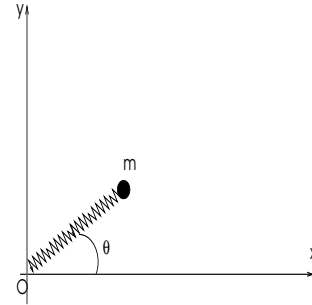


Contrôle de Mécanique Analytique
Parcours Physique Moderne

Exercice 1

Une particule de masse m est attachée à l'une des extrémités d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée à l'origine, comme illustré sur la figure ci-contre. La particule se déplace librement sur le plan horizontal (x, y) . La position de m est repérée par $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.



1. Quel est le nombre de degrés de liberté de m et les coordonnées généralisées à utiliser ?
2. Calculer la vitesse de m et déduire son énergie cinétique T .
3. Ecrire le potentiel V et déduire le lagrangien de m .
4. Etablir les équations du mouvement et déduire que $L_Z = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$ Pourrait-on déduire ce résultat autrement ? Justifier votre réponse.
5. On considère que le mouvement de m se fait avec une vitesse angulaire, $\omega = \dot{\theta}$, constante. Montrer que l'allongement du ressort est constant et que sa valeur est

$$r_0 - l_0 = \frac{ml_0\omega^2}{k - m\omega^2}$$

où $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_0$.

6. On considère cette fois-ci que le mouvement précédent est perturbé par des petites oscillations du ressort que l'on peut paramétriser par $\epsilon(t)$.
 - Retrouver l'équation du mouvement.
 - Calculer la fréquence des petites oscillations.
 - Que se passe-t-il pour le ressort si ω est très grande ?

Exercice 2

Un point matériel se déplace sur un plan (x, y) du point $A = (-1, 1/4)$ au point $B = (1, 1/4)$. La vitesse de déplacement du point matériel dépend de y et peut être paramétrisée par $v(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y}}$. On cherche à minimiser le temps de déplacement de A à B .

1. En utilisant le principe de Hamilton, déduire l'expression du lagrangien à minimiser.
2. Calculer le Hamiltonien et montrer qu'il est conservé.
3. Trouver la trajectoire $y(x)$ qui minimise le temps nécessaire pour aller de A à B et montrer qu'elle a deux solutions. Calculer le temps nécessaire dans chacun des cas et commenter les résultats.