# Résume du cours de Mécanique Analytique

jean-eloi.lombard@epfl.ch

22 janvier 2009

## Table des matières



## 1 Équations de Lagrange

**Définition 1 (Intégrale première)** Une *intégrale première* est une fonction des positions, des vitesses et du temps qui est conservée au cours du temps.

**Remarque 1** Chaque intégrale première conduit à une équation différentielle du premier ordre.

**Définition 2 (Contrainte holonome)** Une *contrainte holonôme* est une contrainte où les vitesses n'apparaissent pas, elle peut se mettre sous la forme :

$$f(\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_n}, t) = 0$$

**Définition 3 (Système de coordonnées généralisées)** Un système de coordonnées $q_j$ avec $j = 1, \ldots, 3N - k$ qui permet de décrire un système satisfaisant les $k$ contraintes holonômes auxquelles il est soumis est un *système de coordonées généralisées.*

**Définition 4 (Force généralisée)** Pour un système de $N$ particules décrit par $n$ coordonnées généralisées $q_j$, *les forces généralisées* sont définie par :

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F_i} \frac{\partial \mathbf{r_i}}{\partial \mathbf{q_j}}$$

**Proposition 1** Si les forces $\mathbf{F_j}$ dépendent d'un potentiel $V$ alors :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

**Définition 5 (Deplacement virtuel)** Un déplacement infinitésimal est dit *virtuel* si à un instant donné il satisfait les contraintes holonômes imposées par le système.

**Principe 1 (de d'Alembert)** Pour tout déplacement virtuel $\delta \mathbf{r_i}$ :

$$\sum_i (\mathbf{F_i} - \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{i}) \dot{\delta} \mathbf{r_i} = 0$$

**Définition 6 (Équations de Lagrange)** Soit $T$ l'énergie cinétique du système, $V$ l'énergie potentielle et $L = T - V$ le Lagrangien, alors les *équations de Lagrange* sont définies par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{1}$$

**Définition 7 (Variable cyclique)** Si $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, c'est-à-dire Lagrangien ne dépend pas de $q_j$ alors la quantité $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = cst.$ et on dit que la variable $q_j$ est *cyclique.*

**Définition 8 (Impulsion généralisée)** *L'impulsion généralisée* de la coordonnées $q_j$ est définie par :

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

**Définition 9 (Système isolé)** Un système est dit *isolé* si son Lagrangien ne dépends pas du temps $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. On défini alors la fonction hamiltonienne $h$ par :

$$h(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = cst.$$

## 1.1 Calcul des variations

Les équations de Lagrange ont la même forme que les équations d'Euler introduite dans le cadre des calculs de variations.

**Définition 10 (Équation d'Euler)** Soit la fonctionnelle[1] $I$ qui a toute fonction $y(x)$ associe

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\mathrm{d}x$$

avec $x_1, x_2$ des bornes d'intégrations fixées et $y' = \frac{dy}{dx}$. La fonction $y(x)$ qui rends $I$ extremal avec les conditions $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ est donnée par l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

## 1.2 Principe de moindre action

**Définition 11 (Action)** *L'action* est la fonctionnelle des trajectoires définie par :

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)dt$$

**Principe 2 (de moindre action)** Dans l'ensemble des trajectoires possibles allant de $\{q_i^1\}$ à l'instant $t_1$ à $\{q_i^2\}$ à l'instant $t_2$ la trajectoire physique est celle dont l'action est extrémale (en générale minimal).

**Remarque 2** Il peut y avoir plusieurs trajectoires extremales.

**Proposition 2** Le principe de moindre action est équivalent aux équations de Lagrange. La fonctionelle $S[\{q_i(t)\}]$ est extremale si les trajectoires $\{q_i(t)\}$ satisfont l'équation d'Euler. Il suffit de prendre $F = L$, $x = t$ et $y_i(x) = q_i(t)$ pour retrouver les équations de Lagrange.

[1] une fonctionnelle est une fonction de l'espace des fonctions dérivable dans $\mathbb{R}$

## 1.3 Théorème des extremumms liés

Pour miniser la fonction $F(x,y)$ sous la contrainte $f(x,y)=0$ il suffit de minimiser la fonction

$$H(x,y,\lambda)=F(x,y)+\lambda f(x,y)$$

avec $\lambda$ un multiplicateur de Lagrange, ce qui revient à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial H}{\partial x}=0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial F}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}=0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial F}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}=0 & \Leftrightarrow & f(x,y)=0 \end{array}\right.$$

## 1.4 Principe de moindre action et contraintes holonomes

**Proposition 3** Supposons un système à $3N$ degrés de libertés décrit par un Lagrangien $L$ et soumis à $k$ contraintes holonomes $f_j(\{x_i\},t)=0$ pour tout $j=1,\ldots,k$ est équivalent à un problème à $3N+k$ degrés de libertés décrit par le Lagrangien

$$\tilde{L}=L+\sum_j \lambda_j f_j$$

et les équations du mouvement sont données par :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i}=0 & i=1,\ldots,3N \\ f_j(\{q_i\},t)=0 & j=1,\ldots,k \end{array}\right.$$

**Remarque 3** Les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_j$ sont des fonctions du temps et non des constantes comme dans le problème des extremums liés.

**Remarque 4** Les contraintes sont données par :

$$\mathbf{R_i}=\lambda_\mathbf{i}\nabla\mathbf{f_i}$$

## 1.5 Contraintes Intégrales

Pour extrémaliser

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \qquad y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2)$$

sous la contrainte

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x=c$$

il suffit de résoudre le problème d'extremalisation de l'intégrale $G=F+\lambda f$ ($\Lambda\in\mathbb{R}$ qui vérifie la contrainte).

### 1.6 Théorème de Noëther

**Théorème 1 (de Noëther)** Pour chaque symétrie continue du Lagrangien il y a une quantité conservée. Supposons un système à $N$ degré de libertés associés aux coordonnées généralisées $q_i$. Le système est caractérisé par un Lagrangien $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ et supposons qu'il est invariant pour un changement de coordonnées $q_i \to q_i(s)$ qui ne dépends que d'un parametre $s$ , soit :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i(s), \dot{q}_i(s), t)$$

donc

$$\frac{d}{ds} L(q_i(s), \dot{q}_i(s), t) = 0$$

et le théorème de Noëther stipule que la quantité

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} = cst. \tag{3}$$

est constante.

## 2 Équations de Hamilton

### 2.1 Introduction

**Définition 12 (Hamiltonien)** Le *Hamiltonien* est défini par la transformation de Legendre du Lagrangien qui remplace les vitesses $\dot{q}_i$ par les impulsions généralisées $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, soit :

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{4}$$

**Définition 13 (Équations canoniques ou de Hamilton)** Les *équations canoniques* ou *équations de Hamilton* sont données par :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \tag{5}$$

**Remarque 5** Supposons que

1. l'énergie cinétique ne dépends pas du carré de la vitesse
2. le potentiel ne dépend pas de la vitesse

alors :

$$H = T + V$$

et le Hamiltonien est égal à l'énergie.

## 2.2 Crochets de Poisson

**Définition 14 (Crochet de Poisson)** Soit deux fonctions $f, g$ de $q_i$, $p_i$ et de $t$. Le *crochet de Poisson* est défini par :

$$\{f,g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{6}$$

**Proposition 4**

1. $\{f,g\} = -\{g,f\}$
2. $\{f,c\} = 0$ si $c$ est une constante
3. $\{f,q_i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$ et $\{f,p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}$
4. $\{p_i,p_j\} = \{q_i,q_j\} = 0$ et $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$
5. $\frac{\partial\{f,g\}}{\partial t} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$
6. $\{f_1+f_2,g\} = \{f_1,g\} + \{f_2,g\}$
7. $\{f_1f_2,g\} = f_1\{f_2,g\} + f_2\{f_1,g\}$
8. identité de Jacobi : $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{f,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

**Définition 15 (Intégrale première)** $f(q,p,t)$ est une *intégrale première*[2] si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f,H\} = 0$$

et si $f$ n'est qu'une fonction de $q$ et de $p$ alors $f(q,p)$ est une intégrale première si et seulement si

$$\{f,H\} = 0$$

**Théorème 2 (de Poisson)** Si $f$ et $g$ sont des intégrales premières alors $\{f,g\}$ l'est aussi.

**Remarque 6** Si $H$ ne dépends pas du temps, alors $H$ est une intégrale première.

## 2.3 Transformation canonique et fonction génératrice

**Définition 16 (Transformation canonique)** Une *transformation canonique* est un changement de variables $Q_i(q_i,p_i,t)$ $P_i(q_i,p_i,t)$ tel que les équations du mouvement sont encore des équations canoniques. Il s'agit donc de transformations telles qu'il existe une fonction $K(Q_i,P_i,t)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \\ \frac{dQ_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \end{aligned}$$

[2] c'est-à-dire $f(q,p,t)$ ne varie pas en fonction du temps

La fonction $K$ est l'équivalent de l'Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées. D'après le principe variationnel l'existence d'une fonction $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ vérifiant :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i, t) + \frac{dF}{dt}$$

est une condition suffisante sur $F$.

**Proposition 5 (Transformations canoniques principales)** Les quatres transformations canoniques principales sont :

1. $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t) = F_1(q_i, Q_i, t)$ et on pose :

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$
$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

   et $K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$

2. $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t) = F_2(q_i, P_i, t) - \sum_i Q_i P_i$ et on pose :

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$
$$Q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

   et $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$

3. $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t) = \sum_i q_i p_i - F_3(p_i, Q_i, t)$ et on pose :

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$
$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

   et $K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$

4. $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t) = \sum_i q_i p_i - \sum_i P_i Q_i + F_4(p_i, P_i, t)$ et on pose :

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$$
$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

   et $K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

## 2.4 Transformation canonique et structure symplectique

**Définition 17 (Matrice jacobienne de la transformation)** Posons :

$$\begin{aligned} x &= (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \\ y &= (Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) \end{aligned}$$

et définissons la matrice $M$ par :

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

et la matrice $M^{-1}$ est :

$$M^{-1}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

**Proposition 6** Les relations déduites de l'existence des fonctions $F_1$, $F_2$, $F_3$ et $F_4$ s'écrivent :

$${}^tMJM = J$$

avec :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

et $I_n$ la matrice identité de dimension $n$.

**Définition 18 (Matrice symplectique réelle)** Une matrice est dite *symplectique réelle* si elle satisfait la condition :

$${}^tMJM = J$$

**Proposition 7** Une transformation est canonique si et seulement si sa matrice jacobienne est symplectique.

**Théorème 3** L'ensemble des matrice symplectique $(2N \times 2N)$ forme un groupe appelé le groupe réel symplectique noté $S_{P_{2N}}(\mathbb{R})$.

**Proposition 8** Si $M$ est une matrice symplectique réelle alors $det(M) = 1$

**Proposition 9**

$${}^tMJM = J \Leftrightarrow MJ^tM = J$$

## 2.5 Transformation canonique et crochet de Poisson

**Théorème 4** Le crochet de Poisson est invariant par rapport à une transformation canonique.

**Remarque 7** Il est donc possible d'utiliser le crochet de Poisson pour vérfier si une transformation $Q(q, p, t)$, $P(q, p, t)$ est canonique :

$$\{Q_i(q, p, t), P_j(q, p, t)\} = \delta_{ij}$$

## 2.6 Équation de Hamilton-Jacobi

### 2.6.1 Cas général

**Définition 19** L'équation aux dérivées partielles

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

est *l'équation d'Hamilton-Jacobi.*

### 2.6.2 $H$ indépendant de $t$

Lorsque $H$ ne dépends pas explicitement du temps la solution peut toujours s'écrire sous la forme :

$$S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t) = W(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \alpha_{n+1} t$$

et donc l'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_{n+1}$$

### 2.6.3 Séparation des variables

**Définition 20 (Variable séparable)** Une variable est dite *séparable* si on peut chercher la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi de la forme

$$f(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) = f_1(q_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) + f'(q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$$

**Définition 21 (Système completement séparable)** Un système de $n$ coordonnées est dit *completement séparable* si toutes les coordonnées du problème sont séparables. L'équation de Hamilton-Jacobi donne ensuite $n$ équations du type :

$$H_i\left(q_j, \frac{\partial S_j}{\partial q_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t\right) + \frac{\partial S_j}{\partial t} = 0$$

# 3 Espace des phases

**Définition 22 (Espace de phase)** L'espace à $2N$ dimensions des impulsions en fonction de leurs coordonnées conjuguées est *l'espace de phase.*

**Proposition 10** Pour un système autonome ($H$ ne dépends pas de $t$) l'équation des trajectoires dans l'espace de phases est donnée par :

$$H(q, p) = E$$

**Définition 23 (Portrait de phase)** Une collection d'orbites d'un système est un *portrait de phase.*

**Définition 24 (Variables action-angle)** Pour un système à un degré de liberté effectuant un mouvement périodique, on appel *variables action-angle*, noté $(I, w)$, le couple de variables canoniques conjuguées variable action I, coordonnée, w tel que $I$ soit constante et $w$ augmente de $2\pi$ au cours d'une période, avec :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q} dq$$

avec $W(q, \alpha)$ solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. Pour une particule qui oscille entre $q_1$ et $q_2$ l'action est :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{q_1}^{q_2} \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q}\mathrm{d}q - \int_{q_2}^{q_1} \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q}\mathrm{d}q\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{q_1}^{q_2} \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q}\mathrm{d}q \end{aligned}$$

**Proposition 11** Lorsque le Hamiltonien est exprimé comme fonction de $I$ et $w$ et l'équation de Hamilton-Jacobi donne $H(I, w) = \beta$ alors la fréquence d'oscillation du système est donnée par :

$$\omega = \frac{\partial H(I,w)}{\partial I} = \frac{\partial \beta}{\partial I}$$

et dans le cas d'un système autonome $\beta = E$ :

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial I}$$

**Remarque 8** La méthode des variables action-angles est utile pour calculer la fréquence d'oscillation autour d'un point d'équilibre pour un système dont la solution complète n'est pas connue.

**Remarque 9** Pour une particule de masse $m$ soumise à un potentiel $V$ (V est un puit) la fréquence d'oscillation autour de la position d'équilibre $x_0$ est

$$\omega^2 = \frac{V''(x_0)}{m}$$

**Remarque 10** Pour un système autonome l'équation de Hamilton-Jacobi est de la forme :

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

et les points de rebroussements sont caractérisés par :

$$V_x = E$$

avec $V$ le potentiel et $E$ l'énergie du système.

**Proposition 12** Considérons un système autonome completement séparable et supposons le mouvement par raport à chaque paire $(q_i, p_i)$ périodique. La solution de l'équation de Hamilton-Jacobi est donc de la forme :

$$W(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_k W_k(q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

et on procède ensuite à un changement de variable dont la génératrice est de la forme :

$$F(q_1, \ldots, q_n, I_1, \ldots, I_n) = W(q_1, \ldots, q_n, \beta_1(I_1, \ldots, I_n), \ldots, \beta_n(I_1, \ldots, I_n))$$

avec les $I_k$ définis par :

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_k(q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_k} dq_k$$

et les fréquence d'oscillations de chaque coordonnée sont donnés par :

$$\omega_k = \frac{\partial \beta_k}{\partial I_k}$$

**Définition 25 (Système intégrable)** Un système à $n$ degrés de libertés est dit *intégrable* s'il existe $n$ intégrales premières indépendantes telles que :

$$\{I_i, I_j\} = 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

On dit alors que les intégrales sont en *involution*.

**Proposition 13** Considérons un volume $V$ de l'espace de phases défini par :

$$V = \int_\Omega \prod_i \mathrm{d}p_i \mathrm{d}q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

et avec une transformation passons des coordonnées $(q_i, p_i)$ à $(Q_i, P_i)$ et donc au volume $V'$ défini de manière analogue.
Alors

$$V = V'$$

**Théorème 5 (de Liouville)** Le volume de l'espace de phases est conservé au cours du temps.