

Contrôle 1^{re} partie : Mécanique Analytique
Parcours Physique Moderne
Durée : 1h30

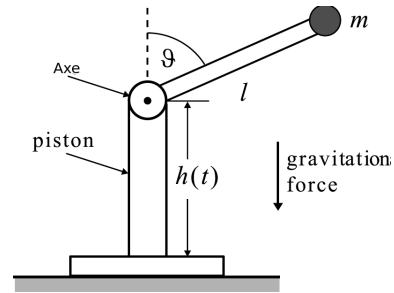
Question de cours

Donner une classification des systèmes suivant en précisant si le système est : "scléronome ou rhéonome", "holonome ou non-holonome", et "conservatif ou non-conservatif" :

1. Une sphère roulant sans frottement sur une autre sphère fixe.
2. Une particule se déplaçant sans frottement le long d'une barre très longue, la barre tournant dans le plan vertical avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe horizontal.

Exercice 1

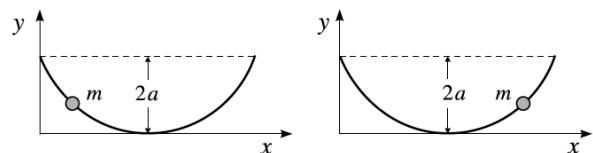
Une boule de masse m est fixée à l'une des extrémités d'une barre sans masse de longueur l . L'autre extrémité de la barre est fixée par un axe à un piston oscillant verticalement selon l'équation de mouvement : $h(t) = h_0 \cos \omega t$, comme illustré sur la figure ci-contre. Pour un tel système le mouvement de m se fait uniquement dans le plan (x, y) (celui de la feuille). On appelle θ l'angle que fait la barre l avec l'axe vertical (Oy) lors de sa rotation autour de l'axe (Oz).



1. Montrer que le système possède un seul degré de liberté dont θ est la coordonnée généralisée.
2. Exprimer les coordonnées (x, y) de la position du centre de gravité de m en fonction de l, h_0, θ, ω et t .
3. Calculer la vitesse de m et déduire son énergie cinétique T .
4. Ecrire le potentiel V et déduire le lagrangien de m .
5. De l'équation de Lagrange déduire l'équation de mouvement de m .
6. Réécrire l'équation de mouvement en fonction de θ' , en posant $\theta' = \theta - \pi$ et en faisant l'approximation des faibles déplacements ($\sin \theta \simeq \theta$).
7. Que devient cette équation si l'on fixe le piston à la position $h(t) = h_0 = 0$

Exercice 2

Une masse m considérée comme ponctuelle glisse sans frottement sur un cycloïde défini par $x = a(\theta - \sin \theta)$ et $y = a(1 + \cos \theta)$ (avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$) comme illustré sur la figure ci-contre. Pour un tel système le mouvement de m se fait uniquement dans le plan (x, y) .



1. Calculer le Lagrangien du système.
2. En déduire l'équation du mouvement de la masse m .
3. Par un changement de variable adéquat, montrez que l'équation du mouvement devient : $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g}{4a} u = 0$, que vaut u ?
4. Résoudre l'équation différentielle ainsi trouvée et en déduire que le mouvement de m est équivalent à celui d'un pendule ordinaire de longueur $l = 4a$