Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 16 Janvier 2014

Contrôle N° 2 de Mécanique Analytique
Filière SMP - S5 Parcours Physique Moderne
Temps imparti : 1H30

Questions de cours (6 points)

1. Ennoncer le principe de Maupertuis et montrer que l'action réduite d'un système conservatif peut être exprimée comme suit

$$\mathcal{S}_0(q;P) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E-V(q)}ds$$

où ds est l'élement de distance dans l'espace des configurations décrit par les coordonnées généralisées $\vec{q} = (q_1, \cdots, q_n)$, n étant le nombre de degrés de libérté.

2. Rappeler ce que c'est que la surface d'action. Montrer qu'elle se propopage dans l'espace des configurations avec la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}.$$

3. En utilisant la dualité entre la surface d'action dans l'espace des configurations et la phase de l'onde dans l'espace des positions, montrer que l'énergie mécanique de la particule est proportionnelle à sa fréquence $E = h\nu$ et que son impulsion l'est au module du vecteur d'onde $p = \hbar k$.

4. En partant de l'équation de propagation des ondes

$$\left(\Delta - \frac{1}{v_\varphi^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(x,t) = 0$$

établir l'équation de Schrodinger pour un système conservatif donnée par

$$H\Psi(x,t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\Psi(x,t) = E\Psi(x,t).$$

Exercice 1 (4 points)

On considère la transformation

$$\begin{aligned} Q &= p^\alpha q^\beta \\ P &= p^\gamma q^\delta \end{aligned}$$

telles que $q > 0$ et $p > 0$.

1. Quelles conditions doivent vérifier α, β, δ et γ pour que la tranformation soit canonique ?
2. Etablir la fonction génératrice de type deux $G_2(q,P)$ qui engendre cette transformation.

Exercice 2 : Potentiel conique (10 points)

Considérons une particule de masse m astreinte à se déplacer sur un plan. La position de la particule est repérée dans le référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, considéré galiléen, par les coordonnées (x, y). Le potentiel auquel la particule est soumise est de la forme $V(r) = ar$, avec $r^2 = x^2 + y^2$ et a une constante positive. On utilise les coordonnées polaires (r, θ) comme coordonnées généralisées.

1. Montrer que la force qui dérive de ce potentiel est centrale. En déduire que le moment cinétique L_z par rapport à O est conservé.
2. Calculer le lagrangien $\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$. En déduire les moments conjugués p_r et p_θ.
3. Etablir le hamiltonien $\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta)$ de la particule et trouver les intégrales premières.
4. Exprimer le hamiltonien sous la forme
$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) \quad = \quad \frac{p_r^2}{2m} + \widetilde{V}(r).$$
5. Montrer qu'un mouvement circulaire stable est possible. En déduire le rayon r_0 de la trajectoire.
6. On perturbe maintenant ce mouvement par des petites oscillations radiales $r = r_0 + \delta r$ autour de r_0. Montrer que l'équation des petites oscillations est donnée par
$$m\delta\ddot{r} + 3a\left(\frac{ma}{L_z^2}\right)^{1/3}\delta r = 0.$$
En déduire leur fréquence.
7. Soit $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta)$ l'action hamiltonienne. Par séparation des variables, on a $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \mathcal{S}_\theta(\theta; P_\theta) + \mathcal{S}_r(r; P_r) - Et$.
   — Montrer que $\mathcal{S}_\theta(\theta; P_\theta) = \mathrm{C}\theta$, où C est une constante.
   — A partir de l'équation de Hamilton-Jacobi, expliciter l'équation vérifiée par $\mathcal{S}_r(r; P_r)$.
   — En déduire que
$$\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \int \sqrt{2m\,(E - ar) - \frac{C^2}{r^2}}dr + \mathrm{C}\theta - Et.$$
8. On représente le portrait de phase séparément dans les plans (r, p_r) et (θ, p_θ). Sur ces deux plans représenter le mouvement circulaire de la question (5.). Que devient le portrait dans le plan (r, p_r) si l'on admet les petites oscillations radiales de la quesion (6.) ?