Ridouane KHAFFOU

R.K.

SMP5

ANNALES THEMATIQUES CORRIGEES

MECANIQUE ANALYTIQUE

Rachid MESRAR

Chers étudiants, comme promis voici le document que vous attendiez depuis le début de l'année. Il regroupe tous les examens de mécanique analytique que j'ai proposé ces deux dernières années avec leur corrigé détaillé. Il comporte aussi le corrigé d'une application pédagogique (un ancien examen). Toutes ces épreuves vous donneront une idée sur la philosophie générale et l'esprit dans lesquels je conçois mes sujets d'examens et vous permettront, à coup sûr, de mieux préparer votre examen de janvier. En espérant que vous en tiriez le meilleur profit, je vous souhaite bien du plaisir, du courage et aussi une bonne dose de chance pour vos examens.

Rachid MESRAR
Agadir le 20/11/16

Examen de mécanique analytique et vibrations

Session normale - Février 2015

SMP5

Durée : 1h 30'

Sujet thématique proposé : stabilité d'un cerceau autour d'une nutation uniforme

Mise en œuvre par la méthode des équations de Lagrange avec multiplicateurs

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant lié à un bâti fixe (S_0). Un cerceau (S) de centre d'inertie G, de rayon a et de masse m roule sans glisser sur le plan $(\pi)=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. On repère sa position par les coordonnées (x, y, z) de G et par les angles d'Euler habituels (ψ,θ,φ). On désigne par $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ et $R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les deux repères intermédiaires et par $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère orthonormé direct lié à (S). Le point de contact entre (S) et (π) est noté I avec $\overrightarrow{IG}=a\vec{w}$. L'axe $(G,\vec{z})$ est normal au plan du cerceau et la réaction de (π) sur (S) est représentée par un glisseur dont le support passe par le point I et de résultante $\vec{R}_I = Z\vec{z}_0$ (liaison sans frottement).

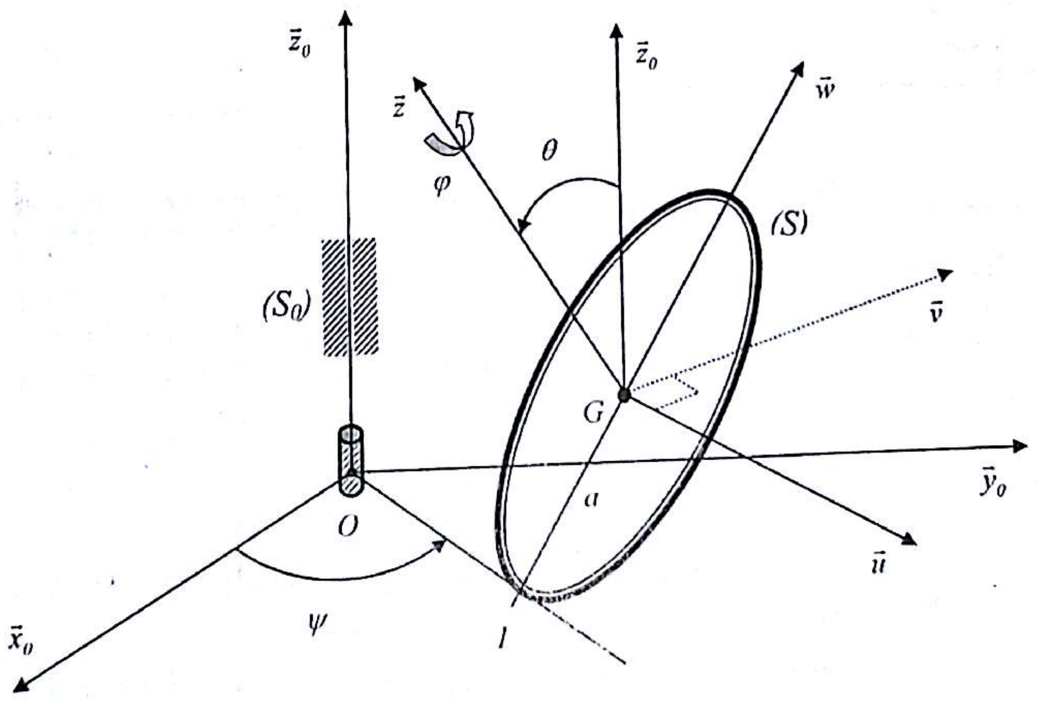


Figure : description générale du système

Q1- *Construire les figures de calcul. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ par ses composantes dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$.*

Q2- *Montrer que la condition géométrique de contact entre le cerceau (S) et le plan (π) est :*

$$z = a\sin\theta \qquad (L_p)$$

Préciser la nature de cette liaison.

☞ ***Dans la suite du problème, la liaison géométrique (L_p) sera prise comme primitive.***

Q3- *Quel est le nombre de degrés de liberté du système ? Proposer alors un champ de vitesses virtuelles (C.V.V.) adéquat à l'étude de ce problème.*
Q4- *Calculer l'énergie cinétique du cerceau $T(S/R_o)$.*
Q5- *Calculer la puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués au système. En déduire les composantes des forces généralisées Q_i et l'expression de la fonction de force U.*
Q6- *Calculer la vitesse de glissement en I de (S) par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.*
Q7- *Ecrire les équations cinématiques de liaison traduisant le non-glissement en I. On notera (L_c) la liaison cinématique formé par ces deux équations.*
Q8- *En déduire la relation :*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + a^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta)^2 \qquad (1)$$

Q9- *Ecrire l'intégrale première de l'énergie cinétique et montrer, compte tenu de (1), que cette intégrale se met sous la forme:*

$$2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 \sin^2\theta = \frac{2E}{ma^2} - \frac{2g}{a}\sin\theta \qquad (2)$$

où E est une constante représentant l'énergie mécanique du système.

☞ ***Dans la suite du problème, la liaison cinématique (L_c) sera prise comme complémentaire.***

Q10- *En utilisant un C.V.V. compatible avec la liaison primitive (L_p) et la liaison complémentaire (L_c), écrire les équations de Lagrange avec multiplicateurs. On notera λ_1 et λ_2 ces deux multiplicateurs.*
Q11- *Montrer que l'élimination de x, y, λ_1 et λ_2 conduit aux équations différentielles suivantes:*

$$\ddot{\psi}\sin\theta - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \qquad (3)$$

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

Q12- *A partir des équations (3) et (4) étudier les mouvements pour lesquels le cerceau (S) garde une inclinaison constante $\theta = \theta_0$. Conclure.*

☞ ***On rappelle que la matrice centrale d'inertie du cerceau est représentée par :***

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}$$

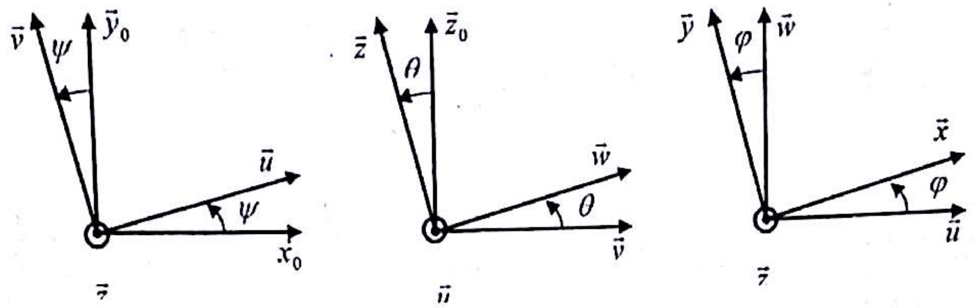
Examen de mécanique analytique et vibrations

Session normale - Février 2015

SMP5

Solution détaillée

R1- ***Figures de calcul***



On en déduit que $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}$

$$\vec{\Omega}(S_3/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \left|\begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{array}\right._{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

R2-

$$\overrightarrow{OI}.\vec{z}_0 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}).\vec{z}_0 = 0$$

avec $\overrightarrow{OG} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ *et* $\overrightarrow{GI} = -a\vec{w}$

D'où :

$\boxed{z = a\sin\theta}$ *(Equation géométrique de contact)*

Nature de la liaison : c'est une équation de liaison holonome.

R3-

Le nombre de paramètres de position de (S) est six : $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ *mais compte tenu de l'équation de liaison* $z = a\sin\theta$, *le nombre de degrés de liberté est réduit à cinq qui sont:*

$\boxed{(x, y, \psi, \theta, \varphi)}$ *et le C.V.V. est* $\boxed{(\dot{x}^*, \dot{y}^*, \dot{\psi}^*, \dot{\theta}^*, \dot{\varphi}^*)}$

R4-

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + \frac{ma^2}{4}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$$

R5-

$P^*(\vec{F}_{ext}) = P^*(\vec{P}) + P^*(\vec{R}_I)$ avec $P^*(\vec{R}_I) = 0$ (liaison sans frottement)

$$P^*(\vec{P}) = -mg\vec{z}_0.\vec{V}^*(G) = -mg\vec{z}_0.(\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + a\dot{\theta}\cos\theta\vec{z}_0) = -mga\dot{\theta}\cos\theta = Q_\theta\dot{\theta} = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(-mga\sin\theta)$$

D'où : $\boxed{Q_\theta = -mga\cos\theta}$ $Q_x = Q_y = Q_\psi = Q_\varphi = 0$ et $\boxed{U(\theta) = -mga\sin\theta}$

R6-

$$\vec{V}_g(I, S/R_0) = \vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{V}(G \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}$$

$$\vec{V}(G \in S/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + a\dot{\theta}\cos\theta\vec{z}_0 \quad et \quad \overrightarrow{GI} = -a\vec{w}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S/R_0) = [\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)]\vec{u} + [-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta]\vec{v}}$$

R7-

La condition de roulement sans glissement s'écrit : $\vec{V}_g(I, S/R_0) = \vec{0}$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0 & (1)' \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta = 0 & (2)' \end{cases}}$$

R8-

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi = -a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) & (1)' \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = -a\dot{\theta}\sin\theta & (2)' \end{cases}} \quad (Lc)$$

$(1)'^2 + (2)'^2 \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + a^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2}$

R9- *L'intégrale première de l'énergie cinétique s'écrit :* $T + V = T - U = Cte = E$

Soit :

$$m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + 2mga\sin\theta = 2E$$

En remplaçant $m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ par $ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$... de la relation (1), on obtient :

$$2ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta = -2mga\sin\theta + 2E$$

Ou encore $\boxed{2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta = \frac{2E}{ma^2} - \frac{2g}{a}\sin\theta}$

R10- *Les équations (Lc) sont :*

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0 & (1)' \times \lambda_1 \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta = 0 & (2)' \times \lambda_2 \end{cases}$$

D'où les équations de Lagrange avec multiplicateurs :

$L_x : m\ddot{x} = \lambda_1 \cos\psi - \lambda_2 \sin\psi$

$L_y : m\ddot{y} = \lambda_1 \sin\psi + \lambda_2 \cos\psi$

$$L_\psi : \frac{d}{dt}\left[\frac{ma^2}{2}\sin^2\theta\dot{\psi} + ma^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\right] = \lambda_1 a\cos\theta$$

$$L_\varphi : \frac{d}{dt}\left[ma^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\right] = \lambda_1 a$$

$$L_\theta : \frac{d}{dt}\left[\frac{ma^2}{2}\dot{\theta} + ma^2\cos^2\theta\dot{\theta}\right] - \frac{ma^2}{2}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + ma^2\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) + ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \lambda_2 a\sin\theta - mga\cos\theta$$

R11-

L'élimination de λ_1 entre les 2 équations L_ψ et L_φ donne :

$$\cos\theta\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\dot{\psi} + (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\right]$$

$$\underline{\cos\theta\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta]} = \frac{1}{2}\sin^2\theta\ddot{\psi} + \sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\psi} + \underline{\cos\theta\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta]} - (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\sin\theta\dot{\theta}$$

Soit : $\frac{1}{2}\sin^2\theta\ddot{\psi} - \sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi$ (solution exclue car le cerceau est posé sur le plan)

Ou $\boxed{\frac{1}{2}\ddot{\psi}\sin\theta = \dot{\theta}\dot{\varphi}}$ c'est la relation (3) demandée.

La dérivation par rapport au temps de l'équation (1)' donne :

$$a\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta] = -\ddot{x}\cos\psi - \ddot{y}\sin\psi + \dot{x}\dot{\psi}\sin\psi - \dot{y}\dot{\psi}\cos\psi$$

la relation (2)' $\Rightarrow$ $\dot{x}\sin\psi - \dot{y}\cos\psi = a\sin\theta\dot{\theta}$, soit en remplaçant dans l'équation ci-dessus :

$$a\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta] = -\ddot{x}\cos\psi - \ddot{y}\sin\psi + a\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta$$

D'autre part, L_x et L_y donnent $\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi = \frac{\lambda_1}{m}$

Et L_φ donne : $\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi = a\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta]$

Finalement on obtient :

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

R12-

$\theta = \theta_0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$; $(3) \Rightarrow \ddot{\psi} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = \dot{\psi}_0}$

$(4) \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0}$

Conclusion

Les mouvements pour lesquels le cerceau garde une inclinaison constante $\theta = \theta_0$ *sont tels que :*

$\boxed{\dot{\psi} = \dot{\psi}_0}$ et $\boxed{\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0}$ càd les mouvements pour lesquels le cerceau a une vitesse de précession constante et une vitesse de rotation propre constante.

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE - AGADIR

Examen de mécanique analytique et vibrations
Session de rattrapage - Mars 2015
SMP5
Durée : 1h 30'

Sujet thématique proposé : étude d'un mécanisme pendulaire
Mise en œuvre par les formalismes lagrangien et hamiltonien

PARTIE A – ETUDE PAR LE FORMALISME LAGRANGIEN

Le système étudié est composé d'une barre (AB) de masse m, de longueur 2a et de deux charnières de masses négligeables. Les deux extrémités A et B de la barre peuvent glisser, sans frottement, sur les axes $(O,\vec{x})$ et $(O,\vec{y})$ grâce à ces deux charnières. Le centre d'inertie G de la barre est lié au point fixe C de l'axe $(O,\vec{y})$ par un ressort élastique de raideur k et de longueur initiale l_o ($l_o > a$). Au cours du mouvement le ressort demeure horizontal et parallèle à l'axe $(O,\vec{x})$ (voir figure). La configuration du système est complètement déterminée par l'angle θ que fait la barre (AB) avec l'axe des abscisses. On notera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

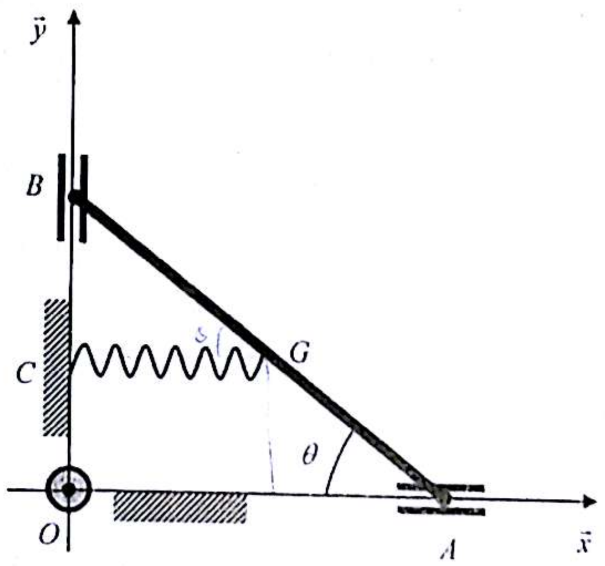


Figure : description générale du système

Q1- *Caractériser mécaniquement le système.*
Q2- *Exprimer les coordonnées (x, y) du centre d'inertie G de la barre AB en fonction de θ.*
Q3- *Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.*
Q4- *Établir son énergie potentielle.*
Q5- *En déduire son Lagrangien.*
Q6- *Déterminer l'équation d'Euler - Lagrange du mouvement. On notera (L_θ) cette équation.*
Q7- *Après avoir justifié son existence, écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique.*
Q8- *Montrer que cette intégrale se ramène à une équation du type $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$.*
Q9- *A quoi servirait une telle équation ?*

PARTIE B – ETUDE PAR LE FORMALISME HAMILTONIEN

Q10- *Calculer l'impulsion généralisée p_θ.*

Q11- *En utilisant la transformée de Legendre, déterminer le Hamiltonien H du système.*

Q12- *H représente-t-il l'énergie totale du système ? Justifier votre réponse.*

Q13- *Déterminer les équations canoniques du mouvement.*

Q14- *En déduire l'équation du mouvement (L_θ) déterminée à la question 6 de la partie A. Conclure.*

PARTIE C – LINEARISATION ET RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT

Dans cette partie on suppose que $\theta << 1$.

Q15- *Linéariser (L_θ) et montrer qu'elle se ramène à une équation du type :*

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = C \quad (E)$$

où Ω et C sont des constantes à préciser.

Q16- *Quel est le sens physique de la grandeur Ω ?*

Q17- *Résoudre l'équation (E) et donner l'expression de $\theta(t)$. On notera A et B les deux constantes d'intégration.*

Question bonus (*)

Après ce long travail d'analyse, Faites une synthèse, très succincte, en guise de conclusion à ce sujet thématique.

> ☞ *On rappelle que le Hamiltonien $\mathcal{H}$ d'un système mécanique n'est autre que la transformée de Legendre du Lagrangien $\mathcal{L}$ en $\dot{q}$:*
>
> $$H = \mathcal{L}(L) = p_i\dot{q}_i - L$$
> $$\dot{q} \to p$$

(*) Question subsidiaire de 1 point qui sera rajouté, en plus, à la note obtenue.

Examen de mécanique analytique et vibrations

Session de rattrapage - Mars 2015

SMP5

Solution détaillée

PARTIE A – ETUDE PAR LE FORMALISME LAGRANGIEN

R1- *Le système est conservatif et holonome et il a 1 seul degré de liberté.*

R2- $\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{V}(G/R) = \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$

R3- $T(AB/R) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\theta}^2$

avec $I_{Gz} = \int_{P\in(AB)} r^2 dm = \lambda \int_{-a}^{a} r^2 dr = \lambda\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{m}{2a} \times 2 \times \frac{a^3}{3} = \frac{ma^2}{3}$

D'où :

$$\boxed{T(AB/R) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2}$$

R4-

$V = Vpes + Vél$ avec $V_{pes} = mgy = mga\sin\theta$ et $V_{él} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ où $l = a\cos\theta$

D'où :

$$\boxed{V = mga\sin\theta + \frac{1}{2}k(a\cos\theta - l_0)^2}$$

R5-

$$\boxed{L = T - V = \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\sin\theta - \frac{1}{2}k(a\cos\theta - l_0)^2}$$

R6-

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mga\cos\theta + k(a\cos\theta - l_0)a\sin\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{4}{3}ma^2\dot{\theta} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{4}{3}a^2\ddot{\theta} + ga\cos\theta - \omega_0^2(a\cos\theta - l_0)a\sin\theta = 0} \quad (L_0)$$

R7-

L'intégrale première de l'énergie cinétique existe car le système est conservatif, d'où :

$T + V = K = Cte$ *soit :*

$$\boxed{T+V=\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2=K}$$

R8-

$$\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2=K-mga\sin\theta-\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2$$

D'où :

$$\boxed{\dot{\theta}^2=\frac{3}{2a^2}\left[\omega_0^2-ga\sin\theta-\frac{1}{2}\omega_0^2(a\cos\theta-l_0)^2\right]=f(\theta)}$$

R9-

Cette équation sert à remplacer l'équation (L_θ).

PARTIE B – ETUDE PAR LE FORMALISME HAMILTONIEN

R10-

$$\boxed{P_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}}\quad\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{3P_\theta}{4ma^2}$$

R11-

$$H=P_\theta\dot{\theta}-L=P_\theta\dot{\theta}-\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2$$

$$=P_\theta\times\frac{3P_\theta}{4ma^2}-\frac{2}{3}ma^2\times\left(\frac{3P_\theta}{4ma^2}\right)^2+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2$$

D'où :

$$\boxed{H=\frac{3P_\theta^2}{8ma^2}+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2}$$

R12-

Oui H représente l'énergie totale du système car $\frac{\partial H}{\partial t}=0$.

R13-

$$\boxed{\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial P_\theta}=\frac{3P_\theta}{4ma^2}}\ (1)\qquad\boxed{\dot{P}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-mga\cos\theta+ka(a\cos\theta-l_0)\sin\theta}\ (2)$$

R14-

$$(1)\Rightarrow P_\theta=\frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}$$

$$(2)\Rightarrow\dot{P}_\theta=\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}=-mga\cos\theta+ka(a\cos\theta-l_0)\sin\theta$$

D'où :

$$\boxed{\frac{4}{3}a^2\ddot{\theta}+ga\cos\theta-\omega_0^2(a\cos\theta-l_0)a\sin\theta=0}\quad(L_\theta)$$

PARTIE C – LINEARISATION ET RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT

R15-

$\theta \prec\prec 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$.

$(L_\theta) \Rightarrow \frac{4}{3}a^2\ddot{\theta} + ga - \omega_0^2(a - l_0)a\theta = 0$ soit : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3\omega_0}{4a}(l_0 - a)\theta = -\frac{3g}{4a}}$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = C} \quad (E) \quad \text{avec } \Omega^2 = \frac{3\omega_0}{4a}(l_0 - a) \text{ et } C = -\frac{3g}{4a}$$

R16-

Ω représente la pulsation liée aux oscillations de la tige (AB).

R17-

$\boxed{\theta = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + D}$ avec $\boxed{D = -\frac{g}{\omega_0(l_0 - a)}}$

Question bonus (*)

La conclusion qui s'impose est que les formalismes lagrangien et hamiltonien conduisent à la même équation du mouvement.

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE - AGADIR

2015/2016

Examen de mécanique analytique et vibrations
Session normale de Janvier 2016
SMP5
Durée : 1h 30'

Sujet thématique proposé : étude dynamique et énergétique d'un système pendulaire complexe
Mise en œuvre par la méthode des équations de Lagrange

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant lié à un bâti fixe (S_o). Le système mécanique étudié (Σ) est composé:

- *d'un disque homogène (D) de centre C, de rayon a et de masse M,*
- *d'une tige (T) sans masse, de longueur l, dont une extrémité reste en C (liaison parfaite),*
- *d'un point matériel (P) de masse m, fixé à l'autre extrémité de la tige.*

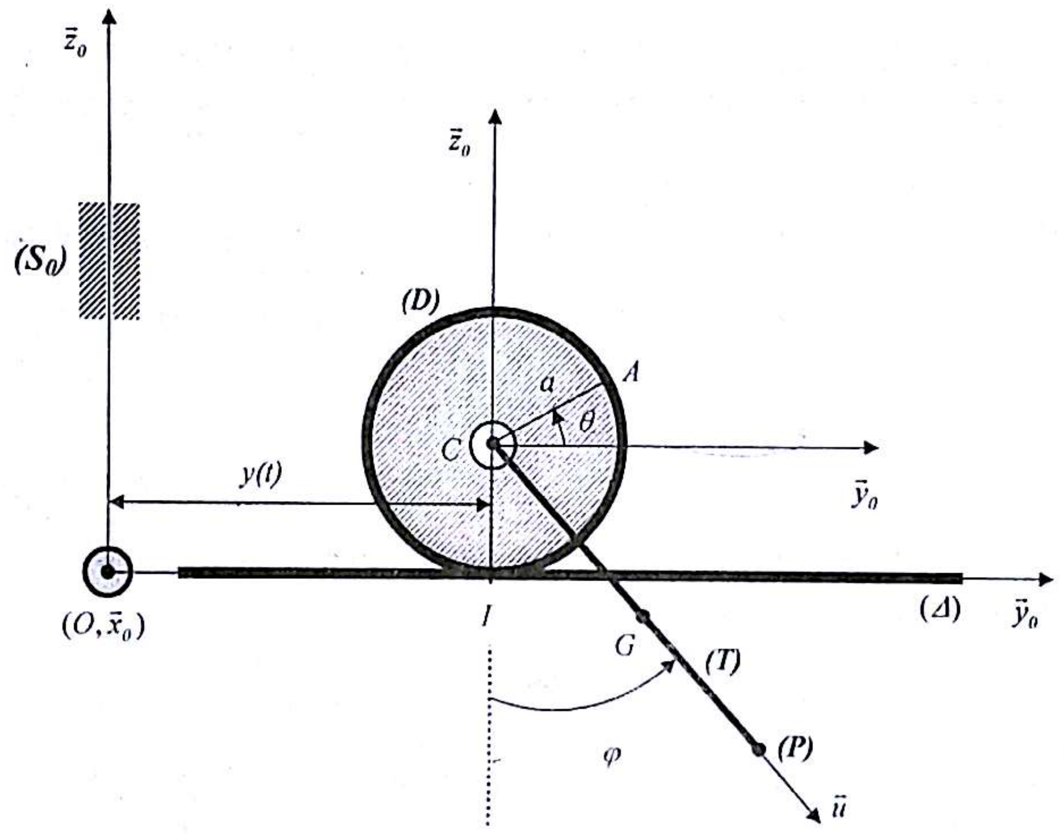


Figure : description générale du système

Le disque roule sur une droite matérialisée (Δ) confondue avec l'axe $(O,\vec{y}_0)$ et le système reste dans le plan $(O,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ (voir figure).

La droite (Δ) est animée d'un mouvement de translation rectiligne telle que la vitesse d'un point quelconque de (Δ) soit égale à $\vec{V}(\Delta)=\alpha(t)\vec{y}_0$ où α est une fonction qui dépend explicitement du temps t.

Dans tout le problème, on supposera que le disque <u>roule sans glisser</u> sur la droite mobile (Δ)

Soit A un point lié au disque (distinct de C) et $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{CP}}{\left\|\overrightarrow{CP}\right\|}$ un vecteur unitaire, on pose alors:

$\theta = (\vec{y}_0, \overrightarrow{CA})$, $\varphi = (\overrightarrow{CI}, \vec{u})$, $y = OI = \vec{y}_0.\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OC} = y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$.

Partie A - Etude cinématique et détermination analytique des équations de liaison

Q1- Proposer un paramétrage adéquat pour le système (Σ).

Q2- Donner l'expression de $\vec{\Omega}(D/R_0)$.

Q3- Déterminer la condition géométrique de contact entre (D) et l'axe (Δ).

Dans la suite du problème, on notera (L_g) cette <u>équation géométrique de liaison.</u>

Q4- Calculer $\vec{V}(C \in D/R_0)$, $\vec{V}(I \in D/R_0)$ et $\vec{V}(P/R_0)$.

Q5- Calculer la vitesse de glissement en I du disque sur (Δ). En déduire la condition de roulement sans glissement de (D) sur (Δ).

Dans la suite du problème, on notera (L_c) cette <u>équation cinématique de liaison.</u>

Partie B - Etude dynamique-I : le CVV est compatible avec (L_g) mais non compatible avec (L_c)

Prendre comme CVV le champ $(\dot{y}^*, \dot{\theta}^*, \dot{\varphi}^*)$

Q6- Calculer l'énergie cinétique du point matériel (P) dans son mouvement par rapport à (R_o).

Q7- Calculer l'énergie cinétique du disque (D) dans son mouvement par rapport à (R_o).

Q8- En déduire l'énergie cinétique du système (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_o).

Q9- Sans faire de calcul, donner l'expression de $\vec{V}^*(I)$ (vitesse virtuelle du point I).

Q10- Calculer les puissances virtuelles des efforts extérieurs.

En déduire les expressions des forces généralisées Q_i.

Q11- Ecrire les équations de Lagrange. Mettre en évidence l'existence de deux coordonnées cycliques.

Partie C - Etude dynamique-II : le CVV est compatible à la fois avec (L_g) et (L_c)

Prendre comme CVV le champ $(\dot{y}^*, \dot{\varphi}^*)$

Q12- Calculer l'énergie cinétique du système (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_o).

Q13- Montrer que $T(\Sigma/R_0) = T_2 + T_1 + T_0$ où T_2, T_1 et T_0 sont des expressions à préciser et à définir.

Q14- Calculer les puissances virtuelles des efforts extérieurs.

En déduire les forces généralisées Q_i et une fonction de force U.

Q15- Ecrire les nouvelles équations de Lagrange. En déduire une intégrale première du mouvement.

Q16- A-t-on l'intégrale première de l'énergie cinétique ? Justifier votre réponse.

Q17- A-t-on l'intégrale première de Painlevé ? Justifier votre réponse.

On donne la matrice centrale d'inertie du disque : $M_C^{(D)} = \begin{pmatrix} \dfrac{Ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{Ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{Ma^2}{4} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$

Examen de mécanique analytique et vibrations

Session normale - Janvier 2016

SMP5

Solution détaillée

Partie A : étude cinématique et détermination analytique des équations de liaison

R1- *Le système peut être paramétré par les coordonnées généralisées* (y,θ,φ).

R2- $\vec{\Omega}(D/R_0)=\dot{\theta}\vec{x}_0$

R3- *La condition géométrique de contact s'écrit :*

$$\overrightarrow{O_0I}.\vec{z}_0=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{O_0C}+\overrightarrow{CI}).\vec{z}_0 \Leftrightarrow (y\vec{y}_0+z\vec{z}_0-a\vec{z}_0).\vec{z}_0=0 \Leftrightarrow z-a=0$$

D'où :

$$\boxed{z=a}\ (L_g)$$

R4-

$$\boxed{\vec{V}(C/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d(y\vec{y}_0+a\vec{z}_0)}{dt}\right]_{R_0}=\dot{y}\vec{y}_0}$$

$$\boxed{\vec{V}(I\in D/R_0)=\vec{V}(C\in D/R_0)+\vec{\Omega}(D/R_0)\wedge\overrightarrow{CI}=\dot{y}\vec{y}_0+\dot{\theta}\vec{x}_0\wedge(-a\vec{z}_0)=(\dot{y}+a\dot{\theta})\vec{y}_0}$$

$$\vec{V}(P/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\overrightarrow{O_0P}=\overrightarrow{O_0C}+\overrightarrow{CP}=y\vec{y}_0+a\vec{z}_0+l\vec{u}=y\vec{y}_0+a\vec{z}_0+l(-\cos\varphi\vec{z}_0+\sin\varphi\vec{y}_0)$$

$$=(y+l\sin\varphi)\vec{y}_0+(a-l\cos\varphi)\vec{z}_0$$

$$\boxed{\vec{V}(P/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{R_0}=(\dot{y}+l\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{y}_0+l\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{z}_0}$$

R5- *Vitesse de glissement en I :*

$$\vec{V}(I\in D/\Delta)=\vec{V}(I\in D/R_0)-\vec{V}(I\in\Delta/R_0)=(\dot{y}+a\dot{\theta})\vec{y}_0-\alpha(t)\vec{y}_0$$

D'où :

$$\boxed{\vec{V}(I\in D/\Delta)=(\dot{y}+a\dot{\theta}-\alpha(t))\vec{y}_0}$$

La condition de roulement sans glissement est : $\boxed{\dot{y}+a\dot{\theta}-\alpha(t)=0}$ *(Lc)*

Partie B : étude dynamique-I : le CVV est compatible avec (L_g) mais non compatible avec (L_c)

R6- $T(P/R_0)=\dfrac{1}{2}m\vec{V}^2(P/R_0)=\dfrac{1}{2}m\left[(\dot{y}+l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right]$

D'où :

$$\boxed{T(P/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2+l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)}$$

$\boxed{R7-}$ $$T(D/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(C/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}M_C^{(D)}\vec{\Omega}=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}(\dot{\theta},0,0)\begin{pmatrix}\frac{Ma^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{Ma^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\0\\0\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{T(D/R_0)=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{Ma^2}{4}\dot{\theta}^2}$$

$\boxed{R8-}$

$$\boxed{T(\Sigma/R_0)=\frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2+\frac{1}{2}ml(l\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi)+\frac{Ma^2}{4}\dot{\theta}^2}$$

$\boxed{R9-}$

$$\boxed{\vec{V}^*(I)=(\dot{y}^*+a\dot{\theta}^*)\vec{y}_0}$$

$\boxed{R10-}$

-Puissance virtuelle due aux poids :

$$P_1^*=-Mg\vec{z}_0.\vec{V}^*(C)-mg\vec{z}_0.\vec{V}^*(P)=-Mg\vec{z}_0.\dot{y}^*\vec{y}_0-mg\vec{z}_0.\left((\dot{y}^*+l\dot{\varphi}^*\cos\varphi)\vec{y}_0+l\dot{\varphi}^*\sin\varphi\vec{z}_0\right)$$

D'où :

$$\boxed{P_1^*=-mgl\dot{\varphi}^*\sin\varphi}$$

-Puissance virtuelle due à la réaction en I :

$P_2^*=\vec{R}_I.\vec{V}^*(I)$ *avec* $\vec{R}_I=Y\vec{y}_0+Z\vec{z}_0$ *car il y a frottement.*

$P_2^*=(Y\vec{y}_0+Z\vec{z}_0).\left((\dot{y}^*+a\dot{\theta}^*)\vec{y}_0\right)=Y(\dot{y}^*+a\dot{\theta}^*)\vec{y}_0$

D'où :

$$\boxed{P_2^*=Y(\dot{y}^*+a\dot{\theta}^*)}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{P_t^*=P_1^*+P_2^*=Y\dot{y}^*+aY\dot{\theta}^*-mgl\sin\varphi\dot{\varphi}^*}$$

D'où les forces généralisées :

$$\boxed{Q_y=Y},\ \boxed{Q_\theta=aY}\ \text{et}\ \boxed{Q_\varphi=-mgl\sin\varphi}$$

$\boxed{R11-}$ ***Equations de Lagrange***

$$Ly:\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y\quad\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial T}{\partial\dot{y}}=(M+m)\dot{y}+ml\dot{\varphi}\cos\varphi\end{cases}$$

y est une coordonnée cyclique

D'où :

$$\boxed{L_y:(M+m)\ddot{y}+ml\ddot{\varphi}\cos\varphi-ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi=Y}$$

$$L_\theta : \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \dfrac{Ma^2}{2}\dot\theta \end{cases}$$

θ est une coordonnée cyclique

D'où :

$$\boxed{L_\theta : \frac{Ma^2}{2}\ddot\theta = aY} \text{ ou encore } \boxed{L_\theta : \frac{Ma}{2}\ddot\theta = Y}$$

$$L_\varphi : \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = -ml\dot\varphi\dot y \sin\varphi \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi + ml\dot y\cos\varphi \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{L_\varphi : l\ddot\varphi + \ddot y\cos\varphi = -g\sin\varphi}$$

Partie C : étude dynamique-II : le CVV est compatible à la fois avec (L_g) et (L_c)

R12- Le CVV est $(\dot y^*, \dot\varphi^*) \Rightarrow a\dot\theta = \alpha(t) - \dot y$

D'où :

$$\boxed{T(\Sigma / R_0) = \frac{1}{4}(3M+2m)\dot y^2 + \frac{1}{2}ml(l\dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot y\cos\varphi) - \frac{1}{2}M\alpha(t)\dot y + \frac{1}{4}M\alpha^2(t)}$$

R13-

$T_2 = \frac{1}{4}(3M+2m)\dot y^2 + \frac{1}{2}ml(l\dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot y\cos\varphi)$ ***forme quadratique.***

$T_1 = -\frac{1}{2}M\alpha(t)\dot y$ ***forme linéaire.***

$T_0 = \frac{1}{4}M\alpha^2(t)$ ***forme de degré zéro.***

R14- Puissances virtuelles

-Puissance virtuelle due aux poids :

$$P_1^* = -Mg\vec z_0.\vec V^*(C) - mg\vec z_0.\vec V^*(P) = -Mg\vec z_0.\dot y^*\vec y_0 - mg\vec z_0.\left((\dot y^* + l\dot\varphi^*\cos\varphi)\vec y_0 + l\dot\varphi^*\sin\varphi\vec z_0\right)$$

D'où :

$$\boxed{P_1^* = -mgl\dot\varphi^*\sin\varphi}$$

-Puissance virtuelle due à la réaction en I :

$P_2^* = \vec R_I.\vec V^*(I) = 0$ car $\vec V^*(I) = 0$ car le CVV est compatible avec (Lc).

D'où :

$$\boxed{P_2^* = 0}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{P_t^* = P_1^* + P_2^* = -mgl\sin\varphi\dot\varphi^*}$$

D'où les forces généralisées :

$$\boxed{Q_y = 0} \text{ et } \boxed{Q_\varphi = -mgl\sin\varphi}$$

$$P_i^* = -mgl\sin\varphi\dot{\varphi}^* = \frac{d(mgl\cos\varphi)}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

D'où : $\boxed{U = mgl\cos\varphi}$

R15- Equations de Lagrange

$$Ly : \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y \begin{cases} Q_y = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dfrac{1}{2}(3M+2m)\dot{y} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi - \dfrac{1}{2}M\alpha(t) \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{L_y : \frac{1}{2}(3M+2m)\dot{y} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}M\alpha(t) = Cte}$$ **Intégrale première du mouvement**

$$L_\varphi : \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \begin{cases} Q_\varphi = -mgl\sin\varphi \\ \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = -ml\dot{\varphi}\dot{y}\sin\varphi \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{y}\cos\varphi \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{L_\varphi : l\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi = -g\sin\varphi}$$

R16-

Oui on a l'intégrale première de l'énergie cinétique, en effet le théorème de l'énergie cinétique nous permet d'écrire :

$$\frac{dT(\Sigma/R_0)}{dt} = P(F_{ext}) = \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dT(\Sigma/R_0)}{dt} - \frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(T-U)}{dt} = 0$$

D'où :

$\boxed{T - U = Cte}$ **Intégrale première de l'énergie cinétique**

R17-

Non nous n'avons pas l'intégrale première de Painlevé car $\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$ *puisque* $\frac{\partial T_1}{\partial t} \neq 0$ *et* $\frac{\partial T_0}{\partial t} \neq 0$

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE - AGADIR

2015/2016

Examen de mécanique analytique et vibrations
Session de rattrapage – Février 2016
SMP5
Durée: 2 heures

Sujet thématique proposé : étude dynamique et énergétique d'un double pendule amorti
Mise en œuvre par les formalismes lagrangien et hamiltonien

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen avec $(O,\vec{x}_0)$ vertical descendant lié à un bâti fixe (S_0). Le système mécanique étudié (Σ) est composé de deux tiges rigides (OA) et (AB) de masses négligeables et de longueurs respectives l_1 et l_2 ($l_2 \neq l_1$). La tige (OA) est articulée en O et porte, en son extrémité A, une masse ponctuelle m_1. La tige (AB) est articulée en A et porte, en son extrémité B, une masse ponctuelle m_2 ($m_2 \neq m_1$). Afin d'amortir les oscillations du double pendule ainsi constitué, un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide l_0 est accroché entre le point A et le point C appartenant à l'axe $(O,\vec{x}_0)$ (voir figure). La liaison en C est telle que le ressort reste toujours horizontal. Le système mécanique, composé des deux tiges et du ressort, oscille dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

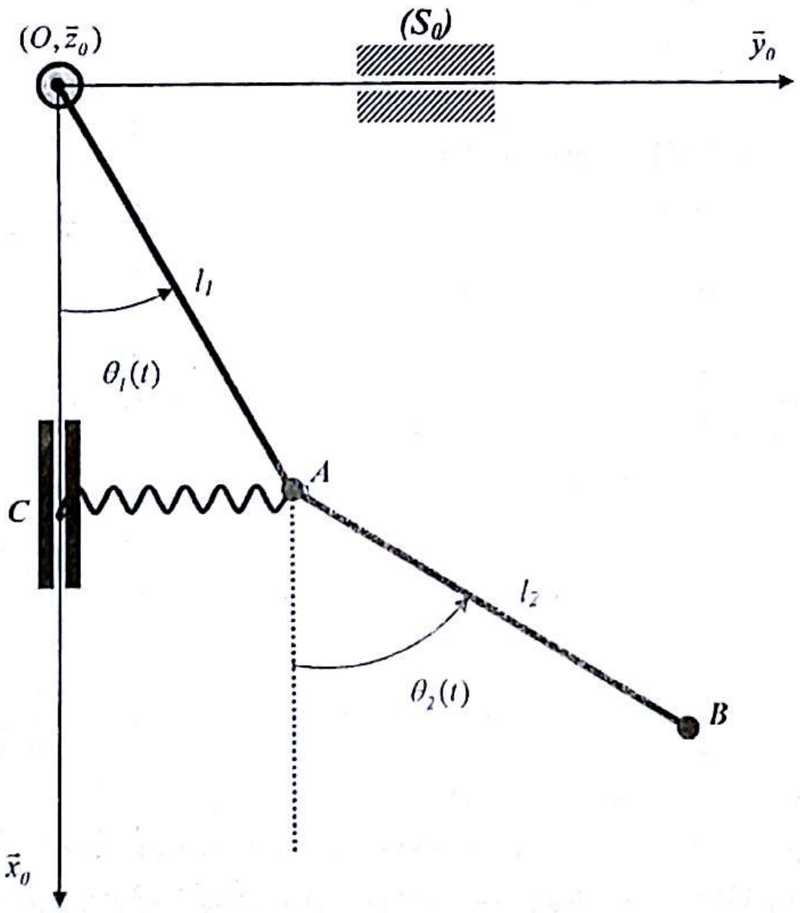


Figure: description générale du système

> ☞ **N.B. Les deux parties A et B ne sont pas indépendantes.**

PARTIE A – ETUDE PAR LE FORMALISME LAGRANGIEN

Q1- Quelles sont les coordonnées généralisées du système? Justifier votre réponse.
Q2- Calculer la vitesse du point matériel A.
Q3- En déduire l'expression de l'énergie cinétique de la particule A.
Q4- Calculer la vitesse du point matériel B.
Q5- En déduire l'expression de l'énergie cinétique de la particule B.
Q6- Montrer que l'énergie cinétique de (Σ) peut être mise sous la forme quadratique suivante:

$$T = A_0\dot{\theta}_1^2 + B_0\dot{\theta}_2^2 + C_0\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

où A_0, B_0 et C_0 sont des constantes à déterminer.
Préciser leur dimension. Que représentent-elles physiquement?
Q7- Calculer l'énergie potentielle de la pesanteur du système.
Q8- Calculer l'énergie potentielle élastique emmagasinée par le ressort.
Q9- Donner alors l'expression de l'énergie potentielle totale de (Σ).
Q10- En déduire l'expression du Lagrangien du système.
Q11- Déterminer les équations d'Euler-Lagrange.

PARTIE B – ETUDE PAR LE FORMALISME HAMILTONIEN

> ☞ **Dans cette partie, on enlève le ressort et on ne garde que le double pendule.**

Q12- Sans faire de calcul, donner la nouvelle expression de l'énergie potentielle totale V.
Q13- Calculer les impulsions généralisées p_1 et p_2 associées aux coordonnées θ_1 et θ_2.
Que représentent physiquement p_1 et p_2 ? Justifier votre réponse.
Q14- En déduire les expressions de $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ (vitesses généralisées) en fonction de p_1, p_2, θ_1 et θ_2.
Q15- Montrer que l'énergie cinétique du système peut être mise sous la forme :

$$T = \frac{1}{2}(p_1\dot{\theta}_1 + p_2\dot{\theta}_2)$$

Q16- En déduire que $H = T + V$ où H est le hamiltonien du système.
Interpréter physiquement ce résultat.
Q17- Exprimer H en fonction de p_1, p_2, θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.
Q18- En déduire l'expression définitive de H en fonction de p_1, p_2, θ_1 et θ_2.
Q19- En se servant des équations canoniques, déterminer les vitesses généralisées $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.
Commenter le résultat obtenu.

Examen de mécanique analytique et vibrations

Session de rattrapage - Février 2016

SMP5

Solution détaillée

PARTIE A – ETUDE PAR LE FORMALISME LAGRANGIEN

R1-

θ_1 et θ_2 car la particule A est repérée par θ_1 et la particule B est repérée par θ_2

R2-

$$\vec{V}(A/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0} \quad avec \quad \overrightarrow{OA}= {}_{R_0}\begin{vmatrix} l_1\cos\theta_1 \\ l_1\sin\theta_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{V}(A/R_0)= {}_{R_0}\begin{vmatrix} -l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \\ l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \end{vmatrix}}$$

R3-

$$\boxed{T(A/R_0)=\frac{1}{2}m_1\vec{V}^2(A/R_0)=\frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2}$$

R4-

$$\vec{V}(B/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} \quad avec \quad \overrightarrow{OB}= {}_{R_0}\begin{vmatrix} l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2 \\ l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(B/R_0)= {}_{R_0}\begin{vmatrix} -l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1-l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{vmatrix}}$$

R5-

$$\boxed{T(B/R_0)=\frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(B/R_0)=\frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2+l_2^2\dot{\theta}_2^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]}$$

R6-

$$\boxed{T(\Sigma/R_0)=T(A/R_0)+T(B/R_0)=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

D'où: $A_0=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2$, $B_0=\frac{m_2}{2}l_2^2$ *et* $C_0=m_2l_1l_2$.

D'après leur dimension(M.L²) ils représentent des moments d'inertie.

R7-

$$V_{pes}(\Sigma)=V_{pes}(A)+V_{pes}(B)=-m_1gl_1\cos\theta_1-m_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)$$

$$\boxed{V_{pes}(\Sigma)=-(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1-m_2gl_2\cos\theta_2}$$

R8-

$$\boxed{V_{él}=\frac{1}{2}k(l_1\sin\theta_1-l_0)^2}$$

R9-

$$\boxed{V_{tot}(\Sigma)=V_{pes}(\Sigma)+V_{él}=-(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1-m_2gl_2\cos\theta_2+\frac{1}{2}k(l_1\sin\theta_1-l_0)^2}$$

R10-

$$\boxed{\begin{aligned}L=T-V=&\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1\\&+m_2gl_2\cos\theta_2-\frac{1}{2}k(l_1\sin\theta_1-l_0)^2\end{aligned}}$$

R11-

$$L_{\theta_1}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}-\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=-m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1-k(l_1\sin\theta_1-l_0)(l_1\cos\theta_1)\\ \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1+m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\end{cases}$$

D'où:

$$\boxed{(m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+(m_1+m_2)g\sin\theta_1+kl_1\sin\theta_1\cos\theta_1-kl_0\cos\theta_1=0}$$

$$L_{\theta_2}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}-\frac{\partial L}{\partial\theta_2}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial\theta_2}=m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-m_2gl_2\sin\theta_2\\ \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}=m_2l_2^2\dot{\theta}_2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\end{cases}$$

D'où:

$$\boxed{l_2\ddot{\theta}_2+l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0}$$

PARTIE B – ETUDE PAR LE FORMALISME HAMILTONIEN

R12-

$$\boxed{V_{tot}(\Sigma)=V_{pes}(\Sigma)+V_{el}=-(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1-m_2gl_2\cos\theta_2}$$

R13-

$$\begin{cases}p_1=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1+m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\ p_2=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}=m_2l_2^2\dot{\theta}_2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\end{cases}$$

p_1 et p_2 représentent les composantes du moment cinétique/ à l'axe $\vec{z}_0$ des particules A et B respectivement car les variables θ_1 et θ_2 sont des angles.

R14-

$$\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\ m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & m_2l_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\ m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & m_2l_2^2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D=m_2(l_1l_2)^2\left[m_1+\sin^2(\theta_1-\theta_2)\right]}$$

D'où:

$$\boxed{\dot{\theta}_1=\frac{p_1-\frac{l_1}{l_2}p_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{m_1l_1^2+m_2l_1^2\sin^2(\theta_1-\theta_2)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot{\theta}_2=\frac{-\frac{l_1}{l_2}p_1\cos(\theta_1-\theta_2)+\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{l_1^2}{l_2^2}p_2}{m_1l_1^2+m_2l_1^2\sin^2(\theta_1-\theta_2)}}$$

R15-

$$\frac{1}{2}(p_1\dot{\theta}_1+p_2\dot{\theta}_2)=\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1+m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]\dot{\theta}_1+\frac{1}{2}\left[m_2l_2^2\dot{\theta}_2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right]\dot{\theta}_2$$
$$=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)=T$$

R16-

$$\boxed{H=p_1\dot{\theta}_1+p_2\dot{\theta}_2-(T-V)=p_1\dot{\theta}_1+p_2\dot{\theta}_2-\frac{1}{2}(p_1\dot{\theta}_1+p_2\dot{\theta}_2)+V=\frac{1}{2}(p_1\dot{\theta}_1+p_2\dot{\theta}_2)+V=T+V}$$

***Interprétation physique** : le hamiltonien représente l'énergie totale du système car le système est isolé, en effet : $\frac{\partial L}{\partial t}=0$.*

R17-

$$\boxed{H=T+V=\frac{1}{2}(p_1\dot{\theta}_1+p_2\dot{\theta}_2)-(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1-m_2gl_2\cos\theta_2}$$

R18-

$$\boxed{H=\frac{1}{2}(p_1\dot{\theta}_1+p_2\dot{\theta}_2)-(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1-m_2gl_2\cos\theta_2}$$

Or

$$\boxed{\dot{\theta}_1=\frac{p_1-\frac{l_1}{l_2}p_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{m_1l_1^2+m_2l_1^2\sin^2(\theta_1-\theta_2)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot{\theta}_2=\frac{-\frac{l_1}{l_2}\cos(\theta_1-\theta_2)p_1+\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{l_1^2}{l_2^2}p_2}{m_1l_1^2+m_2l_1^2\sin^2(\theta_1-\theta_2)}} \text{ (d'après R14)}$$

D'où :

$$\boxed{H=\frac{\frac{p_1^2}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{l_1^2}{l_2^2}p_2^2-\frac{l_1}{l_2}p_1p_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{m_1l_1^2+m_2l_1^2\sin^2(\theta_1-\theta_2)}-(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1-m_2gl_2\cos\theta_2}$$

R19-

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dfrac{p_1 - \dfrac{l_1}{l_2} p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{\theta}_2 = \dfrac{-\dfrac{l_1}{l_2} p_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right) \dfrac{l_1^2}{l_2^2} p_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases}$$

Commentaire : *on retrouve les mêmes expressions de $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ calculées dans la question 14.*