Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
le 14 Novembre 2013

Contrôle 1 de Mécanique Analytique
Filière SMP - S5 Parcours Physique Moderne
Corrigé et barème

Questions de cours(3pts)

1. Montrons que deux lagrangiens différant par une différentielle totale par rapport au temps d'une fonction décrivent la même dynamique, c'est à dire donnent les mêmes équations du mouvement

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{df(q_i,t)}{dt} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt}\right] \qquad \textbf{0.5pt}$$

or

$$\frac{d}{dt} = \dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial t} \qquad \textbf{0.5pt}$$

$$\Longrightarrow \qquad \textbf{0.5pt} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt}\right] = \dot{q}_i\frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \\ \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{df}{dt} = \dot{q}_i\frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \textbf{0.5pt}$$

et donc les équations de Lagrange restent invariantes.

2. Démonstration du théorème de Noether
Ennoncé Soit un jeu de coordonnées généralisées $\tilde{q}_k(s)$ dépendant continument d'un paramètre s et tel que $\tilde{q}_k(0) = q_k$. Si le lagrangien est invariant par rapport à la transformation $q_k \to \tilde{q}_k$, c'est à dire $L(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t)$, alors

$$I(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds}\bigg|_{s=0}$$

est une constante du mouvement.
Démonstration L est indépendant de s, implique

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d\dot{\tilde{q}}_k}{ds}\right) \\ &= \sum_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{q}_k}{ds}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds}\right) = 0 \qquad \textbf{1pt} \end{aligned}$$

ce qui en évaluant l'expression obtenue en $s = 0$ prouve le théorème.

Exercice 1 (3points)

Nous avons $T = T(\dot{x}, \dot{y})$ et comme $\mathcal{L} = T - V$, alors la dépendance de $\mathcal{L}$ en fonction des coordonnées (x, y) est celle du potentiel. Ainsi

1. $V(x, y, t) = ax$ est indépendant de y et donc $\mathcal{L}$ est indépendant aussi de y ce qui implique que $\mathcal{L}$ est invariant par rapport à toute transformation de y, en particulier la translation selon OY. La loi de symétrie est ainsi la translation selon OY. **0.5pt**
   La grandeur conservée est p_y, le moment conjugué de y qui est la composante de la quantité de mouvement selon OY. **0.5pt**
   On remarque aussi que le potentiel ne dépend pas explicitement du temps ce qui implique aussi que $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps et donc invariant par rapport à une translation dans le temps. La quantité conservée est l'énergie. **0.25pt**

2. $V(x, y) = at(x^2+y^2)$: puisque V dépend de $x^2+y^2 = r^2$ et donc sa valeur ne change pas si l'on effectue une rotation, puisque le module d'un vecteur est invariant par rapport à une rotation. La symétrie concerne ainsi les rotations. **0.5pt**
   La quantité conservée est le moment cinétique, selon le théorème de Noether. **0.5pt**

3. $V(x, y) = a(x - y)$: ce potentiel dépend de la différence entre x et y et donc sa valeur reste la même si l'on fait une translation simultannée selon OX, $x \to x' + \epsilon$ et selon OY, $y \to y' = y+\epsilon$, alors $V(x', y') = a(x'-y') = a(x-y)$ et donc invariant par rapport à une translation selon $\vec{i} + \vec{j}$. **0.25pt**
   La symétrie est donc la translation dans la direction $\vec{i} + \vec{j}$. La grandeur conservée est la quantité de mouvement selon la direction $\vec{i} + \vec{j}$. **0.25pt**
   On remarque aussi que le potentiel ne dépend pas explicitement du temps ce qui implique aussi que $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps et donc invariant par rapport à une translation dans le temps. La quantité conservée est l'énergie. **0.25pt**

Exercice 2 (6points)

1. Calculons la dérivée totale par rapport au temps de $\vec{A}(x_k, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{A}(x_k,t)}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t} \qquad \textbf{1pt} \\
&= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_i}v_i + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t}$$

2. Exprimons les composantes de $\vec{F}$

$$\begin{aligned}
\frac{F_i}{q} &= E_i + (\vec{v} \wedge \vec{B})_i \\
&= -\nabla_i(\varphi(x_k,t)) - \frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t} + \left[\vec{v} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_k,t)\right)\right]_i \\
&= -\nabla_i(\varphi(x_k,t)) - \frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t} + \left[\nabla_i\left(\vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) A_i(x_k,t)\right] \\
&= -\nabla_i(\varphi(x_k,t)) + \nabla_i\left(\vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) - \frac{dA_i(x_k,t)}{dt} \\
&= -\nabla_i\left(\varphi(x_k,t)) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\varphi(x_k,t)) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) \\
&= -\nabla_i V(x_k,t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i} V(x_k,t) \qquad \textbf{2pts}
\end{aligned}$$

qui est la relation recherchée.

3. L'énergie cinétique de la particule est $T = \frac{1}{2}mv^2$, ce qui donne pour le lagrangien

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x_k,\dot{x}_k) &= T(\dot{x}_k) - V(x_k,\dot{x}_k,t) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 - q\left(\varphi(x_k,t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right). \qquad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont données par les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \implies \frac{d}{dt}(mv_i) + q\frac{d}{dt}A_i(x_k,t) = -q\left(\nabla_i\varphi(x_k,t) - \vec{v} \cdot \nabla_i\vec{A}(x_k,t)\right)$$

en remplaçant $d\vec{A}(x_k,t)/dt$ par son expression, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(mv_i) &= -q\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(A_i(x_k,t)) - q\frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t} - q\left(\nabla_i\varphi(x_k,t) - \vec{v} \cdot \nabla_i\vec{A}(x_k,t)\right) \\
&= -q\left(\nabla_i\varphi(x_k,t) + \frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t}\right) + q\left(\nabla_i(\vec{A}(x_k,t)) \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(A_i(x_k,t))\right) \\
&= qE_i + q\left[\vec{v} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_k,t)\right)\right]_i \\
&= F_i \qquad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et dont la forme vectorielle est

$$m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = \vec{F}$$

4. Les moments conjugués sont

$$\begin{aligned}
p_{x_1} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + aA_1(x_k,t) \qquad \textbf{0.25pt} \\
p_{x_2} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + aA_2(x_k,t) \qquad \textbf{0.25pt} \\
p_{x_3} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3 + aA_3(x_k,t) \qquad \textbf{0.25pt}.
\end{aligned}$$

5. Le hamiltonien est donné par

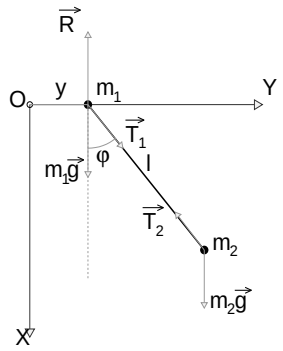
$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_k, p_{x_k}, t) &= \sum_{i=1}^{3} p_{x_i}\dot{x}_i - \mathcal{L}(x_k, \dot{x}_k, t) \\
&= \sum_{i=1}^{3} (m\dot{x}_i + aA_i(x_k,t))\dot{x}_i - \frac{1}{2}mv^2 + q\left(\varphi(x_k,t) - \vec{v}\cdot\vec{A}(x_k,t)\right) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi(x_k,t). \qquad \textbf{0.75pt}
\end{aligned}$$

Il représente l'énergie de la particule **0.25pt**.
On constate que le champ magnétique ne contribue pas à l'énergie ce qui est attendu puisque la force exercée sur la particule par le champ magnétique, $\vec{v}\wedge\vec{B}$, ne travaille pas et donc ne contribue pas à l'énergie :

$\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right)\cdot\overrightarrow{dl} = \left(\overrightarrow{dl}\wedge\vec{v}\right)\cdot\vec{B} = \vec{0}\cdot\vec{B} = 0$ **0.25pt**.

Exercice 3 (8points)

Soit un pendule de longueur l inextensible et de masse m_2 soumis à l'action de son poids. Son point de suspension de masse m_1 est astreint à se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal OY., voir figure ci-dessous.



1. Le système est formé par deux masses et le mouvement est plan, ce qui donne 2 coordonnées par masse. Or la masse m_1 est astreinte à se déplacer par l'axe OY et la distance entre m_1 et m_2 est égale à la longueur du fil ce qui donne deux contraintes.

   Quatre coordonnées et deux contraintes donc deux degrés de liberté. **0.5pt**
2. Calculons les coordonnées de m_1 (x_1, y_1) :

$$\textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& 0 \\ y_1 &=& y \end{array}\right. \Longrightarrow \qquad \textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 &=& 0 \\ \dot{y}_1 &=& \dot{y} \end{array}\right.$$

   ce qui donne pour les composantes de la vitesse de m_1 $(0, \dot{y})$.
   On procède de la même manière pour la masse m_2

$$\textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} x_2 &=& l\cos\varphi \\ y_2 &=& y + l\sin\varphi \end{array}\right. \Longrightarrow \qquad \textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_2 &=& -l\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y}_2 &=& \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \end{array}\right.$$

ce qui donne pour les composantes de la vitesse de m_1 $(-l\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)$.
Ainsi l'énergie cinétique de m_1 est égale à $T_1 = 1/2 m_1 \dot{y}^2$ et celle de m_2 est

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique de (S)

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi\right). \qquad \textbf{0.25pt}$$

3. Les forces qui sont appliquées à (S), voir figure ci-dessus,
   — $\vec{R}$ et $m_2\vec{g}$ qui sont appliquées à m_1. Elles ne travaillent pas puisqu'elles sont perpendiculaires au déplacement de m_2. **0.25pt**
   $\vec{T_1} = -\vec{T_2}$ sont des contraintes internes à (S) et donc ne contribuent pas au potentiel. **0.25pt**
   — $m_2\vec{g}$ appliquées à m_2 et dont le travail élémentaire pour un déplacement infinétisimal $\overrightarrow{dl_2}$

$$\begin{aligned} \delta W(m_2\vec{g}) &= m_2\vec{g}\cdot\overrightarrow{dl_2} = -m_2 g l\sin\varphi \;\; d\varphi \\ \Longrightarrow dV &= -\delta W = m_2 g\sin\varphi \;\; d\varphi \Longrightarrow V = -m_2 g\cos\varphi + K \qquad \textbf{0.75pt} \end{aligned}$$

   la constante $K = 0$.

4. Le lagrangien de (S) est égale à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi. \qquad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

   Les moments conjugués sont donnés par

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \textbf{0.25pt} \\ p_\varphi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{y}\cos\varphi. \qquad \textbf{0.25pt} \end{aligned}$$

5. Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \Longrightarrow (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0 \qquad \textbf{0.25pt} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \Longrightarrow m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l(\ddot{y}\cos\varphi - \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi) = -m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 g l\sin\varphi \qquad \textbf{0.25pt} \end{aligned}$$

   cette dernière équation se réduisant à $l\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$.
   Comme $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie mécanique est une intégrale première associée à l'invariance par translation dans le temps **0.25pt**.
   De même, y est une variable cyclique, ce qui implique que p_y est conservée et la loi de symétrie est la translation selon OY. **0.25pt**

6. p_y est une intégrale première, alors

$$\begin{aligned} p_y = K &\implies \dot{y} + \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{K}{m_1+m_2} \\ &\implies dy = -\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\cos\varphi d\varphi + \frac{K}{m_1+m_2}dt \\ &\implies y = -\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\varphi + \frac{K}{m_1+m_2}t + K_1 \end{aligned}$$

0.5pt

et les deux constantes sont déterminées à partir des conditions initiales

$$\begin{aligned} y_0 = 0 &\implies K_1 = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\varphi_0 \\ \dot{y}(0) = v_0 &\implies K = (m_1+m_2)v_0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$y = v_0 t - \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right).$$

0.5pt

7. On reprend l'équation

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

et on substitue $\ddot{y}$ par $-(m_2 l/[m_1+m_2])(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$ et obtient

$$\ddot{\varphi}\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

ce qui donne le cadre de l'approximation des petites oscillation, $\sin\varphi \simeq \varphi$ et $\cos\varphi \simeq 1$, et les oscillations lentes :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}\varphi = 0$$

1pt

et qui est l'équation recherchée.
C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre à coefficients constants et dont l'équation caractéristique est $r^2 + \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1} = 0$ qui a deux solutions complexes $r = \pm i\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{g(m_1+m_2)/lm_1}$ et donc la solution est

$$\varphi(t) = A_1 e^{-i\omega_0 t} + A_1 e^{i\omega_0 t} = A\sin(\omega_0 t - \beta_0)$$

avec $A\sin\beta_0 = \varphi_0$ et $0 = A\omega_0\cos(\beta_0) \implies \beta_0 = \pi/2$ et donc $A = \varphi_0$

la solution est alors $\varphi(t) = \varphi_0\sin(\omega_0 t + \pi/2) = \varphi_0\cos\omega_0 t$ **0.25pt**.

8. La solution de y est alors, en tenant compte de $\sin\varphi \simeq \varphi$

$$y = v_0 t - \frac{m_2 l\varphi_0}{m_1+m_2}\left(\cos\omega_0 t - 1\right).$$

0.75pt