Compte tenu des conditions initiales, déterminer les amplitudes des harmoniques présents.
3. En admettant que le spectre d'intensité sonore est proportionnel à l'énergie cinétique moyenne de la corde montrer qu'il est proportionnel à $(nA_n)^2$.

Exercice 4

Un tuyau cylindrique de longueur infinie et de section constante S, contient un fluide qui, au repos, est à la pression P_0, à la température T_0 et à une masse volumique ρ_0.

On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses x et $x+dx$. Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse x. Soit $\Psi(x,t)$ ce déplacement à l'instant t. La tranche de fluide considérée se trouve ainsi à l'instant t entre les plans d'abscisse $x + \Psi(x,t)$ et $x + dx + \Psi(x+dx,t)$ (voir figure).

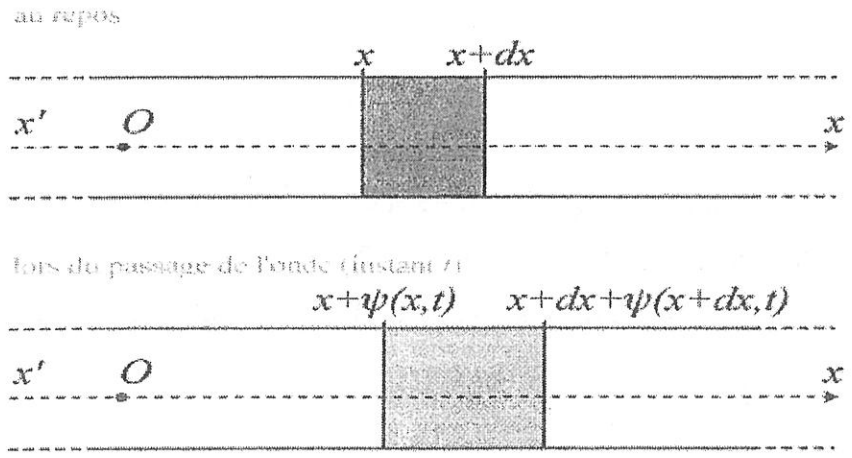


Schéma représentant la tranche de fluide au repos et à l'instant t.

On notera :

- $u(x,t)$, la vitesse de déplacement de la section d'abscisse x à l'instant t
- $p(x,t)$, la surpression acoustique liée au passage de l'onde en x à l'instant t. Ainsi la pression s'écrira $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$
- $\rho(x,t)$, la masse volumique du fluide à l'abscisse x à l'instant t.

On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes : le déplacement particulaire $\Psi(x,t)$, la surpression acoustique $p(x,t)$, la variation de la masse volumique $\rho(x,t) - \rho_0$ et leurs dérivées peuvent être considérés comme des infiniments petits du premier ordre (on négligera dans la suite tous les infiniments petits d'ordre supérieur ou égal à deux). On négligera l'action de la pesanteur ainsi que toute viscosité ou frottements.

1. En raisonnant sur la tranche de fluide considérée et en précisant la loi utilisée, retrouver l'équation : $\rho_0 \dfrac{\partial^2\Psi(x,t)}{dt^2} = -\dfrac{\partial p(x,t)}{dx}$

2. En supposant que l'évolution de la portion de fluide est isentropique, le coefficient de compressibilité isentropique d'un fluide est défini par : $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)$ où V est le volume du fluide et P sa pression.

Pour le fluide contenu dans le tuyau cylindrique, on supposera que χ_s est une constante.

Montrer que l'on peut écrire : $p(x,t) = -\dfrac{1}{\chi_s}\dfrac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}$

3. a) En utilisant les résultats des questions 1) et 2), établir l'équation d'onde à laquelle satisfait la grandeur $\Psi(x,t)$. Exprimer v (vitesse du son) en fonction de ρ_0 et χ_s .

b) Montrer que les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ satisfont à la même équation de propagation que $\Psi(x,t)$.

Exercice 5

Un tube cylindrique de longueur infinie et de section constante S, contient deux fluides (1) et (2) de résistivité acoustique $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$, respectivement. L'origine O du repère est placé à l'abscisse $x = 0$ de sorte que le fluide (1) soit dans la région des $x < 0$ et le fluide (2) dans la région des $x > 0$ (voir figure).

Exercice 3

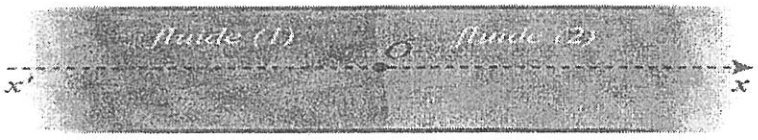


Schéma représentant le tronçon de tube à la jonction des deux milieux.

Une onde acoustique plane progressive se propageant dans le sens des x croissants (l'onde incidente) arrive au niveau de la jonction en O. Cette onde s'accompagne d'une surpression acoustique s'écrivant sous la forme $p_I(x,t) = A_I.\sin(\omega t - k_1.x)$ et étant solution de l'équation d'onde :

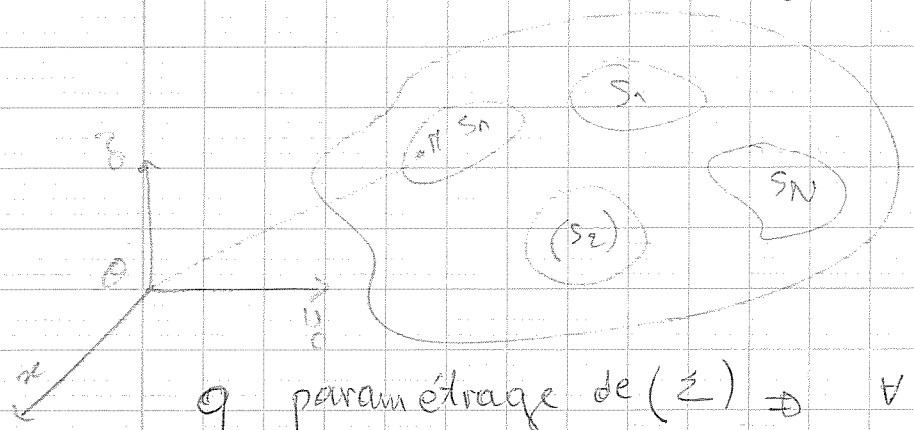
$$\frac{\partial^2 p_I(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{c_1^2}.\frac{\partial p_I(x,t)}{dt^2}$$

avec $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \chi_{s_1}}}$, à la condition que $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ (relation de dispersion pour $k_1 > 0$). Elle donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants ainsi qu'à une onde transmise se propageant dans le sens des x croissants. Ces deux ondes sont aussi sinusoïdales et progressives.

1. Donner, en justifiant votre réponse, les expressions réelles des surpressions acoustiques associées aux ondes réfléchies et transmises.
2. La résistivité acoustique d'un fluide à l'abscisse x et à l'instant t s'écrit : $Z = \frac{p(x,t)}{u(x,t)}$
   a) En s'appuyant sur les conditions de continuité caractérisant le passage de l'onde du fluide (1) vers le fluide (2), déduire les deux équations liant les amplitudes des ondes incidentes, transmises et réfléchies.
   b) Donner le coefficient de réflexion r et de transmission t en amplitude en fonction de Z_1 et de Z_2.
3. La puissance sonore moyenne véhiculée par chaque onde acoustique est donnée par la relation : $\langle P \rangle = S\,|\langle p(x,t).u(x,t)\rangle|$.

   -Déterminer le coefficient de réflexion R et de transmission T relatif aux puissances acoustiques. Quelle remarque peut-on faire au sujet de ces coefficients?

$\Sigma = (S_1) \cup (S_2) \cup \dots \cup (S_N)$



coordonnées généralisées

q paramétrage de $(\Sigma) \Rightarrow \forall M \in (\Sigma)\ \vec{OM}(q_1 \dots$

$(q_1, \dots, q_m)$. cas générale $m = 6N$

liaison holonome : $f(q,t) = 0$

" non holo : $f(q, \dot{q}, t) = 0$

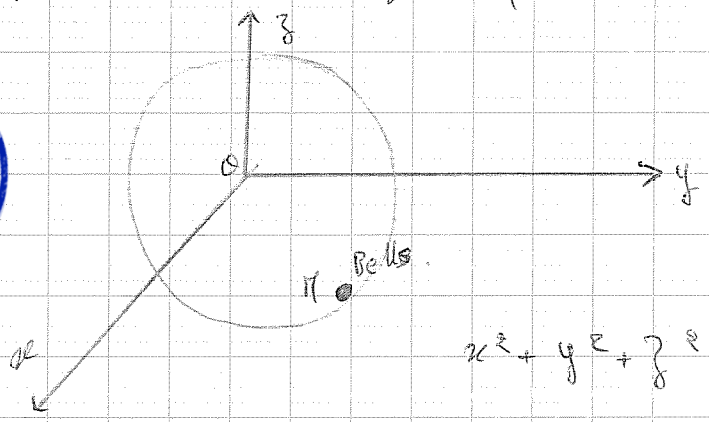
$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.

vitesses généralisées

liaison bilatérale : liaison permanente (ne cesse pas)

$f(q,t) = 0$.

" unilatérale : liaison que cesse $f(q,t) \leq 0$.



$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

liaison scléronome pas opposition à liaison rhéonome	$f(q) = 0$ ou $f(q, \dot{q}) = 0$

(E.L.H)

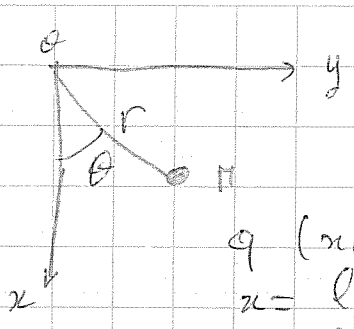
* Réduction de paramétrage. à l'ordre d'éq de liaison

* Paramétrage complet possible toutes les éq sont holonomes

$q = (r, \theta)$

$r = cte$

$q(\theta)$



$q(x, y)$

$x = l\cos\theta$

$y = l\sin\theta$

$x^2 + y^2 = l^2$

$q = (x)$

* NDL

Nombre de param indép

$q(x, y, z)$

$z = 0$

$x^2 + y^2 = l^2$.

$q = (x)$.

nombre de paramètres

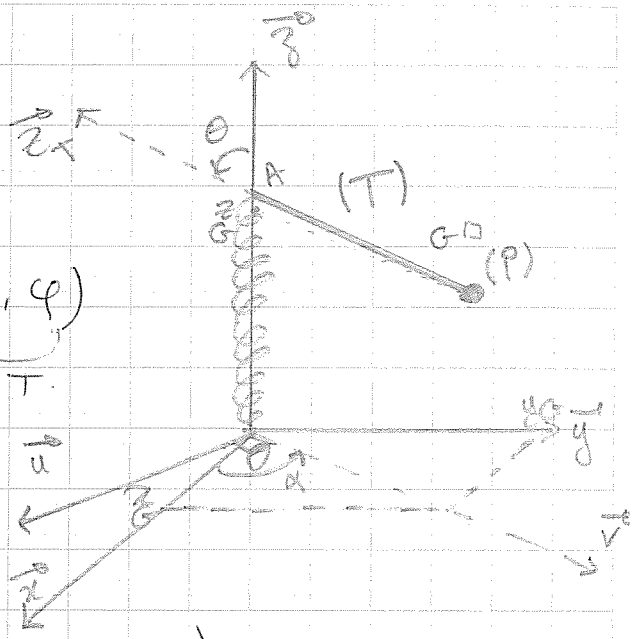
- Nombre de liaison.

نادي التحدي
المكتب العلمي
كلية العلوم

MECANIQUE ANALYTIQUE

Série 1 :

1°/ $q_{(\Sigma)}$?

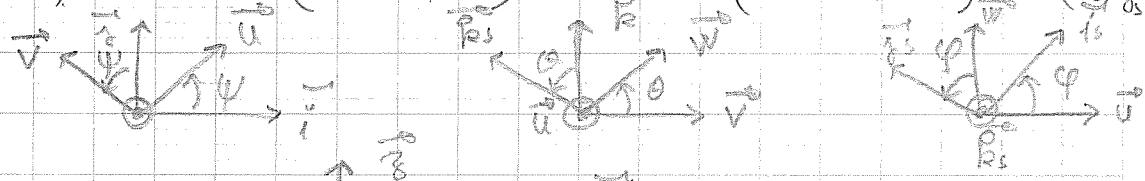


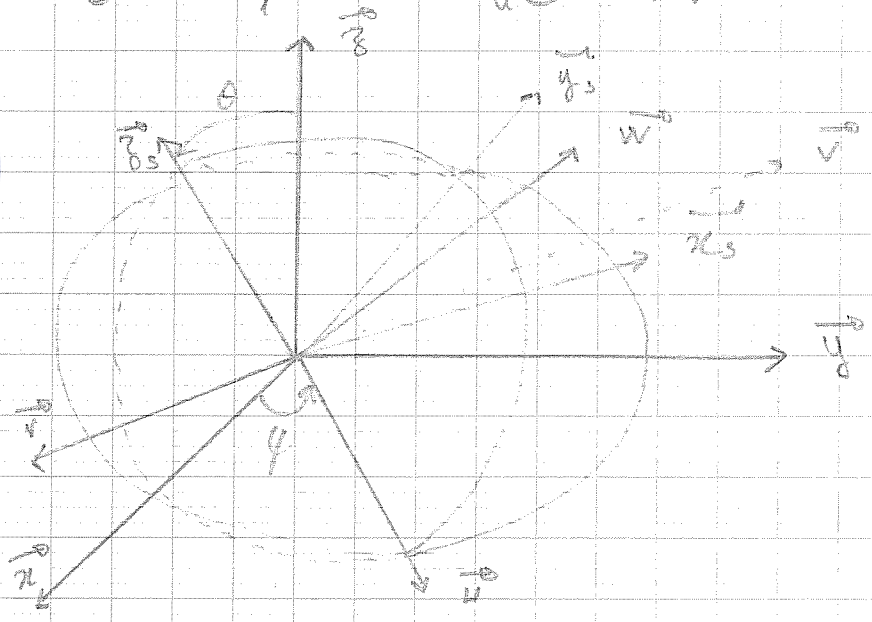
$$q = (\underbrace{x_P, y_P, z_P}_{\text{param de } P}, \underbrace{x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi}_{\text{parametre de } T})$$

Ici (T) est une tige ⇒ pas de rotation propre

$$\Rightarrow q = (x_P, y_P, z_P, x_G, y_G, z_G, \psi, \theta)$$

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{\psi} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \xrightarrow{\theta} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_s) \longrightarrow (\vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$$

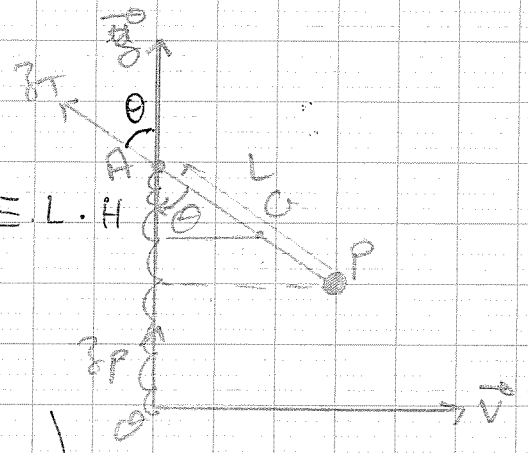




on a $\psi = \alpha + \frac{3\pi}{2}$ (car $\psi = (\vec{i}, \vec{u})$

$\Rightarrow q = (x_P, y_P, z_P, x_G, y_G, z_G, \alpha, \theta)$.

2°/ éq de liaison :



on a :

$$\left.\begin{aligned} z_P &= \lambda(t) - L\cos\theta \\ z_G &= \lambda(t) - \frac{L}{2}\cos\theta \end{aligned}\right\} \text{E.L.H}$$

$$\left.\begin{aligned} x_P &= L\sin\theta\cos\alpha \\ y_P &= L\sin\theta\sin\alpha \\ x_G &= \frac{L}{2}\sin\theta\cos\alpha \\ y_G &= \frac{L}{2}\sin\theta\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \text{E.L.H}$$

وادي الشعير
المكتبة المركزية
كلية العلوم

3°/ Toutes les éq de liaisons sont holonomes.
$\Rightarrow$ on peut obtenir un parametrage complet :

$$q = (\theta, \alpha).$$

4°/ $NDL \Rightarrow \underset{\text{Nbre de parametre}}{8} - \underset{\text{Nbre d'éq de Liaison.}}{6} = 2.$

5°/ $E_{P(\Sigma)}$, $E_{C}(\Sigma)$?

$E_{P(\Sigma)} = E_{P(P)} + E_{P(T)}$, $E_{C(\Sigma)} = E_{C(P)} + E_{C(T)}$

$$E_{p(\Sigma)} = mg z_P + mg z_G + cte.$$

$$= mg\left(\lambda - L\cos\theta + \lambda - \frac{L}{2}\cos\theta\right) + cte.$$

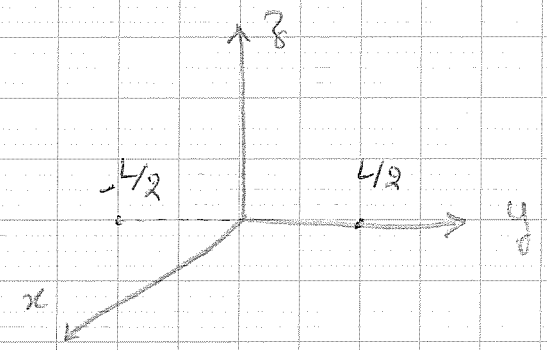
$$\boxed{E_{p(\Sigma)} = mg\left(2\lambda(t) - \frac{3}{2}L\cos\theta\right) + cte.}$$

$$E_{c(\Sigma)} = \frac{1}{2} m \vec{V}_R^{\,2}(P) + \frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}^{(T/R)}\,[I_G]\,\vec{\Omega}^{T/R} + \frac{1}{2} m V_R^2(G)$$

$\vec{\Omega}(T/R)$?

$[I_G]$?

Rappel: $\vec{\Omega}^{(S/R)} = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{k_S}$



$$[I_G] = \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{pmatrix} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

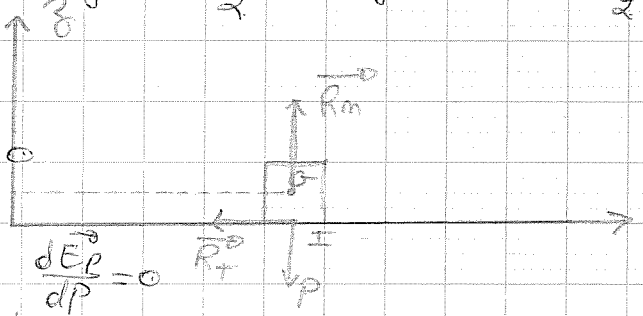
5°/ $E_{p(\Sigma)}$, $E_{c(\Sigma)}$?

* $E_{p(\Sigma)} = E_{p(P)} + E_{p(T)}$

$$= mg z_P + mg z_G + \frac{1}{2} k (\lambda - l_0)^2 + cte$$

$$= mg(\lambda - L\cos\theta) + mg\left(d - \frac{L}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2} k (d - l_0)^2 + c$$

$$E_{p(\Sigma)} = 2mgd - \frac{3}{2} mgL\cos\theta + \frac{1}{2} k (d - l_0)^2 + cte$$



$P(R_m) = \vec{R_m} + \vec{V}(I) = 0$

$\exists ! E_p \Rightarrow R_m = \frac{d\vec{E_p}}{dP} = 0$

$\vec{E_p} = cte$

* $E_{c(\Sigma)} = E_{c(P)} + E_c(T)$

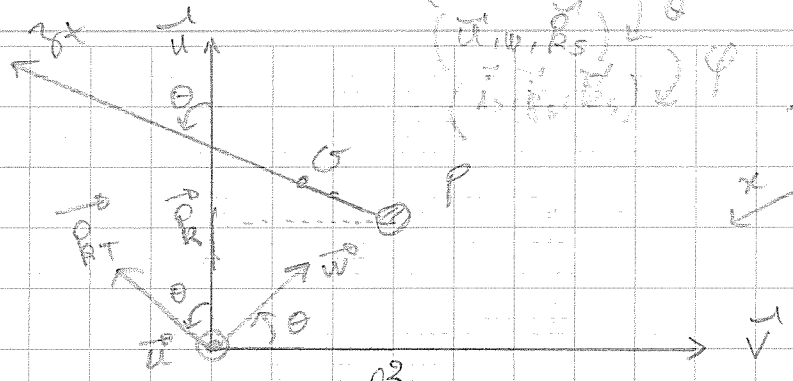
$$= \frac{1}{2} m \vec{V}_R^2(R) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(T/R) [J_G] \vec{\Omega}(T/R) + \frac{1}{2} m \vec{V}_R^2(G)$$

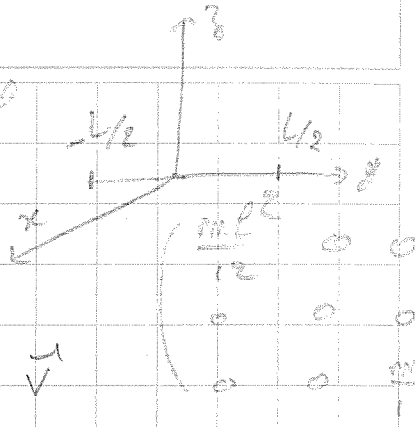
$$E_{c(\Sigma)} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \dot{z}_P^2) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(T/R) [J_G] \vec{\Omega}(T/R)$$

$$+ \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2)$$

$$\vec{\Omega}(T/R) = \underbrace{\dot{\psi}}_{=\dot{\alpha}} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{u} + \underbrace{\dot{\varphi}}_{=0} \vec{k}_s$$

$$= \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\alpha} \vec{k}$$





$$[J_G]_T = \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_T)}$$

$$\vec{\Omega}(T/R) = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\alpha}\,\vec{k}$$

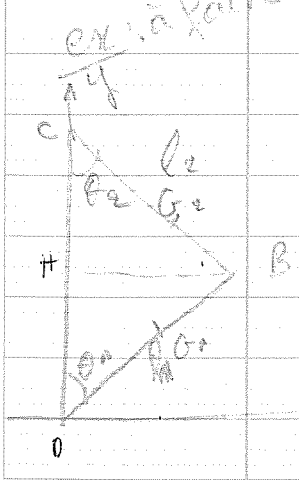
$$= \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\alpha}\left[\cos\theta\,\vec{k}_T + \sin\theta\,\vec{w}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha}\sin\theta \\ \dot{\alpha}\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_T)}$$

on trouve après calcul (à faire)

$$Ec(\Sigma) = \frac{2}{3} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3} m L^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2\theta + m v^2 - \frac{3}{2} m v \dot{\theta} L \sin\theta$$

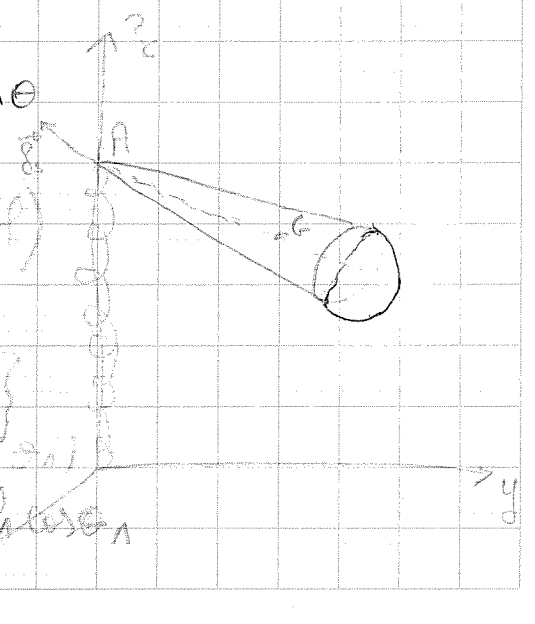
ex à faire



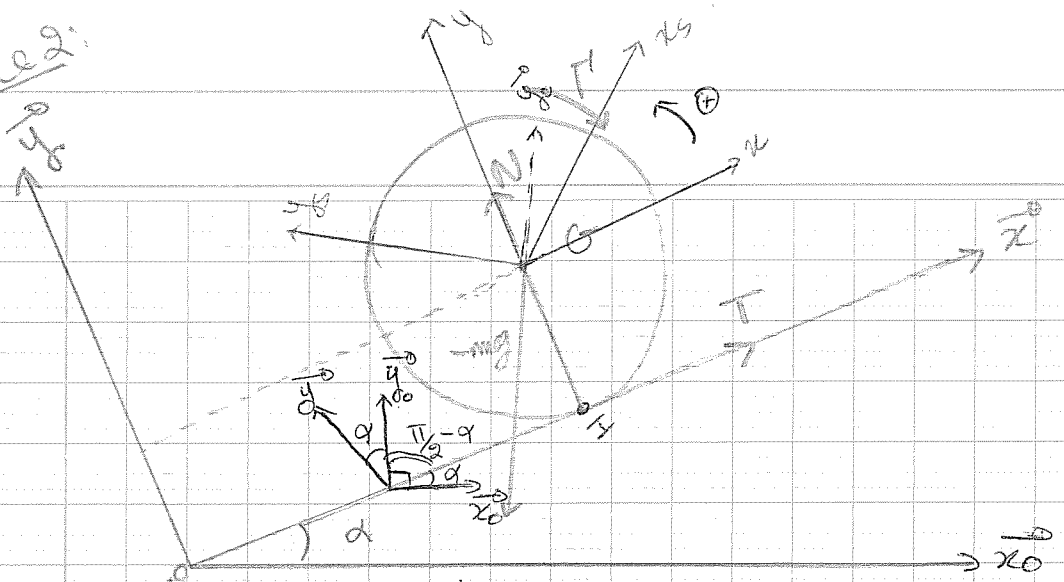
$$q = (x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi) = (\psi, \theta, \varphi)$$

$$q(x_{G_1}, y_{G_1}, \theta_1, x_{G_2}, y_{G_2}, \theta_2)$$

$$q = (\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2)$$



Exercice 2 :



Données : $m, r, \alpha, \vec{F}, \ddot{x}_G$.

objectif : Γ

outils : PTV et P.P.V.

Question préliminaire :

Γ à partir du PFD $\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{\gamma_G} \\ \sum \vec{M_G} = \vec{\delta_G} \end{cases}$

Rappel :

PTV ou P.P.V

$\forall$ mvt virtuel $W_d^* + W_\ell^* = W_a^*$ (P.T.V)

" $P_d^* + P_\ell^* = P_a^*$ (P.P.V)

Σ

$q = (q_1 \; \ldots \; q_n)$

inconnues :

$\begin{cases} q_1(t) \; \ldots \; q_n(t) \\ \text{action de liaison} \end{cases}$

نادي التميز
المكتب المسير
كلية العلوم

PTV, $\forall$ mvt virtuel : $W_d^* + W_e^* = W_a^*$

PPV, $\forall$ mvt " : $\mathcal{P}_d^* + \mathcal{P}_e^* = \mathcal{P}_a^*$

$$W_d^* = [\vec{F_d}] \cdot [\delta \vec{M}], \quad W_e^* = [\vec{F_e}] [\delta \vec{M}], \quad W_a^* = [\vec{D}]$$

$$\mathcal{P}_d^* = [\vec{F_d}] [\vec{V}^*], \quad \mathcal{P}_e^* = [\vec{F_e}] \cdot [\vec{V}^*], \quad \mathcal{P}_a^* = [\vec{D}]$$

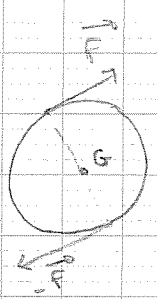
$[\vec{F_d}]$, $[\vec{F_e}]$, $[\vec{D}]$: torseurs : des forces données
des " de liaison
et dynamique

Ex :

$[\vec{F_d}]$:

$\vec{R} = \vec{0}$

$\vec{m}(G) = \underbrace{\vec{AO} \wedge \vec{F}}_{\vec{\Gamma}}$



$\vec{R} = 0$

$\vec{m}(G) = \vec{GA} \wedge \vec{F} + \vec{GB} \wedge \vec{F}$

$= (\vec{GA} + \vec{GB}) \wedge \vec{F}$

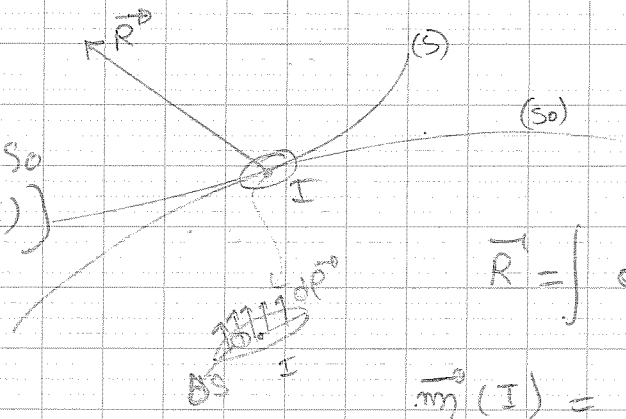
$= -\vec{AB} \wedge \vec{F}$

$= \vec{F} \wedge \vec{AB}$

$$[\vec{F_d}] = \begin{bmatrix} -mg\vec{y_0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\Gamma} = -\Gamma \vec{z_0} \end{bmatrix}_G$$

<u>Rappel</u> :

action de S/S0
$[\vec{R}, \vec{m}(I)]$



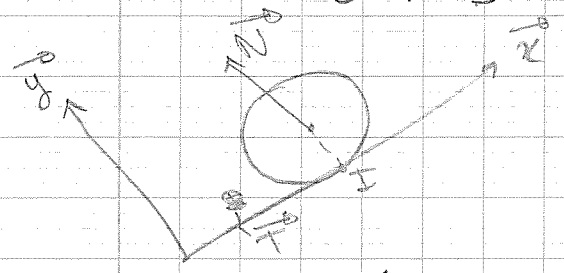
$$\vec{R} = \int d\vec{f}$$

$$\vec{m}(I) = \int_{\Delta S} \vec{IM} \wedge d\vec{f}$$

Si contact par faisceau ponctuel $\Rightarrow \vec{m}(I) = \vec{0}$

Si l'on suppose le contact entre (s) et ox parfaitement ponctuel,

$$[\vec{F}_e] = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ (I)\vec{M} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T\vec{x} - N\vec{y} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$



$$[D] = \begin{bmatrix} m\vec{\gamma}(G) \\ \vec{\delta}(G) \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} m\ddot{x}_G\ \vec{x} \\ \dfrac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_G = \int_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{V}_R(M)\, dm = [J_G]\, \vec{\Omega}(S/R)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \cancel{\frac{1}{4} m R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{\frac{1}{4} m R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{\frac{1}{2} m R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$= J\dot{\theta}\vec{z}$$

donc : $$[D] = \begin{bmatrix} m\ddot{x}_G\ \vec{x} \\ J\ddot{\theta}\vec{z} \end{bmatrix}$$

mvt virtuels considérés :

a) rotation virtuelle $\delta\theta\vec{z}$

b) translation virtuelle. $\delta x\ \vec{x}$

$$[\delta \vec{M}] = ? \qquad [V^*] \; ?$$

cas a : $[\vec{V}^*] = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_G \qquad \delta\vec{M} = \begin{bmatrix} -\delta\theta\vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_G$

cas b : $[\vec{V}^*] = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \ddot{x}\,\vec{x} \end{bmatrix}_G \quad , \quad \delta\vec{M} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta x\,\vec{x} \end{bmatrix}_G$

P.T.V : (cas a)

$$[\vec{F_d}]_G \cdot [\delta\vec{M}]_G + [\vec{F_e}]_G [\delta\vec{M}]_G = [D]_G \, \delta\vec{M}$$

$$\begin{bmatrix} -mg\vec{y_0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} -\delta\theta\vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ -\Gamma\vec{z} \end{bmatrix}_G \times \begin{bmatrix} -\delta\theta\vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} -T\vec{x} - N\vec{y} \\ \underbrace{\vec{m}(G)}_{\vec{m}(I) + \vec{R}\wedge\vec{IG} = \vec{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\delta\theta \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m\ddot{x}_G\,\vec{x} \\ J\ddot{\theta}\,\vec{z} \end{bmatrix}_G \times \begin{bmatrix} -\delta\theta\vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \qquad = (-T\vec{x} - N\vec{y}) \wedge r\vec{y} = -rT\vec{z}$$

$$= \vec{0} + \Gamma\,\delta\theta + rT\delta\theta = -J\ddot{\theta}\,\delta\theta$$

$$\boxed{\Gamma + rT = -J\ddot{\theta}} \quad (1)$$

PTV : (cas b)

$$\begin{bmatrix} -mg\vec{y_0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta x\,\vec{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ -\Gamma\vec{z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta x\,\vec{x} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -T\vec{x} + N\vec{y} \\ -rT\vec{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta x\,\vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\ddot{x}_G\,\vec{x} \\ J\ddot{\theta}\,\vec{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta x\,\vec{x} \end{bmatrix}$$

نادي الشرطة
المكتبة المركزية
جامعة العلوم

$$-mg\,\delta x\,\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{x}}_{\sin\alpha} + 0 - T\,\delta x = m\,\ddot{x}_G\,\delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{-mg\sin\alpha - T = m\,\ddot{x}_G} \quad (2)$$

2°/ C.R.S.G : $V_R(I \in S) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{V}_R(G) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_G\,\vec{x} + \dot{\theta}\,\vec{z} \wedge -r\vec{y} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\dot{x}_G + r\dot{\theta})\,\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_G + r\dot{\theta} = 0} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_G + r\ddot{\theta} = 0} \quad (4)$$

(1), (2), (3), (4) permettent d'avoir T

on trouve après calcul :

$$T = mgr\sin\alpha - (J + mr^2)\,\underbrace{\ddot{\theta}}_{-\frac{\ddot{x}_G}{r}}$$

$$\boxed{T = mgr\sin\alpha + (J + mr^2)\,\frac{\ddot{x}_G}{r}}$$

Ainsi, connaissant m, r, α, T et $\ddot{x}_G$

T sera déterminé

PPV : (cas a) $\vec{V}$ par $\delta\vec{M}$ par

$$[\vec{F_d}]_G \cdot [\vec{V}]_G + [\vec{F_\ell}]_G \cdot [\vec{V_R}]_G = [\vec{D}] \cdot [\vec{V}]_G$$

faire le calcul.

PPV : (cas b) $\dot{x}\,\vec{x}$ par $\delta x\,\vec{x}$.

P.F.D :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\,\vec{\gamma}(G) \\ \sum \vec{M}(G) = \vec{\delta}(G) = \dfrac{d\vec{\sigma_G}}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = m\,\ddot{x}_G\,\vec{x} \\ \vec{GI} \wedge \vec{T} + \vec{GI} \wedge \vec{N} + 0 + \vec{\Gamma} = J\,\ddot{\theta}\,\vec{z} \end{cases}$$

$\delta(A) = \dfrac{d\vec{\sigma_A}}{dt}$ si A fixe ou $A = G$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -T - mg\sin\alpha = m\,\ddot{x}_G \\ N - mg\cos\alpha = 0 \\ -r\vec{y} \wedge -T\vec{x} - \Gamma\vec{z} = J\,\ddot{\theta}\,\vec{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T - mg\sin\alpha = m\,\ddot{x}_G \quad (2) \\ N = mg\cos\alpha \\ -rT - \Gamma = J\,\ddot{\theta} \quad (1) \end{cases}$$

نادي الشباب
المكتبة المركزية
كلية العلوم

Exercice 3

1. Calculs préliminaires :

1.1 $q = (\theta_1, \theta_2)$ un paramétrage complet du système donc $\forall$ le C.V.V il est compatible avec les équations de liaison.

$$\overrightarrow{OG_1} = b_1 \vec{z}_1 \Rightarrow \vec{V}_{G_1/R} = b_1 \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{z}_1 = b_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{G_1/R} = b_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{V}^*_{G_1/R} = b_1 \dot{\theta}^*_1 \vec{x}_1$$

1.2 $\vec{a}_{G_1} = b_1 \ddot{\theta}_1 \vec{x}_1 - b_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1$

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}_1 \vec{z}_1$$

1.3 $\overrightarrow{OG_2} = a_1 \vec{z}_1 + b_2 \vec{z}_2$

$$\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_R = \dot{\theta}_1 \vec{x}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{x}_2$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{G_2/R} = a_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + b_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{x}_2$$

et $\vec{V}^*_{G_2/R} = a_1 \dot{\theta}^*_1 \vec{x}_1 + b_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2) \vec{x}_2$

1.4 $\vec{a}_{G_2/R} = a_1 \ddot{\theta}_1 \vec{x}_1 + a_1 \dot{\theta}_1 \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_R + b_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{x}_2$
$+ b_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right|_R$

$$\vec{a}_{G_2/R} = a_1 \ddot{\theta}_1 \vec{x}_1 - a_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1 + b_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{x}_2 - b_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{z}_2$$

1.5 Puissances virtuelles des forces d'inertie :

en G_1 : $\vec{P}^*_{a_1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{G_1} \\ \vec{\delta}_{G_1} = I_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}^*_1 \vec{y}_1 = \vec{\Omega}^*_{S_1/R} \\ \vec{V}^*_{G_1} = b_1 \dot{\theta}^*_1 \vec{x}_1 \end{array} \right.$

I_1 : moment d'inertie de S_1 / Gy_1

$$P^*_{a_1} = m_1 b_1^2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_1^* + I_1 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_1^* = (I_1 + m_1 b_1^2)\ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_1^*$$

<u>En G_2</u>

$$P^*_{a_2} = \left\{ \begin{matrix} \vec{a}_{G_2} \\ \vec{\delta}_{G_2/R} \end{matrix} \right\}_{G_2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}^*(S_2/R) \\ \vec{V}^*_{G_2/R} \end{matrix} \right\}$$

est négligeable on va pas la calculer.

<u>1.6</u> Puissance ~~virtuelle~~ développée par l'action des ressorts :

$$P^*_{k_1} = \{\mathcal{C}_1\}_{O_1} \cdot \{\mathcal{C}^*_{O_1}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ k_1 \theta_1 \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_{O_1} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}^*(S_1/R) = \dot{\theta}_1^* \vec{y} \\ \vec{V}^*_{O_1} = \vec{0} \end{matrix} \right\}$$

$$\boxed{P^*_{k_1} = k_1 \theta_1 \dot{\theta}_1^*}$$

$$P^*_{k_2} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ k_2 \theta_2 \vec{y}_1 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}^*(S_2/R) = (\dot{\theta}_1^* + \dot{\theta}_2^*)\vec{y}_1 \\ \vec{V}^*(O_2) \end{matrix} \right\}$$

$$\boxed{P^*_{k_2} = k_2 \theta_2 (\dot{\theta}_1^* + \dot{\theta}_2^*)}$$

نادي الأستاذ
المكتبة المركزية
لجنة العلوم

1.7 Puissance développée par l'action des moteurs

$$P^*_{M_1} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ c_1 \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_{O_1} \cdot \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}_1^* \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = c_1 \dot{\theta}_1^*$$

$$P^*_{M_2} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ c_2 \vec{y}_1 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} (\dot{\theta}_1^* + \dot{\theta}_2^*)\vec{y}_1 \\ \vec{V}^*(O_2) \end{matrix} \right\} = c_2 (\dot{\theta}_1^* + \dot{\theta}_2^*)$$

2) Calcul du couple moteur

2.1 Puissance virtuelle developpée par l'action de g en G_1 et G_2.

$$P^*_{g_1} = \left\{ \begin{matrix} m_1 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}^*(S_1/R) \\ \vec{V}^*_{G_1/R} \end{matrix} \right\} = m_1 g b_1 \dot{\theta}^*_1 \vec{x}_1 \vec{z}_0$$

$$\boxed{P^*_{g_1} = - m_1 b_1 g \sin\theta_1 \dot{\theta}^*_1}$$

$$P^*_{g_2} = \left\{ \begin{matrix} m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}^*(S_2/R) \\ \vec{V}^*_{G_2/R} \end{matrix} \right\}$$

$$= a_1 m_2 g \dot{\theta}^*_1 \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_1 + m_2 g b_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2) \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_2$$

$$\boxed{P^*_{g_2} = - a_2 m_2 g \sin\theta_1 \dot{\theta}^*_1 - m_2 g b_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Application du principe des puissances virtuelle P.P.V :

$$P^*_{k_1} + P^*_{k_2} + P^*_{M_1} + P^*_{M_2} + P^*_{g_1} + P^*_{g_2} + \underset{0}{\underset{\parallel}{P^*_L}} = P^*_{a_1} + \underset{0}{\underset{\parallel}{P^*_{a_2}}}$$

$P^*_L = 0$ car liaisons parfaite et le champs de vitesse virtuelle est compatible avec les liaison.

$P^*_{G_2} = 0$ car elle est negligée

$$k_1\theta_1\dot{\theta}_1^* + k_2\theta_2(\dot{\theta}_1^* + \dot{\theta}_2^*) + c_1\dot{\theta}_1^* + c_2(\dot{\theta}_1^* + \dot{\theta}_2^*)$$

$$- m_1 b_1 g \sin\theta_1\, \dot{\theta}_1^* - m_2 a_2 g \sin\theta_1\, \dot{\theta}_1^* - m_2 b_2 g(\dot{\theta}_1^* + \dot{\theta}_2^*)\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$= (I_1 + m_1 b_1^2)\,\ddot{\theta}_1\,\dot{\theta}_1^*$$

$$\Rightarrow \overbrace{\Big[k_1\theta_1 + k_2\theta_2 + c_1 + c_2 - m_1 b_1 g\sin\theta_1 - m_2 a_2 g \sin\theta_1 - m_2 g b_2 \sin(\theta_1+\theta_2) - (I_1 + m_1 b_1^2)\ddot{\theta}_1\Big]}^{=0}\dot{\theta}_1^*$$

$$+ \Big[\underbrace{k_2\theta_2 + c_2 - m_2 b_2 g \sin(\theta_1+\theta_2)}_{=0}\Big]\dot{\theta}_1^* = 0 \qquad \forall\, \dot{\theta}_1^*, \dot{\theta}_2^*$$

$$\Rightarrow k_2\theta_2 + c_2 - m_2 b_2 g \sin(\theta_1+\theta_2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = m_2 b_2 g \sin(\theta_1+\theta_2) - k_2\theta_2}$$

et

$$\Rightarrow k_1\theta_1 + c_1 - (m_1 b_1 + m_2 a_2) g \sin\theta_1 - (I_1 + m_1 b_1^2)\ddot{\theta}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = (m_1 b_1 + m_2 a_2) g \sin\theta_1 + (I_1 + m_1 b_1^2)\ddot{\theta} - k_1\theta_1}$$

3°) Calcul de la tension en O_1 :

on pose $\overrightarrow{O_1O_2} = a\,\vec{z}_1$ avec $a = 0$

et on choisi le paramétrage $q = (a, \theta_1, \theta_2)$ non complet et l'équation de liaison supplémentaire $\underline{a = 0}$

On : $\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1G_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{V}^*_{G_1} = \overrightarrow{V}^*_{O_1} + \overrightarrow{V}^*_{G_1}$ (obtenue dans la question 1.1)

1) $$\boxed{\overrightarrow{V}^*_{G_1} = \dot{a}^* \vec{z}_1 + (a + b_1)\dot{\theta}^*_1 \vec{x}_1}$$

on choisit un C.V.V non compatible avec l'équation $a = 0$ c.à.d $\dot{a}^* \neq 0$

$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1G_2} \Rightarrow \overrightarrow{V}^*_{G_2} = \overrightarrow{V}^*_{O_1} + \overrightarrow{V}^*_{G_2}$ (obtenue dans 1.3)

2) $$\overrightarrow{V}^*_{G_2} = \dot{a}^* \vec{z}_1 + (a + a_1)\dot{\theta}^*_1 \vec{x}_1 + b_2(\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2)\vec{x}_2$$

3) Calcul des puissances virtuelles :

$$P^*_{g_1} = m_1 g \cos\theta_1 \dot{a}^* - m_1 g (a + b_1) \sin\theta_1 \dot{\theta}^*_1$$

$$P^*_{g_2} = m_2 g \cos\theta_1 \dot{a}^* - m_2 g (a + a_1) \sin\theta_1 \dot{\theta}^*_1 - m_2 g b_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$P^*_{k_1} = k_1 \theta_1 \dot{\theta}^*_1 \quad , \quad P^*_{k_2} = k_2 \theta_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2)$$

$$P^*_{M_1} = C_1 \dot{\theta}^*_1 \quad , \quad P^*_{M_2} = C_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2)$$

Forces de liaisons en O_1 :

$$P^*_L = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = T\vec{z}_1 + N\vec{x}_1 \\ \vec{M}_{O_1} = \vec{0} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}^*(S_1/R) \\ \vec{V}^*_{G_1/R} = \dot{a}^* \vec{z}_1 + a\dot{\theta}^*_1 \vec{x}_1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{P^*_L = \dot{a}^* T + a N \dot{\theta}^*_1}$$

Force d'inertie en G_1

$$P^*_{G_1} = \vec{a}_{G_1} \vec{V}^*_{G_1} + \vec{\delta}_{G_1} \cdot \vec{\Omega}^*(S_1/R)$$

$$P^*_{G_1} = m_1 b_1 (a+b_1) \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}^*_1 - m_1 b_1 \dot{\theta}_1^2 \dot{a}^*$$

P.P.V : $P^*_{g_1} + P^*_{g_2} + P^*_{K_1} + P^*_{K_2} + P^*_{\Pi_1} + P^*_{\Pi_2} + P^*_L = P^*_q$

$$\Rightarrow m_1 g \cos\theta_1 \dot{a}^* - m_1 g (a+b_1) \sin\theta_1 \dot{\theta}^*_1 + m_2 g \cos\theta_1 \dot{a}^*$$
$$- m_2 g (a+a_1) \sin\theta_1 \dot{\theta}^*_1 - m_2 g b_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2) \sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$+ k_1 \theta_1 \dot{\theta}^*_1 + k_2 \theta_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2) + C_1 \dot{\theta}^*_1 + C_2 (\dot{\theta}^*_1 + \dot{\theta}^*_2)$$
$$+ \dot{a}^* T + a N \dot{\theta}^*_1 = m_1 b_1 (a+b_1) \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}^*_1 - m_2 b_1 \dot{\theta}_1^2 \dot{a}^*$$

$$\Rightarrow [m_1 g \cos\theta_1 + m_2 g \cos\theta_1 + T] \dot{a}^* + [-m_1 g (a+b_1) \sin\theta_1$$
$$- m_2 g (a+a_1) \sin\theta_1 - m_2 g b_2 \sin(\theta_1+\theta_2) + k_1 \theta_1$$
$$+ k_2 \theta_2 + C_1 + C_2 + a N] \dot{\theta}^*_1 + [-m_2 g b_2 \sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$+ k_2 \theta_2 + C_2] = m_1 b_1 (a+b_1) \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}^*_1 - m_2 b_1 \dot{\theta}_1^2 \dot{a}^*$$

$\forall \dot{\theta}^*_1, \dot{a}^*, \dot{\theta}^*_2$

$$\Rightarrow m_1 g \cos\theta_1 + m_2 g \cos\theta_2 + T = m_2 b_1 \dot{\theta}_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = m_2 b_1 \dot{\theta}_1^2 - (m_1+m_2) g \cos\theta_1}$$

et $\quad -m_2 g b_2 \sin(\theta_1+\theta_2) + k_2\theta_2 + c_2 = 0$

$a=0 \Rightarrow \quad -m_1 g b_1 \sin\theta_1 - m_2 g a_1 \sin\theta_1 - m_2 g b_2 \sin(\theta_1+\theta_2)$

$+ k_1\theta_1 + k_2\theta_2 + c_1 + c_2 = m_1 b_1^2 \ddot{\theta}_1$

$\Rightarrow \quad -(m_1 b_1 + m_2 a_1) g \sin\theta_1 + k_1\theta_1 + c_1 = m_1 b_1^2 \ddot{\theta}_1 .$

للمزيد من الدروس والتمارين زورا موقعنا الإلكتروني
www.clubnajah.com
لا تترددوا في طرح استفساراتكم عبر البريد الالكتروني أو صفحتنا الرسمية عبر الفايسبوك

Clubnajah2013@gmail.com
www.facebook.com/succes.club
بالتوفيق للجميع
مع تحيات المكتب المسير لنادي النجاح

Série 2 : Exercice n°1

PPV : $\forall$ CVV

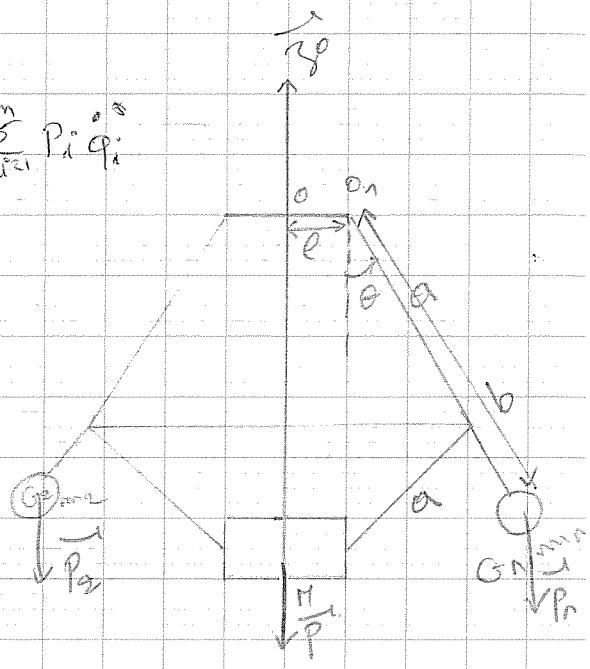
$$\delta P_d^* + \delta P_l^* = \delta P_a^*$$

$$\delta P_a^* = \sum_{i=1}^{m} P_i \dot{q}_i^*$$

$$\delta P_d^* = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \dot{q}_i^*$$

$$\delta P_l^* = \sum_{i=1}^{m} L_i \dot{q}_i^*$$

$$\varphi_i + L_i = P_i$$



G_2, m_2 :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}}$$

E.L

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \varphi_i + L_i}$$

Eq. Générale de Lagrange

inconnues : q_i ? L_i ?

Cas particulieres :

- liaison parfait
- paramètre complet

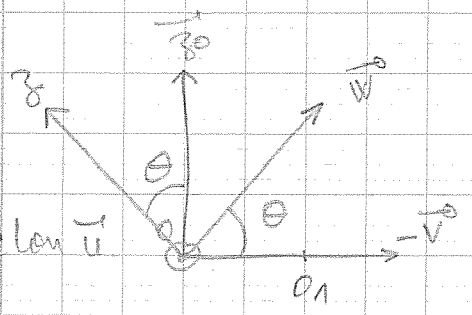
$\exists\, U(q,t)$, $\varphi_i = \dfrac{\partial U}{\partial q_i}$

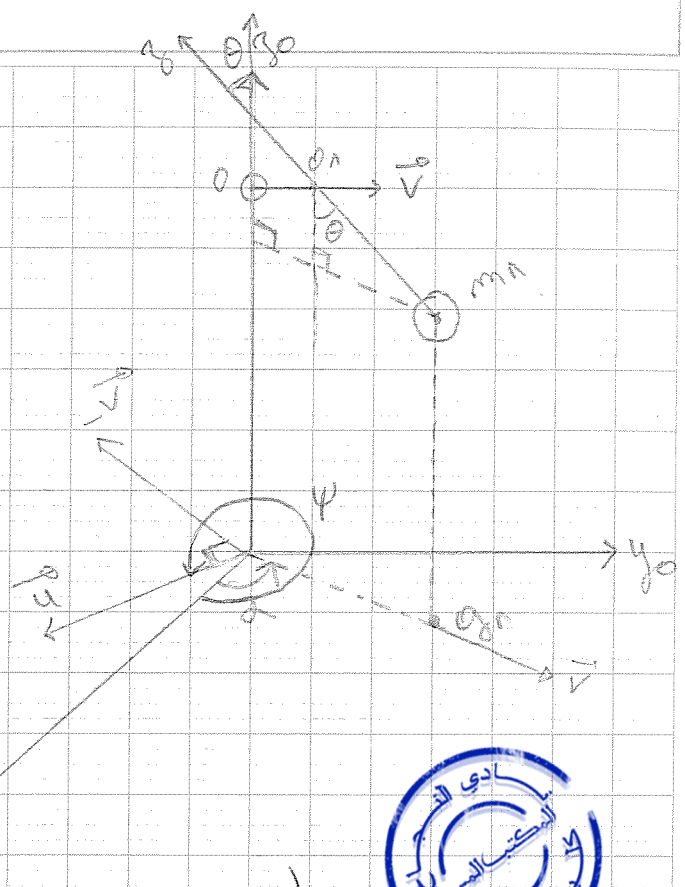
$L = U + T$ fonction définie.

1°/ $(\Sigma) = (M)\ \cup (m_1)\ \cup (m_2)$: (Σ) syst / Oz_0.

$$q = (x_M, y_M, z_M, x_{G_1}, y_{G_1}, z_{G_1}, \theta, \psi, \cancel{\varphi})$$

Vue selon $\vec{u}$





$$\psi = \alpha + \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\psi = \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

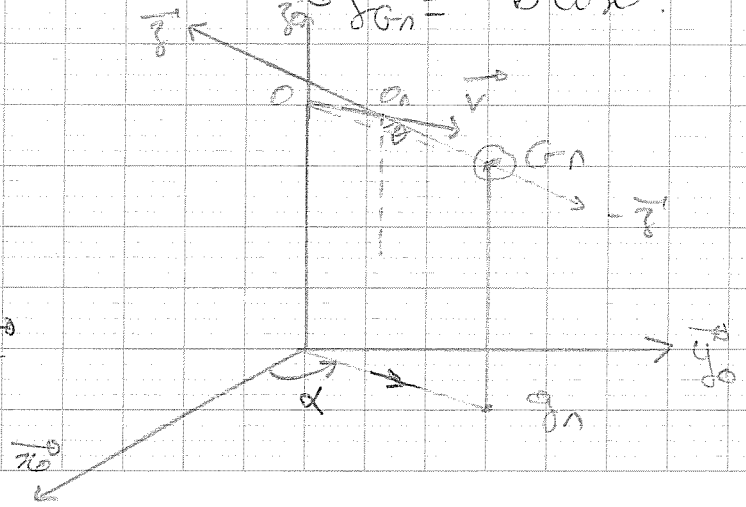
$$q = (x_M, y_M, z_M, x_{G_1}, y_{G_1}, z_{G_1}, \alpha, \theta).$$

Cependant $\psi(t)$ c.à.d $\alpha(t) \Rightarrow q = (x_M, y_M, z_M, x_{G_1}, y_{G_1}, z_{G_1}, \theta)$

Eq. de liaison :

$$\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \\ z_M = -2a\cos\theta \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_{G_1} = (l + b\sin\theta)\cos\alpha \\ y_{G_1} = (l + b\sin\theta)\sin\alpha \\ z_{G_1} = -b\cos\theta. \end{cases}$$

Autre méthode :



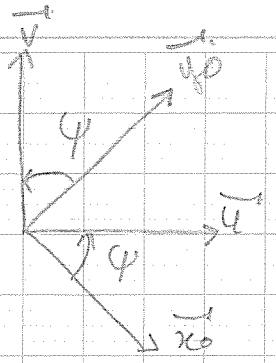
$$\vec{OG_1} = \vec{OO_1} + \vec{O_1G_1}$$

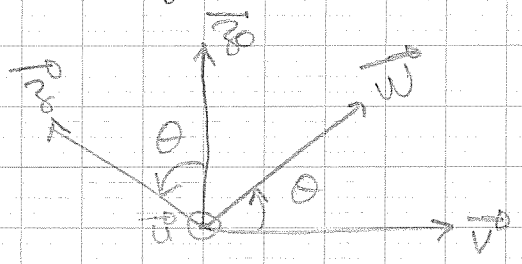
$$= l\vec{v} - b\vec{z}$$

$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{x_0} + \sin\psi\,\vec{y_0}$$

$$\vec{v} = -\sin\psi\,\vec{x_0} + \cos\psi\,\vec{y_0}$$

$$\vec{z} = \cos\theta\,\vec{z_0} - \sin\theta\,\vec{v}$$





$$\vec{OG_1} = \vec{OO_1} + \vec{O_1G_1}$$
$$= (l\vec{v} - b\vec{z})$$

q se réduit à $q(\theta)$ paramètre complet (ou stric

$NDL = 1$.

NB : Si ψ n'était pas imposée alors

$q = (\theta, \psi)$ ou $q = (\theta, \alpha)$.

$NDL = 2$.

2°/ E_c, E_p ?

$$E_c(\Sigma) = E_c(M) + 2E_c(m).$$

$$E_p(\Sigma) = Mg\,z_M + mg\,z_{G_1} + mg\,z_{G_2} + cte.$$

$$= Mg(-a\cos\theta) + 2mg(-b\cos\theta) + cte.$$

$$\boxed{E_p(\Sigma) = -2Mga\cos\theta - 2mgb\cos\theta + cte.}$$

$$E_c(\Sigma) = E_c(M) + 2E_c(m).$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{V}_R^{\,2}(M)}_{\frac{1}{2} M \dot{z}^2} + 2\left[\frac{1}{2} \vec{\Omega}^{t} \left[J_{G_1}\right] \vec{\Omega} + \frac{1}{2} m \vec{V}_R^{\,2}(G_1)\right]$$

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}_0\,\vec{z}$$

$$\left[J_{G_1}\right] = \begin{pmatrix} I_\Delta & 0 & 0 \\ 0 & I_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}.$$

$$\left[J_{G_1}\right]\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\dot{\theta} \\ \\ \dot{\psi} I \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}.$$

on trouve après calcul (à faire).

$$E_c(\Sigma) = \left(2Ma^2\sin^2\theta + I + mb^2\right)\dot{\theta}^2 + \left[I + m(\ell + b\sin\theta)^2\right]\dot{\psi}^2(t).$$

3°/ Eq du mvt :

- paramétre complet vérif
- liaison par fautes. vérif
- $\exists\, U(q,t)$ $\quad Q_i = \dfrac{\partial U}{\partial q_i}$!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + L_i$$

Ici $\exists$ E_p alors $U = -E_p$.

on définit alors : $L = T + U$

$$E.L : \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$L = T + U$

$T = T_t + T_r + T_o$

$$L = \overbrace{\left[2Ma^2\sin^2\theta + I + mb^2\right]\dot{\theta}^2}^{T_t} + \overbrace{\left[I + m(l + b\sin\theta)^2\right]\dot{\psi}^2(t)}^{T_o}$$

$$+ \underbrace{2(mb + Ma)\,g\cos\theta + cte}_{U} \qquad T_r = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2\dot{\theta}\left(2Ma^2\sin^2\theta + I + mb^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2\ddot{\theta}\left(2Ma^2\sin^2\theta + I + mb^2\right)$$

$$+ 2\dot{\theta}^2\left(2Ma^2 \times 2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(2Ma^2\, 2\sin\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(2m(l + b\sin\theta)(b\cos\theta\right)$$

$$- 2(mb + Ma)\,g\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow 2\dot{\theta}^2\left(4Ma^2\sin\theta\cos\theta\right) + 2\ddot{\theta}\left(Ma^2 \times 2\sin^2\theta + I + mb^2\right)$$

$$- 2Ma^2\, 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \left(2m(l + b\sin\theta)(b\cos\theta)\right)\dot{\psi}^2$$

$$+ 2g\sin\theta(mb + Ma) = 0$$

$$\Rightarrow \left(4Ma^2\sin\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + 2\left(2Ma^2\sin^2\theta + I + mb^2\right)\ddot{\theta}$$

$$- \left(2m(l + b\sin\theta)\,b\cos\theta\right) + 2(mb + Ma)\,g\sin\theta = 0$$

Eq du mvt ré soluble numériquement et non analytique

Ex : Retrouver cette équations par PFD.

نادي الشعر
المكتبة العصرية
لأمانة العلوم

Ex: Si $\dot{\psi}(t) = cte = \omega$

chercher θ par le P.P.V.

4°/ I.P. Painlevé.

Rappel th: paramètre complet

Hyp H_2: liaison parfaites.

H_3: $\exists\ U(q)$

H_4: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow T_2 - T_0 + \underline{V} = cte.$ (IPP)

$$T = \int_{(S)} \frac{1}{2} \vec{V}_R^2(M)\, dm \quad , \quad \vec{V}(M) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$$

$\vec{OM}\ (q_1, q_2, t)$

$$\vec{V}(M) = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$$

$$T = \frac{1}{2}\int \vec{V}^2(M)\, dm = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2\, dm + \int \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \dot{q}_2^2\, dm}_{T_2} + \underbrace{\int \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}\, dm}_{T_0}$$

$$\underbrace{- \int \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2\, dm + \int \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2\, dm}_{0}$$

$$\underbrace{+ \int \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \dot{q}_1 + \int \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \dot{q}_2\, dm}_{T_1}$$

1er

Rappel : NB Si les 3 hyp sont vérifiées on montre que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow T_2 - T_0 + V = cte.$$

Ici : H_1, H_2, H_3, verifiés.

$$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \quad (\text{car } \dot{\varphi} \text{ fonction explicite de temps})$$

donc $\nexists$ IPP. $\varphi = \omega t$.

$V = -u$

Condition : $\exists$ de l'IPP

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow 2\dot{\varphi}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = cte \neq$$

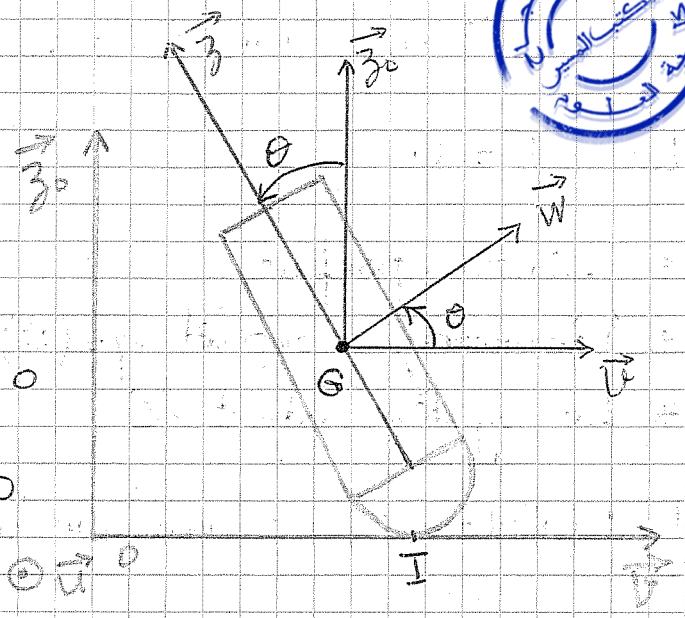
Dans ce cas $T_2 - T_0 + V = cte$.

$$\left[2Ma^2 \sin^2\theta + I + mb^2\right]\dot{\theta}^2 - \left[I + m(l + b\sin\theta)^2\right]\omega^2$$

$$- 2(mb + Ma)\, g \cos\theta = cte.$$

نادي الرياضيات
المكتب المسير
كلية العلوم

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \dot{\psi} = \omega$$



Exercice 2 :

1) Condition de contact

$$\vec{OI} \perp \vec{z_0} \Rightarrow \vec{OI} \cdot \vec{z_0} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{OH} + \vec{HG} + \vec{GI}) \cdot \vec{z_0} = 0$$

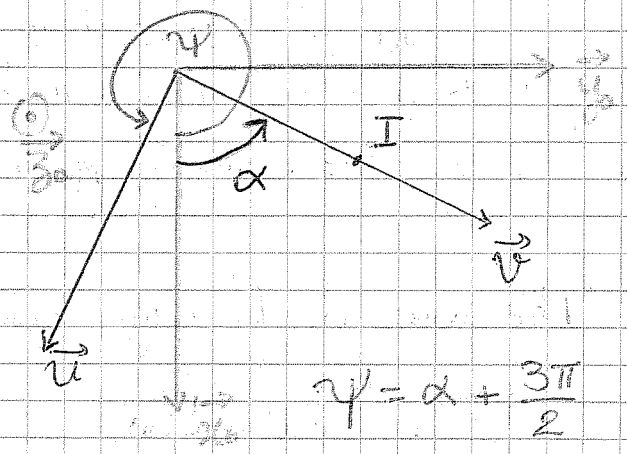
$$\Rightarrow (\vec{OG} + \vec{GI}) \cdot \vec{z_0} = 0$$

$$\vec{OG} \cdot \vec{z_0} + (\vec{GH} + \vec{HI}) \cdot \vec{z_0}$$

$$z_G + (-h\vec{z} - a\vec{z_0}) \cdot \vec{z_0} = 0$$

$$z_G - h\vec{z} \cdot \vec{z_0} - a = 0$$

$$z_G - h\cos\theta - a = 0$$



$$\psi = \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

$$z_G - h\cos\theta - a = 0$$

2) Le contact (S) – (P_0) est sans frottement

$$\vec{R}(S \to P_0) = R_z \vec{z_0}$$

a) $q = (x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi) + z_G - h\cos\theta - a = 0$ (1)

On prend (ℓ) principale : $\Rightarrow q = (x_G, y_G, \psi, \theta, \varphi)$

$\forall$ CVV il est compatible avec (ℓ)

$\Rightarrow$ E.L : si L existe ; q : complet + Liaison parfait

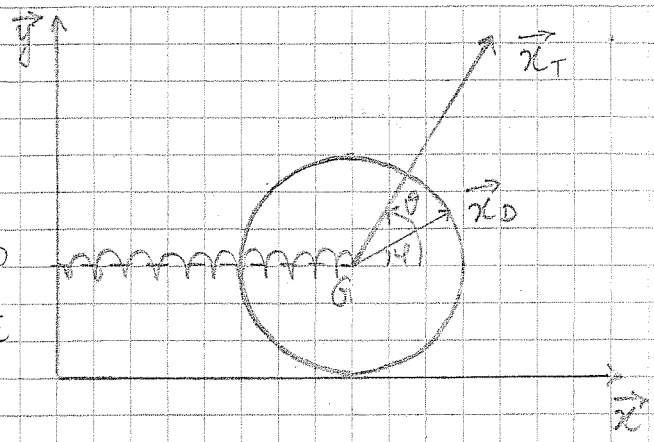
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

si non : , q complet + Liaison parfait

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^d$$

للمزيد من الدروس والتمارين زورا موقعنا الإلكتروني
www.clubnajah.com
لا تترددوا في طرح استفساراتكم عبر البريد الالكتروني أو صفحتنا الرسمية عبر الفايسبوك
Clubnajah2013@gmail.com
www.facebook.com/succes.club
بالتوفيق للجميع
مع تحيات المكتب المسير لنادي النجاح

- Mécanique Analytique / Série 1 -



① Parametrage du système

② L'équation de liaison

$f(q,t)=0$ ou $f(q,\dot{q},t)=0$

③ Un parametrage complet si possible

④ N.D.L

⑤ Ec et Ep

---

① $q = (x_G ; \cancel{y_G} ; \cancel{z_G} ; \cancel{\psi} ; \theta ; \varphi ; \cancel{x_{GT}} ; \cancel{y_{GT}} ; \cancel{z_{GT}} ; \cancel{\psi_T} ; \theta_T)$

② * E.L Géométrique

$z_G = 0$ ① ; $\psi = 0$ ② ; $\theta = 0$ ③ ; $z_{GT} = 0$ ④ ; $\psi_T = 0$ ⑤

Condition de contact (O) - (Ox) $\Rightarrow$

$y_G = R \Rightarrow y_G - R = 0$ ⑥

$x_{GT} = x_G + \frac{l}{2}\cos\theta$ ⑦

$y_{GT} = y_G + \frac{l}{2}\sin\theta$ ⑧

* E.L Cinématique

CRSG (D) - (Ox) $\Rightarrow \dot{x}_G + R\dot{\varphi} = 0$ ⑨

$\Rightarrow x_G + R\varphi = cte$

③ Reduction du parametrage :

$q = (\varphi, \theta)$ Complet + 0 E.L

φ et θ sont independant

$N.D.L = 2$

④ Forces conservatives, ils dirivent d'un fonction de force $\mathcal{U}(q,t)$ tq $P = -\frac{d\mathcal{U}}{dt} \Rightarrow \mathcal{U} = -\int P\,dt$

Exemple de la gravitation $\vec{F} = -mg\vec{z}$

$$P = \left\{ \begin{matrix} -mg\vec{y} \\ \vec{m}_G = \vec{0} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(G) = \dot{x}_G\vec{x} + \dot{y}_G\vec{y} + \dot{z}_G\vec{z} \end{matrix} \right\}$$

$$P = -mg\dot{y} = \frac{d\mathcal{U}}{dt} \Rightarrow \mathcal{U} = -\int mg\,\dot{y}_G\,dt$$

$$\mathcal{U}(D) = -mg\,y_G + Cte \quad , \quad \mathcal{U}(T) = -mg\,y_{GT} + Cte$$

$$\mathcal{U} = -mg\,y_G - mg\,y_G\,\frac{\ell}{2}\sin\theta + Cte$$

⑤ Energie potentiel : $E_p = -\mathcal{U}$

$$E_p(D) = mg\,y_G + Cte = cte \quad (y_G = R)$$

$$E_p(T) = mg\,y_G + mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + Cte = mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + cte$$

Energie Cinétique

Théorème de Koenig :

$$E_c(D) = \underbrace{\frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}\,J(G,S)\,\vec{\Omega}}_{*} + \frac{1}{2}M\vec{V}_G^{\,2}$$

$$* = \frac{1}{2}(0,0,\dot{\varphi})_R \begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\varphi}^2$$

$$\vec{V}_G = \dot{x}_G \vec{x} + \dot{y}_G \vec{y}$$

$$\vec{V}_G = -R\dot{\varphi}\vec{x} \Rightarrow \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow E_c(D) = \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$E_c(\varphi, \theta) = \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{4} = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$E_c(T) = \frac{1}{2} {}^t\vec{\Omega}(T)\, J(T, G_T)\, \vec{\Omega} + \frac{1}{2} m V_{G_T}^2$$

$$\vec{V}_{G_T} = \dot{x}_{G_T}\vec{x} + \dot{y}_{G_T}\vec{y}$$

$$V_{G_T}^2 = \dot{x}_{G_T}^2 + \dot{y}_{G_T}^2 = \left(\dot{x}_G - \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2$$

$$V_{G_T}^2 = \dot{x}_G^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 - l\dot{\theta}\dot{x}_G \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_{G_T}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m l \dot{\theta}\dot{x}_G \sin\theta$$

$$E_c(T) = \frac{1}{2}(0, 0, \dot{\theta}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} m V_{G_T}^2$$

نادي الصحة
المكتب المسير
كلية العلوم

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique **Année Universitaire 2015-2016**

Solution TD de Physique de vibrations – Filière SMP5
Série N°I
<u>Oscillateurs harmoniques</u>

Exercice 1

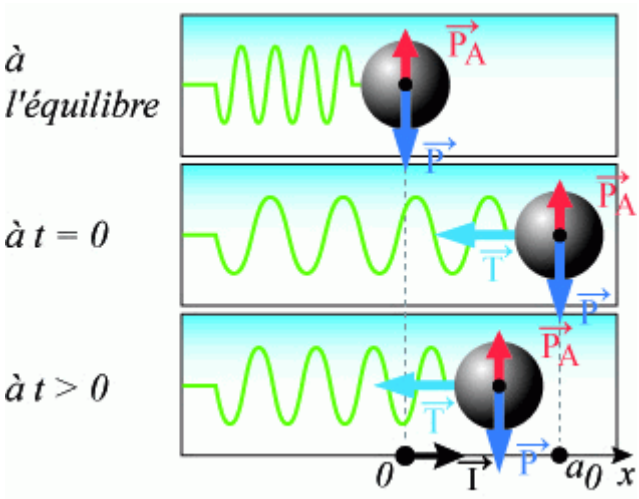


Schéma du dispositif avec bilan des forces dans un référentiel galiléen

1. 1.a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la masse m, il vient :

$$m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{P}_a + \vec{T} + \vec{f}$$

La loi de Hooke donne $\vec{T} = -k.\overrightarrow{OM}$

La force de frottement visqueux s'écrit :

$$\vec{f} = -\lambda.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

avec $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

$$m.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{P}_a - k.\overrightarrow{OM} - \lambda.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

avec $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$ et après projection sur l'axe horizontal Ox, on obtient :

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} = 0.\vec{i} + 0.\vec{i} - k.x.\vec{i} - \lambda.\frac{dx}{dt}.\vec{i} \quad \rightarrow \quad m.\ddot{x} = -k.x - \lambda.\dot{x}$$

Finalement :

$$\ddot{x} + \gamma.\dot{x} + \omega_0^2.x = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\gamma = \frac{\lambda}{m}$

où ω_0 est la pulsation propre et γ est le taux d'amortissement.

2. Pour $k.m > (\frac{\lambda}{2})^2$, on a :

$$\gamma^2 - 4.\omega_0^2 < 0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associé à l'équation différentielle est alors négatif. Il s'agit donc d'un mouvement oscillatoire amorti ou pseudo-périodique.

Une solution réelle est de la forme :

$$x(t) = A.e^{\frac{-\gamma.t}{2}}.\cos(\omega.t + \varphi)$$

avec

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}$$

où ω est la pseudo-pulsation.

A et φ sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions initiales.

La vitesse est obtenue en dérivant x par rapport au temps :

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{A\gamma}{2}.e^{\frac{-\gamma.t}{2}}.\cos(\omega t + \varphi) - A.\omega.e^{\frac{-\gamma.t}{2}}.\sin(\omega.t + \varphi)$$

Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} x(t=0) = a_0 = A.\cos(\varphi) & (1) \\ \dot{x}(t=0) = 0 = -\frac{A\gamma}{2}.\cos(\varphi) - A.\omega.\sin(\varphi) & (2) \end{cases}$$

D'après l'équation (2), $\tan(\varphi) = -\frac{\gamma}{2.\omega}$

D'après l'équation (1), $A = \frac{a_0}{\cos(\varphi)}$

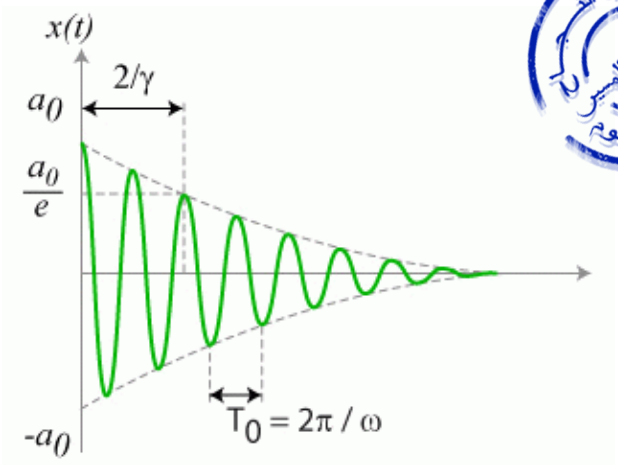
avec

$$\frac{1}{\cos(\varphi)} = \sqrt{1 + \tan^2(\varphi)} \qquad A = a_0.\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4.\omega^2}}$$

D'où :

$$x(t) = a_0 . \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4.\omega^2}} . e^{\frac{-\gamma.t}{2}} . \cos(\omega.t + \varphi)$$

Avec $\tan(\varphi) = -\frac{\gamma}{2.\omega}$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}$



Représentation graphique de l'évolution temporelle de la position du bloc.

Exercice 2

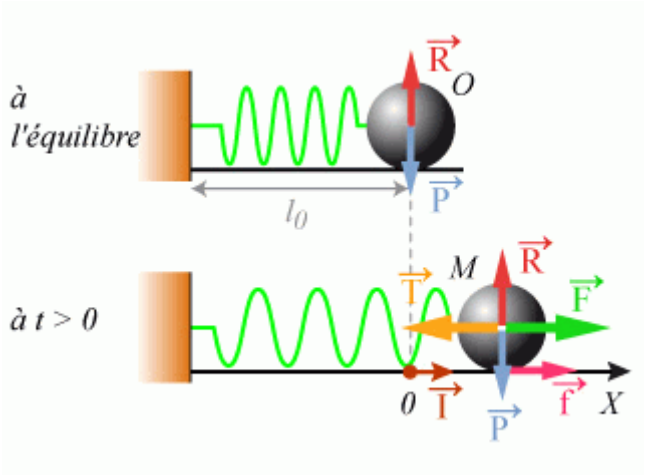


Schéma du dispositif avec bilan des forces dans un référentiel galiléen

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à t quelconque, il vient :

$$m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} + \vec{f}$$

La loi de Hooke donne $\vec{T} = -k.\overrightarrow{OM}$

La force de frottement visqueux s'écrit :

$$\vec{f} = -\lambda.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

avec $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

$$m.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{R} - k.\overrightarrow{OM} + \vec{F} - \lambda.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Avec $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$, et après projection sur l'axe horizontal Ox, on obtient :

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} = -k.x.\vec{i} + F_0.\cos(\omega t).\vec{i} - \lambda.\frac{dx}{dt}.\vec{i}$$

Finalement :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2.x = \frac{F_0}{m}.\cos(\omega t)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $= \frac{\lambda}{m}$,

où ω_0 est la pulsation propre et γ est le taux d'amortissement.

2. Une solution réelle de cette équation s'écrit :

$$x(t) = A_0.e^{\frac{-\gamma.t}{2}}.\cos(\omega_0.t) + A(\omega).\cos\left(\omega t + \Phi(\omega)\right)$$

Le premier terme correspond à la réponse transitoire consécutive à la mise en marche du forçage.

Le second terme correspond au régime permanent sinusoïdal.

La réponse transitoire (premier terme) correspond à un mouvement oscillatoire amorti. On peut donc dire que le facteur de qualité $Q > \frac{1}{2}$.

La réponse transitoire peut être négligée aux temps longs. L'oscillateur est alors dans un régime permanent sinusoïdal équivalent à un oscillateur harmonique de pulsation égale à celle du forçage ω.

3. En régime permanent, on a en notation réelle :

$$x(t) = A(\omega).\cos\left(\omega t + \Phi(\omega)\right).$$

Cette solution s'écrit en notation complexe :

$$\bar{x}(t) = \tilde{x}.e^{j\omega t} \text{avec } \tilde{x} = A(\omega).e^{j\Phi(\omega)}.$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement du bloc obtenue à la question 1, on a :

$$\left(-\omega^2\tilde{x} + i\gamma\omega\tilde{x} + \omega_0^2\tilde{x}\right)e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

D'où :

$$\tilde{x} = \frac{F_0}{m.(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$A(\omega)$ étant le module de $\tilde{x}$, il vient :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m.\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

De la même façon, $\emptyset(\omega)$ étant l'argument de $\tilde{x}$, il vient :

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

4. Avec $\gamma \approx 0$, on obtient :

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{m.(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Lorsque $\omega \to \omega_0$, $A(\omega) \to \infty$. C'est ce que l'on appelle le phénomène de résonance.

Exercice 3

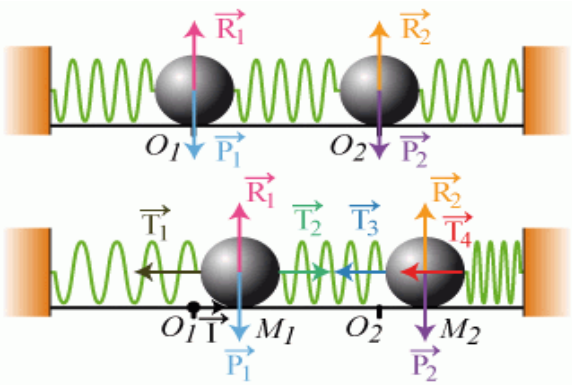


Schéma du dispositif avec bilan des forces dans un référentiel galiléen

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à t quelconque, il vient :

- Pour m_1: $m_1.\vec{a_1} = \vec{P_1} + \vec{R_1} + \vec{T_1} + \vec{T_2}$.
- Pour m_2: $m_2.\vec{a_2} = \vec{P_2} + \vec{R_2} + \vec{T_3} + \vec{T_4}$.

La loi de Hooke donne :

$$\begin{cases} \vec{T_1} = -k_1.\overrightarrow{O_1M_1} \\ \vec{T_2} = k_2.(\overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{O_1O_2}) \\ \vec{T_3} = -k_2.(\overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{O_1O_2}) \\ \vec{T_4} = -k_3.\overrightarrow{O_2M_2} \end{cases}$$

Afin d'obtenir l'équation du mouvement dans les repères d'origine O_1 et O_2, il faut exprimer $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$, $\vec{T_3}$ et $\vec{T_4}$ en fonction de $\overrightarrow{O_1M_1}$ et/ou $\overrightarrow{O_2M_2}$:

$$\begin{cases} \vec{T_2} = k_2.(\overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{O_1O_2}) = k_2.[(\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M_2}) - \overrightarrow{O_1O_2}] = k_2.(\overrightarrow{O_2M_2} - \overrightarrow{O_1M_1}) \\ \vec{T_3} = -k_2.(\overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{O_1O_2}) = -k_2.[(\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M_2}) - \overrightarrow{O_1O_2}] = -k_2.(\overrightarrow{O_2M_2} - \overrightarrow{O_1M_1}) \end{cases}$$

Avec $\vec{a}_1 = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M_1}}{dt^2}$ et $\vec{a}_2 = \frac{d^2\overrightarrow{O_2M_2}}{dt^2}$

- Pour m_1 :

$$m_1.\frac{d^2\overrightarrow{O_1M_1}}{dt^2} = \vec{P_1} + \vec{R_1} - (k_1 + k_2).\overrightarrow{O_1M_1} + k_2.\overrightarrow{O_2M_2}.$$

- Pour m_2 :

$$m_2.\frac{d^2\overrightarrow{O_2M_2}}{dt^2} = \vec{P_2} + \vec{R_2} + k_2.\overrightarrow{O_1M_1} - k_2.\overrightarrow{O_2M_2} - k_3.\overrightarrow{O_2M_2}.$$

$\overrightarrow{O_1M_1} = x_1.\vec{i}$, $\overrightarrow{O_2M_2} = x_2.\vec{i}$

et après projection sur l'axe horizontal Ox, on obtient :

$$\begin{cases} m_1.\ddot{x_1} = -(k_1 + k_2).x_1 + k_2.x_2 \\ m_2.\ddot{x_2} = k_2.x_1 - (k_2 + k_3).x_2 \end{cases}$$

2. **a)** On a : $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

En divisant par m_1 les équations obtenues à la question 1, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x_1} = -2.\frac{k}{m}.x_1 + \frac{k}{m}.x_2 \\ \ddot{x_2} = \frac{k}{m}.x_1 - 2.\frac{k}{m}.x_2 \end{cases}$$

Sous forme vectorielle, ce système s'écrit :

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = A.\vec{X},$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -2.\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -2.\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une solution réelle de la forme : $\vec{X} = \vec{X_0}.e^{\omega t}$

En dérivant deux fois cette solution par rapport au temps et en remplaçant dans l'équation vectorielle, il vient :

$$\omega^2.\vec{X_0}.e^{\omega t} = A.\vec{X_0}.e^{\omega t} \rightarrow \omega^2.\vec{X_0} = A.\vec{X_0}$$

En posant $\lambda = \omega^2$, on a alors un problème aux valeurs propres $A.\vec{X_0} = \lambda.\vec{X_0}$ avec λ valeur propre de A et $\vec{X}_0$ vecteur propre de A.

Pour déterminer les valeurs propres, il faut résoudre : $det(A - \lambda.Id) = 0$.

$$\begin{vmatrix} -2.\frac{k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -2.\frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

D'où :

$$\left(2.\frac{k}{m} + \lambda\right)^2 - \frac{k^2}{m^2} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4.\frac{k}{m}.\lambda + 3.\frac{k^2}{m^2} = 0$$

On a alors une équation du second degré avec deux solutions possibles :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{k}{m} \\ \lambda_2 = -\frac{3k}{m} \end{cases}$$

Ce sont les valeurs propres de A.

Pour déterminer les vecteurs propres, il faut résoudre : $A.\vec{X_1} = \lambda_1.\vec{X_1}$ et $A.\vec{X_2} = \lambda_2.\vec{X_2}$.

Ici :

$$\begin{pmatrix} -2.\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -2.\frac{k}{m} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = -\frac{k}{m}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m}(-X_1 + Y_1) = 0 \\ \frac{k}{m}(X_1 - Y_1) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow X_1 = Y_1$$

On choisit en général l'unité pour la valeur de X_1, soit :

$$\vec{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la même façon :

$$\begin{pmatrix} -2.\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -2.\frac{k}{m} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = -\frac{3k}{m}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{k}{m}(X_2 + Y_2) = 0 \\ \frac{k}{m}(X_2 + Y_2) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X_2 = -Y_2$$

Soit :

$$\vec{X_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

- $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$
- $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$

b) La solution générale du système d'équations est de la forme $\vec{X} = \vec{X}_0 . e^{\omega t}$. Avec $\lambda = \omega^2$, il s'agit d'une combinaison linéaire des solutions aux valeurs propres telle que :

$$\vec{X} = a.e^{i\sqrt{|\lambda_1|}}.\vec{X}_1 + b.e^{-i\sqrt{|\lambda_1|}}.\vec{X}_1 + c.e^{i\sqrt{|\lambda_2|}}.\vec{X}_2 + d.e^{-i\sqrt{|\lambda_2|}}.\vec{X}_2$$

où a, b, c et d sont des constantes.

Ici :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a.e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b.e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c.e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + d.e^{-i\sqrt{\frac{3k}{m}}.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t + \varphi_1\right) + A_2.\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}.t + \varphi_2\right) \\ x_2(t) = A_1.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t + \varphi_1\right) - A_2.\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}.t + \varphi_2\right) \end{cases},$$

وادي الشجر
المكتب المسير لكلية العلوم

où A_1, A_2, φ_1 et φ_2 sont les constantes d'intégration.

c) Le mouvement peut être décomposé en une superposition (somme) de mouvements harmoniques appelés modes propres (ou modes normaux) de vibration.

On reconnaît ici des solutions d'un oscillateur harmonique du type $q(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$.

Les modes propres du système sont alors :

$q_1(t) = A_1.\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sa pulsation propre.

$q_2(t) = A_2.\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ avec $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ sa pulsation propre.

On peut donc écrire les équations du mouvement obtenues à la question 2.b de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \end{cases}$$

3. **a)** Avec les conditions initiales énoncées, on a :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = +a_0 = q_1(0) + q_2(0) \\ x_2(t=0) = -a_0 = q_1(0) - q_2(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1(0) = 0 \\ q_2(0) = a_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t=0) = 0 = \dot{q}_1(0) + \dot{q}_2(0) \\ \dot{x}_2(t=0) = 0 = \dot{q}_1(0) - \dot{q}_2(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1(0) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} q_1(0) = A_1.\cos(\varphi_1) = 0 \\ \dot{q}_1(0) = -A_1.\omega_1.\sin(\varphi_1) = 0 \end{cases} \rightarrow A_1 = 0 \quad ,$$

Soit : $q_1(t) = 0$

Et :

$$\begin{cases} q_2(0) = A_2.\cos(\varphi_2) = a_0 \\ \dot{q}_2(0) = -A_2.\omega_2.\sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_2 = a_0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} ,$$

Soit : $q_2(t) = a_0.\cos(\omega_2.t)$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1(t) = a_0.\cos(\omega_2.t) \\ x_2(t) = -a_0.\cos(\omega_2.t) = a_0.\cos(\omega_2.t + \pi) \end{cases}$$

Ici, seul le mode $q_2(t)$ est excité par ces conditions initiales puisque $q_1(t) = 0$. Dans ce cas, les deux masses se déplacent avec la même amplitude et en opposition de phase. Le ressort central exerce une force de rappel sur les deux masses.

b) Avec les conditions initiales énoncées, on a :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = a_0 = q_1(0) + q_2(0) \\ x_2(t=0) = a_0 = q_1(0) - q_2(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1(0) = a_0 \\ q_2(0) = 0 \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t=0) = 0 = \dot{q}_1(0) + \dot{q}_2(0) \\ \dot{x}_2(t=0) = 0 = \dot{q}_1(0) - \dot{q}_2(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1(0) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} q_1(0) = A_1.\cos(\varphi_1) = a_0 \\ \dot{q}_1(0) = -A_1.\omega_1.\sin(\varphi_1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = a_0 \\ \varphi_1 = 0 \end{cases} ,$$

Soit : $q_1(t) = a_0.\cos(\omega_1.t)$

Et :

$$\begin{cases} q_2(0) = A_2.\cos(\varphi_2) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = -A_2.\omega_2.\sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \rightarrow A_2 = 0 \quad ,$$

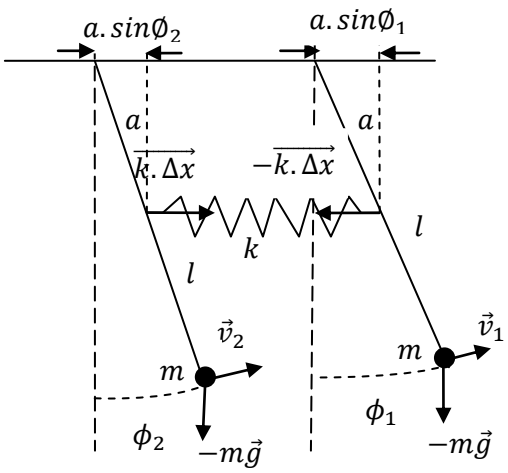
Soit : $q_2(t) = 0$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1(t) = a_0.\cos(\omega_1.t) \\ x_2(t) = a_0.\cos(\omega_1.t) \end{cases}$$

Ici, seul le mode $q_1(t)$ est excité par ces conditions initiales puisque $q_2(t) = 0$. Dans ce cas, les deux masses se déplacent avec la même amplitude et en phase. Il n'y a pas d'effet du couplage dû au ressort central.

Exercice 4



1/ L'équation du mouvement se détermine en utilisant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}$$

Où $\vec{L} = \vec{l} \wedge \vec{p}$ est le moment cinétique, et $\vec{\mathcal{M}} = \vec{l} \wedge \vec{F}$ est le moment des forces ($\vec{P} = -m\vec{g}$, $\vec{T} = -k\overrightarrow{\Delta x}$).

$\vec{p}$: quantité de mouvement ($\vec{p} = m.\vec{v}$)

$\vec{l}$: longueur entre l'axe de rotation et le point d'application de la force.

On a :

$\vec{\mathcal{M}} = -\vec{l} \wedge m\vec{g} - \vec{a} \wedge k\overrightarrow{\Delta x}$ et $\vec{L} = \vec{l} \wedge m.\vec{v}$

Pour le pendule 1 :

$$\vec{\mathcal{M}} = -mgl.sin\emptyset_1.\vec{e}_\perp - ak\Delta x.sin(\emptyset_1 + \frac{\pi}{2}).\vec{e}_\perp$$

$\vec{e}_\perp$: vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{l}$ et $\vec{F}$.

L'élongation du ressort Δx s'obtient par des considérations géométriques :

$\Delta x = a.sin\emptyset_1 - a.sin\emptyset_2 = a.(sin\emptyset_1 - sin\emptyset_2)$

D'où :

$\vec{\mathcal{M}} = -mgl.sin\emptyset_1.\vec{e}_\perp - \ ka^2.(sin\emptyset_1 - sin\emptyset_2).cos\emptyset_1.\vec{e}_\perp$

Pour des oscillations de faible amplitude, on utilise l'approximation :

$cos\emptyset \simeq 1$ et $sin\emptyset \simeq \emptyset$.

Ainsi :

$\vec{\mathcal{M}} = -mgl.\emptyset_1.\vec{e}_\perp - \ ka^2.(\emptyset_1 - \emptyset_2).\vec{e}_\perp$.

$\vec{L} = \vec{l} \wedge m.\vec{v}$

Puisque $\vec{l}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ ($v = l\dot{\emptyset}$)

$\vec{L} = ml^2\dot{\emptyset}_1.\vec{e}_\perp$

L'équation du mouvement s'écrit :

$ml^2\ddot{\emptyset}_1 = -mgl\emptyset_1 - ka^2.(\emptyset_1 - \emptyset_2)$ (1)

On trouve de la même façon, l'équation du mouvement pour le pendule 2 :

$ml^2\ddot{\emptyset}_2 = -mgl\emptyset_2 - ka^2.(\emptyset_2 - \emptyset_1)$ (2)

2/ En introduisant les changements de variable suivants :

$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\emptyset_1 + \emptyset_2)$ et $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\emptyset_1 - \emptyset_2)$

a/ Equations différentielles en φ_1 et φ_2 :

(1) + (2) $\Longrightarrow ml^2(\ddot{\emptyset}_1 + \ddot{\emptyset}_2) = -mgl.(\emptyset_1 + \emptyset_2)$

Soit : $ml^2\ddot{\varphi}_1 + mgl.\varphi_1 = 0$

$\Longrightarrow \quad \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}.\varphi_1 = 0$

$\ddot{\varphi}_1 + {\omega_1}^2.\varphi_1 = 0,$ $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$

(1) - (2) $\Longrightarrow ml^2(\ddot{\emptyset}_1 - \ddot{\emptyset}_2) = -mgl.(\emptyset_1 - \emptyset_2) - 2ka^2(\emptyset_1 - \emptyset_2)$

Soit : $ml^2\ddot{\varphi}_2 = -(mgl + 2ka^2).\varphi_2$

$\Longrightarrow \quad \ddot{\varphi}_2 + \frac{mgl+2ka^2}{ml^2}.\varphi_2 = 0$

$\ddot{\varphi}_2 + {\omega_2}^2.\varphi_2 = 0,\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{mgl+2ka^2}{ml^2}}.$

b/ - Les solutions sont données par :

$\varphi_1(t) = A_1.\cos(\omega_1 t + \delta_1),\qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\varphi_2(t) = A_2.\cos(\omega_2 t + \delta_2),\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{mgl+2ka^2}{ml^2}}$

Avec A_1, A_2, δ_1 et δ_2 sont des constantes détérminées par les conditions initiales.

- Les solutions de l'équation du mouvement pour le pendule 1 et 2 sont donc de la forme :

$$\emptyset_1(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$$

$$\emptyset_2(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

Soient :

$$\emptyset_1(t) = A_1.\cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2.\cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

$$\emptyset_2(t) = A_1.\cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2.\cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

3/ A l'instant $t = 0$

a/ C. I. : $\emptyset_1(0) = \emptyset_2(0) = \emptyset_0$ et $\dot{\emptyset}_1(0) = \dot{\emptyset}_2(0) = 0$

$\emptyset_1(0) = A_1.\cos(\delta_1) + A_2.\cos(\delta_2) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) = \emptyset_0$ (a)

$\emptyset_2(0) = A_1.\cos(\delta_1) - A_2.\cos(\delta_2) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = \emptyset_0$ (b)

$\dot{\emptyset}_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) + \dot{\varphi}_2(0) = 0$ (c)

$\dot{\emptyset}_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) - \dot{\varphi}_2(0) = 0$ (d)

(c) + (d) $\Longrightarrow \dot{\varphi}_1(0) = 0 = -A_1\omega_1.\sin(\delta_1) \Longrightarrow \delta_1 = 0$

(a) + (b) $\Longrightarrow \varphi_1(0) = \emptyset_0 = A_1.\cos(\delta_1) \Longrightarrow A_1 = \emptyset_0$ (puisque $\delta_1 = 0$)

(c)- (d) $\Longrightarrow \dot{\varphi}_2(0) = 0 = -A_2\omega_2.\sin(\delta_2) \Longrightarrow \delta_2 = 0$

(a)- (b) $\Longrightarrow \varphi_2(0) = 0 = A_2.\cos(\delta_2) \Longrightarrow A_2 = 0$

D'où :

$$\emptyset_1(t) = \emptyset_2(t) = \varphi_1(t) = \emptyset_0.\cos(\omega_1 t)$$

Il s'agit d'une oscillation à une seule fréquence. Le couplage ne joue aucun rôle, puisque le ressort reste toujours dans le même état de tension. Il est alors naturel qu'on trouve la période du pendule simple.

$$T_{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

b/ C. I. : $\emptyset_1(0) = 0$, $\emptyset_2(0) = -\emptyset_0$ et $\dot{\emptyset}_1(0) = \dot{\emptyset}_2(0) = 0$

$\emptyset_1(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) = 0$ (a)

$\emptyset_2(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = -\emptyset_0$ (b)

$\dot{\emptyset}_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) + \dot{\varphi}_2(0) = 0$ (c)

$\dot{\emptyset}_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) - \dot{\varphi}_2(0) = 0$ (d)

(c)+ (d) $\Longrightarrow \dot{\varphi}_1(0) = 0 = -A_1\omega_1.\sin(\delta_1) \Longrightarrow \delta_1 = 0$

(c)- (d) $\Longrightarrow \dot{\varphi}_2(0) = 0 = -A_2\omega_2.\sin(\delta_2) \Longrightarrow \delta_2 = 0$

(a)+ (b) $\Longrightarrow \varphi_1(0) = 0 = A_1.\cos(\delta_1) \Longrightarrow A_1 = 0$ (puisque $\delta_1 = 0$)

(a)- (b) $\Longrightarrow \varphi_2(0) = 0 = A_2.\cos(\delta_2) \Longrightarrow A_2 = \emptyset_0$ (puisque $\delta_2 = 0$)

D'où :

$$\emptyset_1(t) = -\emptyset_2(t) = \varphi_1(t) = \emptyset_0.\cos(\omega_2 t)$$

Il s'agit d'une oscillation à une seule fréquence mais le couplage entre les deux pendules résulte en une diminution de la période (équivalent à une augmentation de la fréquence).

$$T_{\omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl + 2ka^2}}$$

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Solution TD de Physique de vibrations – Filière SMP5
Série N°II
<u>Propagation des ondes</u>

Exercice 1

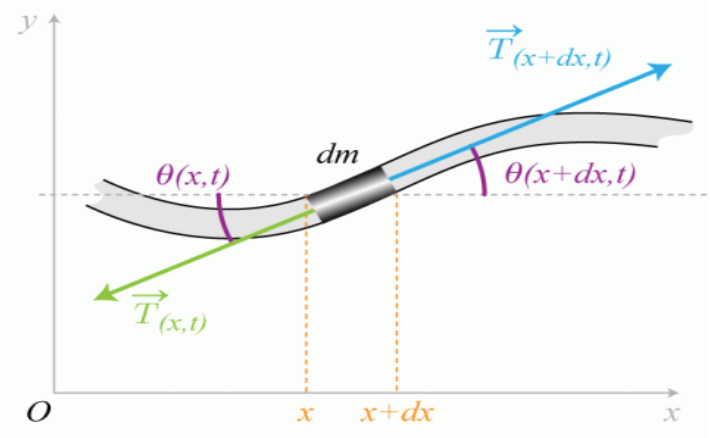


Schéma d'un tronçon de la corde avec bilan des forces

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le tronçon, il vient :

$$dm.\vec{a} = \vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t)$$

Après projection sur l'axe horizontal Ox, on obtient :

$$dm.a_x = -T(x,t).\cos(\theta(x,t)) + T(x+dx,t).\cos(\theta(x+dx,t))$$

Le mouvement de la corde étant quasi-vertical, l'accélération selon x est quasi-nulle :

$a_x \approx 0$, alors $T(x,t).\cos(\theta(x,t)) = T(x+dx,t).\cos(\theta(x+dx,t))$

De plus, les angles étant petit ($\theta \approx 0$) : $\cos(\theta(x,t)) \approx \cos(\theta(x+dx,t)) \approx 1$

Donc, la projection sur x des vecteurs tensions est environ égale à leur norme T_0

Finalement : $T(x,t).\cos(\theta(x,t)) = T(x+dx,t).\cos\theta(x+dx,t)) \approx T_0$

2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le tronçon, il vient :

$$dm.\vec{a} = \vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t)$$

Après projection sur l'axe Oy et ψ étant le déplacement vertical de la corde, on obtient :

$$dm.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -T(x,t).\sin(\theta(x,t))\frac{\cos(\theta(x,t))}{\cos(\theta(x,t))} + T(x+dx,t).\sin(\theta(x+dx,t))\frac{\cos(\theta(x+dx,t))}{\cos(\theta(x+dx,t))}$$

Soit :

$$dm.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -T(x,t).\cos(\theta(x,t)).\tan(\theta(x,t)) + T(x+dx,t).\cos(\theta(x+dx,t)).\tan(\theta(x,t))$$

Avec $T(x,t).\cos(\theta(x,t)) = T(x+dx,t).\cos(\theta(x+dx,t)) \approx T_0$

Et $tan\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x}$,

on obtient :

$$dm.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_0\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_x\right)$$

Or, la masse linéique s'exprime $= \frac{dm}{dx}$, d'où :

$$\mu.dx.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_0\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_x\right) \rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu}\frac{\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_x\right)}{dx}$$

Finalement :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

3. Vérifions qu'une solution réelle de cette équation d'onde est de la forme :

$$\psi(x,t) = A.\cos(\omega t - k.x)$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est appelé nombre d'onde.

3.a) En dérivant deux fois $\psi(x,t)$ par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A.\cos(\omega t - kx) = -\omega^2.\psi(x,t)$$

En dérivant deux fois $\psi(x,t)$ par rapport à x :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2 A.\cos(\omega t - kx) = -k^2.\psi(x,t)$$

En remplaçant dans l'équation d'onde, il vient :

$$-k^2.\psi(x,t) = \frac{-\omega^2.\psi(x,t)}{c^2} \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Alors, $\psi(x,t) = A.\cos(\omega t - kx)$ est solution de l'équation d'onde à la condition que $k = \pm\frac{\omega}{c}$: c'est la relation de dispersion.

Ici, la corde est semi-infinie, il n'y a donc pas de réflexion. L'onde se propage seulement dans le sens des x croissants. Le terme $-kx$ de la phase ($\omega.t - k.x$) traduit alors forcement un retard (on récupère l'onde au bout de la corde forcement après qu'elle ait été émise puisque qu'elle parcourt le chemin entre la source et le récepteur à vitesse non infinie). $-kx$ doit être négatif, soit $k > 0$. Dans ce cas, la condition devient unique : $k = \frac{\omega}{c}$.

Exercice 2

1. Une solution réelle de l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2}$$

peut s'écrire :

- pour l'onde incidente (sens des $z$croissants) : $\psi_I(x,t) = A_I.\cos(\omega t - k_1 z)$
- pour l'onde réfléchie (sens des $z$décroissants) : $\psi_R(x,t) = A_R.\cos(\omega t + k_1 z)$
- pour l'onde transmise (sens des $z$croissants) : $\psi_T(x,t) = A_T.\cos(\omega t - k_2 z)$

avec $k_1 > k_2 > 0$, la condition pour que chaque onde soit solution de l'équation (relation de dispersion) est unique pour chaque milieu :

$k_i = \omega\sqrt{\frac{T_0}{\mu_1}}$ et $k_2 = \omega\sqrt{\frac{T_0}{\mu_2}}$

2. La relation de continuité du déplacement transversal en $Z = 0$ donne :

$$\psi_I(z=0,t) + \psi_R(z=0,t) = \psi_T(z=0,t) \rightarrow A_I\cos(\omega t) + A_R\cos(\omega t) = A_T\cos(\omega t)$$

Soit : $A_I + A_R = A_T$

La relation de continuité de la force et sa direction en $Z = 0$ correspond à :

$\tan\big(\theta_{avant}(z=0)\big) = \tan\Big(\theta_{après}(z=0)\Big)$, avec $\tan\big(\theta(z)\big) = \frac{\partial\psi}{\partial z}$ il vient :

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}(\psi_I(z,t) + \psi_R(z,t))\right|_{z=0} = \left|\frac{\partial}{\partial z}(\psi_T(z,t))\right|_{z=0} \rightarrow k_1 A_I\sin(\omega t) - k_1 A_R\sin(\omega t) = k_2 A_T\sin(\omega t)$$

Soit :

$$A_I - A_R = \frac{k_2}{k_1}A_T$$

3. On sait que :

$$r = \frac{A_R}{A_I} \qquad t = \frac{A_T}{A_I}$$

et on a :

$$\left\{\begin{array}{l} A_I + A_R = A_T \\ \\ A_I - A_R = \dfrac{k_2}{k_1} A_T \end{array}\right\}$$

D'où :

$$A_I - A_R = \frac{k_2}{k_1}(A_I + A_R) \rightarrow A_I\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) = A_R\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$$

Soit :

$$t = \frac{A_T}{A_I} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Finalement, avec :

$$k_1 = \omega\sqrt{\frac{T_0}{\mu_1}} \qquad k_2 = \omega\sqrt{\frac{T_0}{\mu_2}} :$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \qquad t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

Remarque : on vérifie bien $t - r = 1$ à ne pas confondre avec la relation des coefficients en puissance $T + R = 1$.

Exercice 4

On pose : $x_1 = x + \psi(x,t)$ et $x_2 = x + dx + \psi(x + dx, t)$.

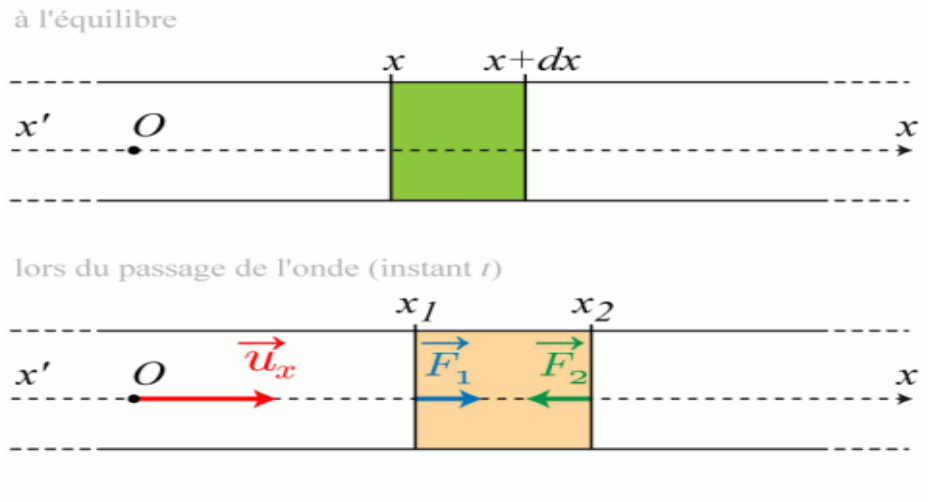


Schéma représentant la tranche de fluide au repos et à l'instant t avec bilan des forces.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la tranche de fluide, il vient :

$$dm.\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Après projection sur l'axe horizontal Ox, on obtient :

$$dm.a_x = F_1 - F_2$$

Le plan d'abscisse x au repos est à l'abscisse $x + \psi(x,t)$ à l'instant t et à l'abscisse $x + \psi(x, t + dt)$ à l'instant $t + dt$. Alors, la vitesse acoustique est égale à :

$$v_x = \frac{(x + \psi(x, t + dt)) - (x + \psi(x,t))}{dt} = \frac{\psi(x, t + dt) - \psi(x,t)}{dt} = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

En dérivant la vitesse, l'accélération s'écrit : $a_x = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$.

Avec la conservation de la masse de la tranche de fluide, il vient :

$$dm = \rho.S\,(x_2 - x_1) = \rho_0.S\,dx$$

avec la force de pression $F = S.P$, il vient :

$$F_1 - F_2 = S.[P(x + \psi(x,t), t) - P(x + dx + \psi(x + dx, t), t)] = -S.dx.\frac{\partial p(x + \psi(x,t), t)}{\partial x}$$

or $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ avec P_0 constante, d'où :

$$\frac{\partial P(x + \psi(x,t), t)}{\partial x} = \frac{\partial p(x + \psi(x,t), t)}{\partial x}$$

Sachant que $\psi(x,t) \ll x$, on peut faire un développement au 1er ordre tel que :

$$p(x + \psi(x,t), t) \approx p(x,t) + \psi(x,t)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

D'où :

$$\frac{\partial p(x + \psi(x,t), t)}{\partial x} \approx \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \psi(x,t)\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

En négligeant les termes du 2ème ordre, on obtient :

$$\frac{\partial p(x + \psi(x,t), t)}{\partial x} \approx \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

Alors :

$$\rho_0.S\,dx\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -S\,dx.\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \rightarrow \rho_0.\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

2. Dans le cas de mouvements de faible amplitude, on peut écrire :

$$\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s \approx -\frac{1}{V_0}\left[\frac{\Delta V}{\Delta P}\right]_{t=0}^{t}$$

Il faut donc déterminer la variation de pression et de volume entre la tranche de fluide au repos et à l'instant t.

- au repos : $V_0 = S.dx$ et la pression est P_0

- à l'instant t : $V = S.(x_2 - x_1)$ et $P = P_0 + p(x,t)$

D'où : $\Delta P = P_0 + p(x,t) - P_0 = p(x,t)$

$$\Delta V = S.[(x + dx + \psi(x + dx, t)) - (x + \psi(x,t), t)] - S.dx \approx S.dx.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$

Alors :

$$\chi_s = -\frac{1}{S.dx}\frac{S.dx\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}}{p(x,t)} \rightarrow p(x,t) \approx -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$

3. a) En combinant les formules obtenues à la question 1) et 2), il vient :

$$\rho.\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right)$$

En supposant que χ_s est une constante, on obtient finalement :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

avec : $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}}$

b) En dérivant par rapport à x l'équation d'onde obtenue à la question 3.a) et en supposant que les dérivations par rapport à x et t commutent, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$$

En supposant que les dérivations par rapport à x et t commutent, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_x$$

Avec : $p(x,t) \approx -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$ (voir question 2) et χ_s est constante, on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

En dérivant par rapport à t l'équation d'onde obtenue à la question 3.a), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

En supposant que les dérivations par rapport à x et t commutent, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

Avec : $u(x,t) \approx \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Exercice 5

1. Une solution réelle de l'équation de propagation $\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}$ peut s'écrire :

pour l'onde incidente (sens des $x$croissants) : $p_I(x,t) = A_I.\sin(\omega t - k_1 x)$

pour l'onde réfléchie (sens des $x$décroissants) : $p_R(x,t) = A_R.\sin(\omega t + k_1 x)$

pour l'onde transmise (sens des $x$croissants) : $p_T(x,t) = A_T.\sin(\omega t - k_2 x)$

Avec $k_1, k_2 > 0$, la condition pour que chaque onde soit solution de l'équation (relation de dispersion) est unique pour chaque milieu : $k_i = \frac{\omega}{c_i}$ $(i = 1, 2)$.

a) La relation de continuité de la surpression en $x = 0$ donne :

$$p_I(x=0,t) + p_R(x=0,t) = p_T(x=0,t) \rightarrow A_I \sin(\omega t) + A_R \sin(\omega t) = A_T \sin(\omega t)$$

Soit : $A_I + A_R = A_T$

La relation de continuité du débit volumique en $x = 0$ correspond à :

$$S.u_I(x=0,t) + S.u_R(x=0,t) = S.u_T(x=0,t)$$

$$\rightarrow u_I(x=0,t) + u_R(x=0,t) = u_T(x=0,t)$$

Avec $Z_1 = \frac{P_I(x=0,t)}{u_I(x=0,t)}$, $Z_1 = -\frac{P_R(x=0,t)}{u_R(x=0,t)}$, $Z_2 = \frac{P_T(x=0,t)}{u_T(x=0,t)}$, et (Z est une constante dont le signe dépend du sens de propagation), il vient :

$$\frac{p_I(x=0,t)}{Z_1} - \frac{p_R(x=0,t)}{Z_1} = \frac{p_T(x=0,t)}{Z_2} \rightarrow \frac{A_I \sin(\omega t) - A_R \sin(\omega t)}{Z_1} = \frac{A_T \sin(\omega t)}{Z_2}$$

Soit : $A_I - A_R = \frac{Z_1}{Z_2} A_T$

b) On sait que $r = \frac{A_R}{A_I}$ et $t = \frac{A_T}{A_I}$ et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_I + A_R = A_T \\ A_I - A_R = \frac{Z_1}{Z_2} A_T \end{array} \right\}$$

D'où : $A_I - A_R = \frac{Z_1}{Z_2}(A_I + A_R) \rightarrow A_I\left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) = A_R(1 + \frac{Z_1}{Z_2})$

Soit : $t = \frac{A_T}{A_I} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$.

2. a) Le coefficient de réflexion en puissance s'écrit : $R = \frac{\langle P_R \rangle}{\langle P_I \rangle}$.

Avec $\langle P \rangle = S|\langle p(x,t).u(x,t)\rangle|$, $Z_1 = \frac{P_I(x=0,t)}{u_I(x=0,t)}$ et $Z_1 = -\frac{P_R(x=0,t)}{u_R(x=0,t)}$, il vient :

$$R = \frac{S| < p_R(x,t).u_R(x,t) > |}{S| < p_I(x,t).u_I(x,t) > |} = \frac{\left| < p_R(x,t).\left(-\frac{p_R(x,t)}{Z_1}\right) > \right|}{\left| < p_I(x,t).\left(\frac{p_I(x,t)}{Z_1}\right) > \right|} = \frac{| < -p_R^2(x,t) > |}{| < p_I^2(x,t) > |}.$$

Or, $P_R^2(x,t) = A_R^2.sin^2(\omega t + k_1 x)$ et $sin^2\alpha$ est une fonction périodique du temps variant entre 0 et 1, donc :

$$< \sin^2\alpha >= \frac{1}{2}$$

D'où :

$$R = \frac{A_R^2}{A_I^2} = \left(\frac{A_R}{A_I}\right)^2 = r^2$$

Soit :

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$$

Le coefficient de transmission en puissance s'écrit :

$$T = \frac{< P_T >}{< P_I >}$$

Avec $\langle P \rangle = S|\langle p(x,t).u(x,t)\rangle|$, $Z_1 = \frac{P_I(x=0,t)}{u_I(x=0,t)}$ et $Z_2 = \frac{P_T(x=0,t)}{u_T(x=0,t)}$, il vient :

$$T = \frac{S| < p_T(x,t).u_T(x,t) > |}{S| < p_I(x,t).u_I(x,t) > |} = \frac{\left| < p_T(x,t).\left(\frac{p_T(x,t)}{Z_2}\right) > \right|}{\left| < p_I(x,t).\left(\frac{p_I(x,t)}{Z_1}\right) > \right|} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{| < p_T^2(x,t) > |}{| < p_I^2(x,t) > |}.$$

Or,

$$p_I^2(x,t) = A_I^2.\sin^2(\omega t - k_1 x),\ p_T^2(x,t) = A_T^2.\sin^2(\omega t - k_2 x)$$

et $sin^2\alpha$ est une fonction périodique du temps variant entre 0 et 1, donc :

$$< \sin^2\alpha >= \frac{1}{2}$$

D'où :

$$R = \frac{Z_1.A_T^2}{Z_2.A_I^2} = \frac{Z_1}{Z_2}\left(\frac{A_T}{A_I}\right)^2 = \frac{Z_1}{Z_2}t^2$$

Soit :

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Si on calcule la somme des deux coefficients :

$$R + T = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} + \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + 4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{(Z_2 + Z_1)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1$$

S'il y a conservation de l'énergie, on doit avoir $R + T = 1$: cqfd.

Solution de l'exercice 3 série II (Propagation des ondes)

1. L'équation de propagation des petites élongations transversales $z(x,t)$ le long de la corde :

$$\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La corde est fixée à ses deux extrémités (corde de longueur finie) : ondes stationnaires qui vont avoir lieu.

$\Rightarrow$ solution à variables séparées : $z(x,t) \ = \ f(t).g(x)$

$C.L.$: $z(x=0) = 0 \ et \ z(x=L) = 0 \ \forall \ t.$

La solution est sous forme sinusoidale à une dimension :

$z(x,t) = A.\cos(\omega t + \emptyset).\cos\,(kx + \emptyset')$, $k = \frac{\omega}{c}, T = \frac{2\pi}{\omega}, \lambda = \frac{2\pi}{k}$

C. L. : z (L,t) = 0 $\forall \ t$ $\Rightarrow A.\cos(\omega t + \emptyset).\cos\,(kL + \emptyset') = 0 \Rightarrow \cos(kL + \emptyset') = 0 \Rightarrow$ $\sin(kL) = 0$

z(0,t) = 0 $\forall \ t$ $\Rightarrow$ $A.\cos(\omega t + \emptyset).\cos\,(\emptyset') = 0 \Rightarrow$ $\cos(\emptyset') = 0$ $\Rightarrow \emptyset' = -\frac{\pi}{2}$

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow \ k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{\omega_n}{c} \ \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

On définit donc un mode propre associé à la pulsation propre $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$:

$$z_n(x,t) = A_n.\cos(\omega_n t + \emptyset_n).\sin\,(k_n x)$$

$$z_n(x,t) = A_n.\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \emptyset_n\right).\sin\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

La solution générale est une combinaison linéaire de tous les modes propres :

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \emptyset_n\right).\sin\,(\frac{n\pi}{L}x).$$

2.Détermination des amplitudes des harmoniques A_n :

C. I. : $\qquad z(x,0) = 0$

$\Rightarrow z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\emptyset_n).\sin\,(\frac{n\pi}{L}x) = 0$

$A_n \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos(\emptyset_n) = 0 \Rightarrow \emptyset_n = -\frac{\pi}{2}$

La solution générale s'écrit donc :

$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) . \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t})_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi c}{L} . \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \begin{cases} u \; pour \;\; a < x < a+e \\ 0 \quad\quad sinon \end{cases}$$

Cette expression se présente comme le développement en série de Fourier de la fonction $\frac{\partial z(x,t)}{\partial t})_{t=0}$ par rapport à la varaible x. cette fonction est impaire et chaque terme possède la période spatiale $\lambda_n = \frac{2L}{n}$. Ainsi, le fondamental a pour longueur $= 2L$ $(n = 1)$. Donc, les fonctions de x définissant les conditions initiales doivent être impaires et périodiques de période $2L$.

Comme $\frac{\partial z(x,t)}{\partial t})_{t=0}$ n'est définie qu'entre les positions $x = 0$ et $x = L$, il est possible de la prolonger de $x = -L$ à $x = 0$ en la rendant impaire. On la prolonge par suite par périodicité pour la rendre définie partout et donc décomposable en série de Fourier. Les constantes A_n pourront alors être déterminées en procédant par identification des coefficients de chacun des termes du développement. On écrit donc :

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t})_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n . \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Avec : $\alpha_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t})_{t=0} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$

Du fait de la parité :

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial z(x,t)}{\partial t})_{t=0} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \frac{2}{L} \int_a^{a+e} u \,.\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$\alpha_n = \frac{2u}{n\pi} \left[cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - cos\left(\frac{n\pi(a+e)}{L}\right)\right]$$

En utilisant la relation trigonométrique suivante :

$$cosp - cosq = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) . \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On obtient :

$$\alpha_n = \frac{4u}{n\pi}.\sin\left(\frac{n\pi e}{2L}\right).\sin\left(\frac{n\pi}{L}(a+\frac{e}{2})\right)$$

L'identification des coefficients des deux séries de Fourier donne :

$$A_n = \frac{L\alpha_n}{n\pi c} = \frac{4uL}{n^2\pi^2 c}.\sin\left(\frac{n\pi e}{2L}\right).\sin\left(\frac{n\pi}{L}(a+\frac{e}{2})\right)$$

3/ Pour un mode propre donné l'énergie cinétique moyenne de la corde s'obtient à partir de la vitesse correspondante et s'écrit :

$$\langle\xi_n\rangle = \frac{1}{2}\int\langle {v_n}^2\rangle.dm = \frac{\mu}{2}\int_0^L\langle\left(\frac{\partial z_n}{\partial t}\right)^2\rangle.dx$$

$$\langle\xi_n\rangle = \frac{\mu}{2}{A_n}^2(\frac{n\pi c}{L})^2.\langle sin^2(\frac{n\pi c}{L}t)\rangle\int_0^L\langle sin^2(\frac{n\pi}{L}x)\rangle\,dx$$

Or $\langle sin^2 x\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}$

D'où :

$$\langle\xi_n\rangle = \frac{\mu\pi^2c^2}{8L}(nA_n)^2.$$

$\langle\xi_n\rangle$ est proportionnelle à $(nA_n)^2$.

للمزيد من الدروس والتمارين زورا موقعنا الإلكتروني
www.clubnajah.com
لا تترددوا في طرح استفساراتكم عبر البريد الالكتروني أو صفحتنا الرسمية عبر الفايسبوك

Clubnajah2013@gmail.com
www.facebook.com/succes.club
بالتوفيق للجميع
مع تحيات المكتب المسير لنادي النجاح