Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 29 Janvier 2014

Contrôle de rattrapage de Mécanique Analytique
Filière SMP - S5 Parcours Physique Moderne
Temps imparti : 1H30

Exercice 1 (6 points)

Un explorateur apperçoit dans le desert une oasis à un angle arctg($\frac{5}{12}$) au dessus de l'horizontale. On se propose de déterminer la distance qui le sépare de l'oasis.
Le principe de Fermat stipule que la lumière suit un chemin minimisant le temps du trajet que l'on peut exprimer comme suit

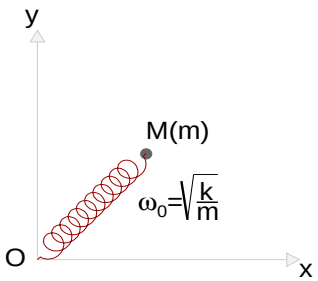
$$\mathcal{S} = \int n(s)ds$$

où $\mathcal{S}$ est la fonctionnelle à minimiser, $n(s)$ est l'indice de réfraction du milieu et s est la distance du trajet avec $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$. Dans les conditions de grande chaleur du désert, l'indice de réfraction dépend linéairement de z comme suit $n(z) = n_0(1 - \lambda z)$.

1. Expliciter la fonctionnelle à minimiser et trouver le "lagrangien associé". En déduire le "hamiltonien associé" et montrer qu'il est conservé.
2. Etablir l'équation de la trajectoire $z = z(x)$.[1]
3. Calculer la distance qui sépare l'explorateur de l'oasis.
   On néglige le rayon de courbure de la terre.

Exercice 2 (14 points)

Considérons un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et ce en deux dimensions, figure ci-contre. Le référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ est supposé galiléen. On utilise dans l'exercice les coordonnées cartésiennes.



1. Calculer la vitesse de M, $\vec{V}(M/\mathcal{R})$. En déduire son énergie cinétique T.
2. M est soumis à la seule action de la force de rappel $\vec{F} = -k(|\overrightarrow{OM}| - L_0)\vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$, L_0 étant l'allongement au repos du ressort que l'on prend nul par simplification, $L_0 = 0$. Calculer l'énergie potentielle $V(x, y)$.

1. On donne Argsh'$(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et Argsh$(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

3. Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}$ de l'oscillateur harmonique et déduire les moments conjugués p_x et p_y.
4. Montrer que $\mathcal{L}$ est invariant par rotation. En utilisant le théorème de Noether, déduire la grandeur conservée. On rappelle que lors d'une transformation associée à une rotation d'un angle s dans le plan (Oxy), on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Considérer une transformation infinitésimale, $s \to 0$, et utiliser les accroissements δx et δy.

5. Montrer que le hamiltonien de l'oscillateur harmonique est donné par

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x^2 + y^2).$$

Montrer qu'il est conservé.
On pose $E = E_x + E_y$, E étant l'énergie de l'oscillateur harmonique, $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$ et $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2$.

6. Considérons la transformation

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha + \frac{P_y}{m\omega_0}\sin\alpha & y = Y\cos\alpha + \frac{P_x}{m\omega_0}\sin\alpha \\ p_x = -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_x\cos\alpha & p_y = -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_y\cos\alpha \end{cases}$$

6-a) Montrer que la transformation est canonique.

6-b) Ecrire le nouvel hamiltonien $\mathcal{H}(X, Y, P_X, P_Y)$.

7. On se propose de résoudre le problème en utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ). On note par Q_1, Q_2, P_1 et P_2 les nouvelles variables.

7-a) Ecrire l'équation de HJ. En déduire que l'on peut séparer les variables $S(x, y; t, P_1, P_2) = S_x(x; P_1) + S_y(y; P_2) - Et$, $S(x, y; P_1, P_2)$ étant l'action hamiltonienne.

7-b) Expliciter les équations vérifiées respectivement par $S_x(x; P_1)$ et $S_y(y; P_2)$. En déduire que

$$S(x, y; t, P_1, P_2) = \pm \int \sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2 x^2}\, dx \pm \int \sqrt{2pE_y - m^2\omega_0^2 y^2}\, dy - Et.$$

7-c) Rappeler pourquoi Q_1, Q_2, P_1 et P_2 sont conservées. On pose $P_1 = E$ et $P_2 = E_y = E - E_x$. Etablir les expressions de p_x, p_y, Q_1 et Q_2.

7-d) En utilisant les conditions initiales suivantes

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$$

établir les trajectoires dans les nouvelles et les anciennes coordonnées, Q_1, Q_2, $x(t)$ et $y(t)$.