Cours de Mécanique des Fluides

M. BOURICH (ENSAM)

Deuxième édition 2014

AVANT-PROPOS

Ce manuel de cours constitue, à l'attention des étudiants et des ingénieures, une introduction des concepts fondamentaux de la mécanique des fluides. Il est notamment destiné aux étudiants de la deuxième année de l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Marrakech. Cette seconde édition respecte le contenu du descriptif de la mécanique des fluides de la filière EGT accréditée.

L'objectif de ce cours et d'apporter tout les outils pour acquérir les connaissances et les savoirs indispensable pour une bonne la compréhension des concepts de la mécanique des fluides.

L'introduction des concepts fondamentaux est accompagnée par une brève évolution dans le temps, de la sorte que l'étudiant pourra relater les événements marquants de l'histoire de la mécanique des fluides.

Le cours es articulé en cinq chapitres :

- Etude phénoménologique des fluides.
- Cinématique des fluides.
- Bilans dynamique et thermodynamique
- Dynamique locale des fluides parfaits.
- Fluides visqueux incompressible

.

Mon souhait est que ce cours constituera un précieux outil pédagogique pour les étudiants, tant pour une préparation efficace des examens que pour l'acquisition d'une solide culture scientifique en mécanique des fluides.

M.Bourich

Illustration de couverture :

Turbulence de sillage : un avion porté par l'air laisse toujours derrière lui un sillage constitué de tourbillons, d'autant plus puissants que la masse de l'appareil est important.

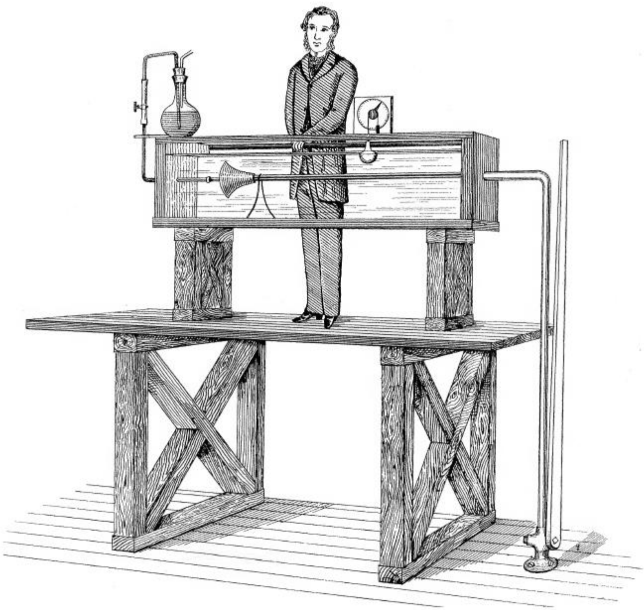
(Source : http://www. http://avionique.free.fr)

Les tourbillons de sillage sont dus au principe même de la portance qui n'existe que par la différence de pression entre l'intrados et l'extrados de l'aile. La pression étant plus importante à l'intrados, l'air tend à se déplacer vers l'extrados afin d'équilibrer les pressions. Ce courant d'air se traduit par une divergence des filets à l'intrados et une convergence des filets vers le fuselage à l'extrados. Il résulte, de ce phénomène, une traînée induite qui est d'autant plus faible que l'allongement de l'aile est important. Ces tourbillons sont dangereux pour un avion léger qui serait pris dans ce gros porteur. Le pilote prendra garde en tenant compte de la direction du vent et devra se tenir légèrement au dessus du plan de l'aile de l'avion qui le précède.

En novembre 2005, au moment des premiers vols d'essais de l'Airbus A380, l'OACI avait fixé des règles draconiennes de séparation entre le nouvel Airbus et les autres avions, en raison des risques de turbulences de sillage que pouvait engendrer sa taille exceptionnelle. Une campagne de test, consistant à faire mesurer par des capteurs au sol ou par un avion suiveur les effets réels de la turbulence de sillage a été menée par Airbus en collaboration avec les contrôleurs aériens français, pendant la période de certification de l'Airbus A380, au cours de plus de 180 heures de vols.

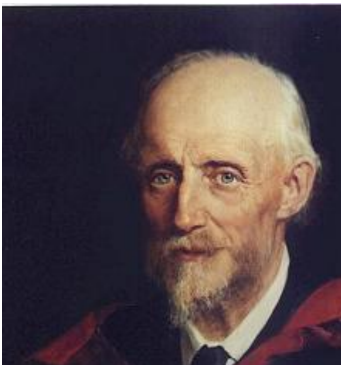
TABLE DES MATIERES

1 Chapitre



Expérience de Reynolds (1883)

Étude phénoménologique des fluides



Osborne Reynolds : (1842-1912)

Osborne Reynolds publie, en 1883, les résultats de ses fameuses expériences sur l'apparition de la turbulence dans les écoulements, déterminée par le célèbre nombre qui porte son nom. Une variante de cette expérience fondatrice est d'ailleurs encore aujourd'hui proposée aux jeunes étudiants en travaux pratiques.

Objectifs :

- Découvrir une première définition d'un milieu continu
- Comprendre la notion de pression et fluide incompressible,
- Comprendre la notion de viscosité.
- Différencier entre écoulement laminaire et écoulement turbulent.
- Assimiler la notion de couche limite.
- Introduire la notion de forces de Trainée et de Portance.

ÉTUDE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DES FLUIDES

I – Aperçus historique

L’étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l’époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l’origine de la statique des fluides. La mécanique des fluides c’est une branche de la mécanique des milieux continus qui étudie les mouvements des fluides (liquides et gaz) et des forces internes associées.

La mécanique des fluides au sens strict a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, l'étude de l'écoulement du sang (hémodynamique), la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie. Il existe également un grand nombre de domaines plus spécialisés qui peuvent s’écarter de la définition restrictive comme l’électro-fluidodynamique, la microfluidique ou l’étude des écoulements polyphasiques. Elle est actuellement étendue à des écoulements tels que ceux des glaciers ou du manteau terrestre.

II – Introduction

1- Milieux continus

Milieux continus : les propriétés varient suffisamment lentement avec la position du point matériel considère pour qu’on puisse adopter une modélisation continue, en général volumique.

Un milieu quelconque peut à priori être considère comme continu si le libre parcours moyen des molécules (distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs y est très petit devant les dimensions caractéristiques du système, il n’est a lors plus nécessaire de décrire les mouvements individuels des molécules du milieu, mais seulement les mouvements d’élément de volume finis on infinitésimaux.

2- le fluide milieu continu

a) Echelle macroscopique

A l'échelle macroscopique, le fluide est un milieu continu, la longueur L caractéristique d'observation de cette échelle est imposée par le problème étudié.

Exemples :

- Ecoulement d'un fluide des une conduite : diamètre de la conduite
- Ecoulement d'un fluide autour d'un obstacle : taille traversable de l'obstacle
- Ecoulement d'un océan : profondeur de l'océan.

b) échelle microscopique

A l'échelle microscopique, le fluide est essentiellement discontinu, il est composé de molécules en continuelle agitation thermique.

c) échelle mésoscopique

L'échelle mésoscopique est l'échelle intermédiaire entre le macroscopique, on le fluide est encoure un milieu continu.

A cette échelle, le fluide est découpé en cellules élémentaires (ou infinitésimales) appelées éléments de fluide, ou particule de fluide, (contenant un grand nombre de molécules), l'intérêt d'une description continue du fluide réside dans le fait que des grandeurs macroscopiques peuvent être associées à ces particules de fluide, qui ont une masse élémentaire constante lors de l'évolution du fluide.

Remarque :

Un très grand nombre de molécules (10^{10}) doivent constituer cette particule, afin d'avoir accès à des moyennes locales ayant un caractère macroscopique.

d) Classification des forces

Un certain volume (V), d'un certain milieu continu subit en général à tout instant deux types de forces :

- Forces de volume : forces de gravitation, électrostatiques, d'inertie etc…
- Forces superficielles : (efforts de contacts) ces forces sont exercées sur (V) au contact de la surface limitant (V) par d'autres éléments du fluide on des parois.

Un élément de surface de (V) noté, $d\vec{S} = ds\vec{n}$, orienté vers l'extérieur de (V), subit ainsi une force superficielle notée : $d\vec{F_s} = \vec{\tau}dS$.
Où $\vec{\tau}$ porte le non de contrainte $\vec{\tau} = [\tau]\vec{n}$. Avec $[\tau]$ est le tenseur des contraintes (matrice 3x3).

e) Définition

On appelle fluide un milieu continu dont la déformation persiste aussi longtemps que les contraintes tangentielle persistent : $\vec{\tau} \wedge \vec{n} \neq \vec{0} \Rightarrow$ le milieu n'est pas au repos. On en conclut d'ailleurs immédiatement que, dans un fluide au repos, les contraintes sont normales ($\vec{\tau} \parallel \vec{n}$).

Un fluide est un milieu matériel parfaitement déformable. On regroupe sous cette appellation les plasmas, les gaz, qui sont l'exemple des fluides compressibles, et les liquides, qui sont des fluides peu compressibles. Dans certaines conditions (températures et/ou pressions), le milieu n'est ni liquide, ni gazeux, il reste fluide

III – Forces de pression dans les fluides-Viscosité

1- Histoire de la notion de pression

Les philosophes et mathématiciens de la Grèce antique se posaient des questions sur les états de la matière, et notamment l'air qu'ils respiraient, le vent, etc. Ils sont à l'origine de la notion de particules élémentaires qui serait à l'origine de tout, les atomes (átomos, « indivisible »), prérequis à la notion de pression.

Les gaz commencent à être étudiés de manière systématique au xv^{iie} siècle. En particulier, Evangelista Torricelli invente en 1643 le baromètre et le vide pompé, Gilles Personne de Roberval étudiait en 1647 l'expansion des gaz, Blaise Pascal et Florin Périer travaillent sur la pression atmosphérique en 1648, et l'on établit les relations entre pression et volume, Robert Boyle en 1660, Edmé Mariotte en 1685. On a à cette époque une description empirique de la pression des gaz, et surtout une remise en question, fondamentale, de l'« horreur du vide ».

René Descartes émet en 1644 une hypothèse élémentaire : les gaz seraient composés de particules. Au xv^{iiie} siècle, Jakob Hermann (1716), Leonhard Euler (1729) et Daniel Bernoulli (1733) effectuent des calculs et montrent la relation entre vitesse des particules et pression. Ils établissent ainsi la théorie cinétique des gaz.

L'étude de la pression devient capitale au xixe siècle avec la Révolution industrielle : l'utilisation de la machine à vapeur impose de maîtriser cette notion.

2- fluides au repos

Dans un fluide au repos, les contraintes sont normales : $\vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau} = -p\vec{n}$. Où le signe (-) rend compte du caractère généralement compressif des efforts exercés en surface.

La grandeur p, qui se mesure en N m^2 (Pa) porte le nom de pression dans le fluide et on notera : $d\vec{F_s} = -p\vec{n}dS$. Dans le cas d'un fluide visqueux, la pression est définie par :

$$p = -\frac{1}{3}tr([\tau])$$

Où $tr([\tau]$ désigne la trace d'une matrice $[\tau]$. La trace d'un torseur est invariante par changement de référentiel galiléen, on en conclut donc que la pression est indépendante du référentiel galiléen choisi pour l'étude mécanique du fluide.

3- Origine de la pression

Les forces de pression exercées dans les fluides peuvent être considérées comme résultant de deux types principaux d'interactions :

- Chocs des molécules extérieures à un certain volume (V) sur les molécules de (V) au cours de leur mouvement désordonné : pression cinétique.
- Interactions a distance entre les molécules, tel que les interactions de Van der Waals entre atomes on molécules du gaz ($\approx \frac{1}{r^2}$), sont responsable d'un second terme dans la force totale de pression : pression moléculaire.

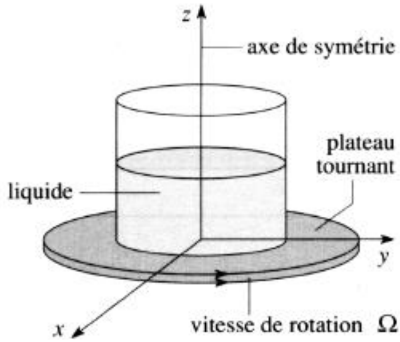
4- fluides visqueux

4-1 Histoire de la notion de viscosité

On utilise communément le qualificatif de visqueux pour décrire une chose qui n'est ni liquide ni solide. La viscosité est en fait une caractéristique de la matière, quel qu'en soit l'état physique : gazeux, liquide ou à la limite du solide, y compris, lorsqu'ils existent, les stades intermédiaires polyphasiques.

Vers 1713, Newton signale le rôle de la viscosité en hydrodynamique et en donne l'expression analytique fondée sur une hypothèse généralisée ensuite par Lamé : à température et à pression données, il y a proportionnalité de la tension visqueuse à la vitesse de déformation pure, suivant une même direction. Le facteur de proportionnalité est appelé coefficient de viscosité. Ce concept implique que, en présence de compressibilité, les variations isotropes de volume n'introduisent pas de glissement relatif. La précédente notion de comportement newtonien peut alors être étendue aux gaz. La plus grande partie des fluides dits simples obéissent à ce principe. Ils sont qualifiés de newtoniens.

4-2 Expérience



Système d'un fluide en rotation

Observations :

- A la périphérie la vitesse de vient rapidement proche de celle de la paroi, alors que dans la zone centrale le fluide ne se met en mouvement que très progressivement.
- Le mouvement se propage de la périphérie vers le centre.

Conclusion :

Existence de forces internes de viscosité (forces de cisaillement).

4-3 Viscosité et transfert de la quantité de mouvement

a) Champ de vitesse unidirectionnel

Pour un écoulement unidirectionnel, tel que $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$, la force de surface tangentielle $\vec{F}_{cis}$ appelée force de cisaillement, ou de viscosité, qui s'exerce à travers une surface d'air S normale à $\vec{e}_y$, est porté par $\vec{e}_x$.

$$\vec{F}_{cis} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} S\vec{e}_x \quad \text{(valable pour un écoulement plan)}$$

Le coefficient appelé viscosité du fluide peut, avec une bonne approximation, être considéré comme une constante caractéristique du fluide à une température donnée.

- Ordre de grandeur de η :

Fluide	$\eta(Pa.s)$
Air	1,7 10^{-5}
Eau	10^{-3}
Huile	1
graisse	10^{3}

Conclusion :

La force de viscosité tend à ralentir les veines rapides et à accélérer les veines lentes.

b) Généralisation : écoulement incompressible

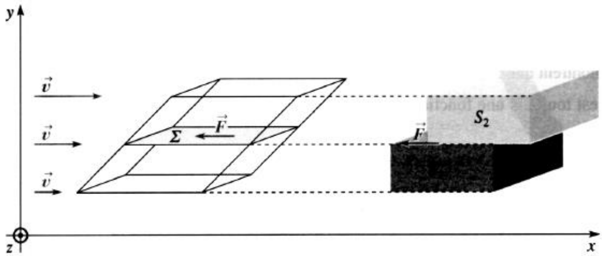
Considérons le parallélépipède élémentaire de volume $d\tau = Sdy$. Il est soumis à deux forces de cisaillement :

$$\vec{F}_1 = -\eta S \frac{\partial v}{\partial y})_{y=y_0}\vec{e}_x \text{ et } \vec{F}_2 = \eta S \frac{\partial v}{\partial y})_{y=y_{0+dy}}\vec{e}_x$$

Les forces de cisaillement sur les faces normales à $\vec{e}_x$ sont nulles (absence de glissement).

La résultante des forces de cisaillement est donc :

$$\vec{F}_{cis} = -\eta S[(\frac{\partial v}{\partial y})_{y=y_0} - \frac{\partial v}{\partial y})_{y=y_{0+dy}}]\vec{e}_x = \eta S \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy\, \vec{e}_x$$



Ce qui correspond à une densité de force volumique :

$$\vec{f}_{cis(volumique)} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y\, \vec{e}_x$$

Dans un fluide incompressible, les forces de cisaillement sont équivalentes à une force volumique dont l'expression :

$$\vec{f}_{cis(volumique)} = \eta \Delta \vec{v}$$

c) Diffusion de quantité de mouvement

Nous pouvons alors écrire, si ρ est une constante, la force de cisaillement sons la forme :

$$F_{cis} = -\frac{\eta}{\rho} S \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y}$$

Si nous posons $\vec{e}_y = \vec{n}$ (vecteur unitaire) normal à la surface $\sum d'air$ S), cette équation devient :

$$F_{cis} = -\frac{\eta}{\rho} \overrightarrow{grad}(\rho v_x) S\, \vec{n}$$

Le coefficient $\upsilon = \frac{\eta}{\rho}$, porte le non de viscosité (cinématique). Nous retrouvons une équation de cette forme des tous les phénomènes de diffusion (loi de Fick et loi de Fourier).

Conclusion :

La viscosité est un transport diffusif de la quantité de mouvement.

VI- Écoulements laminaire et turbulent-Nombre de Reynolds critique

1- Situation du problème

Tous les liquides ne s'écoulent pas de la même manière. Si vous observez l'eau d'un fleuve, vous pouvez voir que son écoulement est en permanence le siège de multiples tourbillons. Au contraire, l'huile qui s'écoule hors d'une bouteille ne tourbillonne pas du tout.

Étonnamment, la frontière entre ces deux situations est assez mince, et on peut la percevoir au moyen d'une quantité appelée nombre de Reynolds. Comme nous allons le voir, la compréhension de la transition entre les deux comportements fait encore l'objet de plusieurs recherches pointues.

2- Nombre de Reynolds

Dans un fluide en écoulement visqueux, la quantité de mouvement du fluide peut être transportée simultanément par diffusion et par convection. Le rapport entre ces deux mécanismes de transport de la quantité de mouvement est défini par le nombre sans dimension R_e appelé nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{LV}{\upsilon} = \frac{V^2/L}{\upsilon V/L^2} = \frac{terme\ convectif}{terme\ diffusif}$$

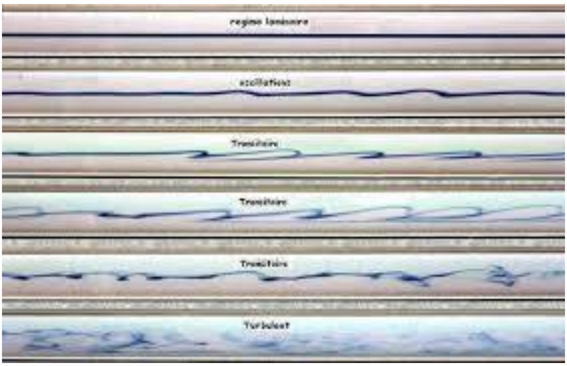
3-Ecoulements laminaire et turbulent

3-1 Ecoulement laminaire

Pour les faibles vitesses d'écoulement, le champ des vitesses du fluide varie de façon régulière dans l'espace et dans le temps, les diverses couches (ou lames) de fluide glissent les unes sur les autres : c'est l'écoulement laminaire, où les effets diffusifs de viscosité sont prépondérants et éliminent les effets de turbulence.

3-2 Ecoulement turbulent

Pour les grandes vitesses d'écoulement, le champ des vitesses varie de façon irrégulière, les lignes de courant s'entremêlent et il se forme des turbulents : c'est l'écoulement turbulent instable, où les effets convectifs sont prépondérants.



3-3 Nombre de Reynolds critique

Le passage du régime laminaire au régime turbulent s'effectue à une vitesse critique qui correspond au nombre de Reynolds critique R_{ec} qui dépend de la géométrie et de l'état de lissage des conduits, En pratique, un écoulement pour lequel $R_e < R_{ec} = 2000$ est laminaire.

4- Trainée d'une sphère en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide

4-1 Coefficients de trainée et de portance

Lorsqu'un corps solide est en mouvement dans un fluide, le fluide exerce sur ce corps une force résultante que l'on peut décomposer en :

- Une force de trainée $\vec{T}$ parallèle à la vitesse relative du fluide, et de module :

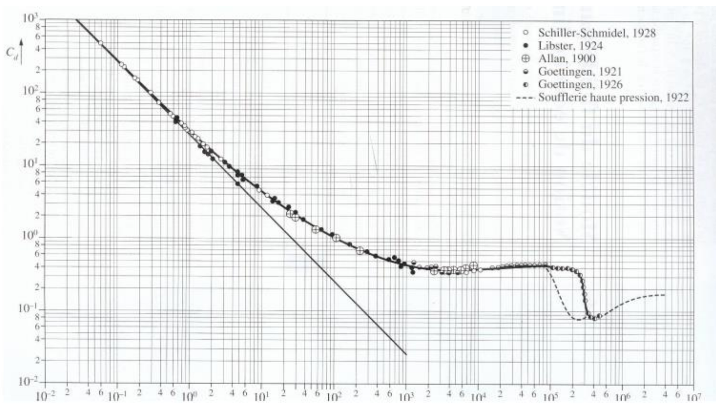
$$T = {}^{1}\!/_{2}\, C_T \rho S V_\infty^2$$

- Et une force de portance $\vec{P}$ perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}$ du fluide, et de module :

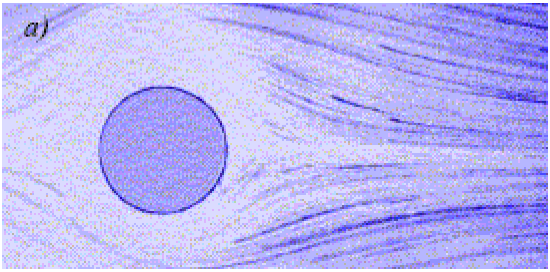
$$P = {}^{1}\!/_{2}\, C_P \rho S V^2$$

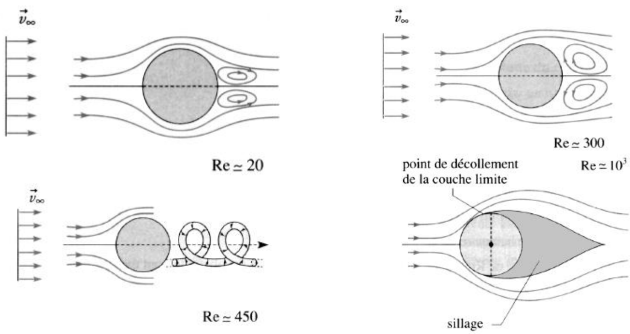
Où S est en général l'air du solide, projetés sur un plan perpendiculaire à $\vec{V}$ et C_T et C_P sont les coefficients de trainée et de portance respectivement.

L'évolution du coefficient de trainée $C_T(R_e)$ caractérise l'écoulement. Nous pouvons observer expérimentalement les écoulements suivants :



- Pour $R_e < 1$, l'écoulement est laminaire et approximativement linéaire. C_T est inversement propositionnel à R_e.
- Pour $R_e > 1$, il apparait un tourbillon stable derrière la sphère. Les dimensions de ce tourbillon augmentent avec R_e.
- Pour $300 < R_e < 450$, ce tourbillon finit par occuper toute la partie arrière de la sphère.
- Pour $R_e > 450$, le tourbillon se détache, en prenant une forme hélicoïdale.
- Pour $R_e \approx 1000$, l'écoulement n'est plus régulier, il se forme un sillage, zone turbulente et chaotique derrière la sphère.





4-2 Trainée d'une sphère de rayon r

Dans le cas d'une sphère, le nombre de Reynolds de l'écoulement est $R_e = \frac{LV_\infty}{\nu}$ avec $L = D = 2r$.

Pour les faibles vitesses V ($R_e \approx 1$), C_T varie avec R_e suivant la loi expérimentale : $C_T = \frac{24}{R_e} = \frac{12\nu}{rV_\infty}$ et donc la trainée est donnée par : trainée est donne par : $T = {}^1/_2\, C_T \rho S V_\infty^2 = \frac{12\nu\rho\pi r^2 V_\infty^2}{2rV_\infty} = 6\pi\eta r V_\infty$ ***(loi de stokes)***

V- Ecoulement parfait : couche limite

1- Introduction

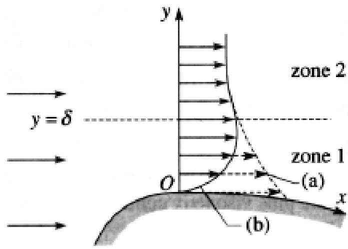
La définition de la couche limite réside dans le fait qu'elle représente la région de l'écoulement où les effets visqueux sont au moins aussi importants que les effets inertiels (en termes d'ordre de grandeur). Ce n'est en effet pas le cas loin de la paroi, où l'écoulement est alors dit d'Euler, et où les effets visqueux ne se font pratiquement pas ressentir. Un fluide parfait est par définition non conducteur et a ses coefficients de Lamé nuls (c'est-à-dire pas de viscosité).

2- Ecoulement parfait

Un fluide est dit en écoulement parfait si on néglige tous les phénomènes diffusifs est notamment sa viscosité, donc si on néglige les frottements entre les couches voisines de fluide en mouvement, un écoulement parfait ne dissipe donc pas de chaleur (adiabatique et réversible).
Remarque : $\eta \approx 0 \Rightarrow R_e \longrightarrow \infty$ (infini).

3- Couche limite

Au voisinage d'un obstacle, les profils de vitesse sont très différents si l'on considère le modèle du fluide parfait ou le fluide visqueux, donc réel.



Au contact du solide, alors que la vitesse est non nulle avec le modèle du fluide parfait, elle est nulle pour le fluide réel.

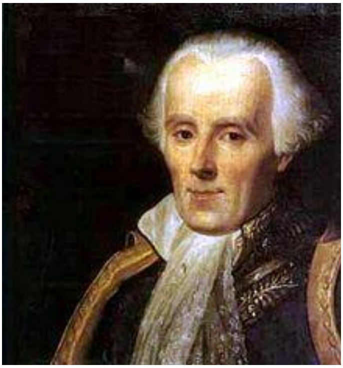
Zone 1 : dans la couche limite, nous pouvons écrire : $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$, la vitesse varie rapidement suivant y, mais peu suivant x. Les forces de viscosité, donc les transferts de quantité de mouvement par diffusion sont prédominants.

Zone 2 : Dans cette zone , nous pouvons écrire $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$ **:** la vitesse varie très peu en fonction des grandeurs d'espace.

Lorsqu'un fluide de faible viscosité (eau, air…) est en mouvement prés d'un solide, il se forme prés de ce dernier une couche appelée couche limite dans laquelle les effets de viscosité se font sentir. En de hors de cette couche, on peut négliger les forces dues à la viscosité c'est – à- dire que l'on peut considérer le fluide comme parfait. On convient dans la pratique de prendre pour frontière de la couche limite, la courbe suivant laquelle la vitesse du fluide est de 99% de la vitesse de l'écoulement extérieur : $\frac{U}{U_\infty} = 0.99$.

2 Chapitre

Cinématique des fluides



Pierre-Simon Laplace: (1749-1827)

Un fluide rare, transparent, compressible et élastique, qui environne un corps, en s'appuyant sur lui, est ce que l'on nomme son atmosphère.

Si nous attribuons les phénomènes inexpliqués au hasard, ce n'est que par des lacunes de notre connaissance

Objectifs :

- Introduire les notions de variable de Lagrange et de variable d'Euler.
- Définir et comprendre les notions de : Lignes de courant, lignes d'émission, débit massique et volumique.
- Différencier entre régime permanent et non permanent.
- Comprendre et savoir appliquer l'équation de conservation de la masse.
- Assimiler la notion de dérivée particulaire.
- Introduire les notions d'écoulement irrotationnel et potentiel des vitesses.

CINÉMATIQUE DES FLUIDES

I-Variable de Lagrange et variable d'Euler

1-Variable de Lagrange

On considère le mouvement de la partiale fluide qui à l'instante t_0 se trouvait en A de cordonnes (a_1, a_2, a_3) et à $t > t_0$ cette particule se trouve en B de coordonnées (x_1, x_2, x_3) le mouvement de la particule fluide est défini par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(a_1, a_2, a_3, t, t_0) \\ x_2 = f_2(a_1, a_2, a_3, t, t_0) \\ x_3 = f_3(a_1, a_2, a_3, t, t_0) \end{cases}$$

Les variable de Lagrange sont le temps t et les cordonnées (a_1, a_2, a_3) et les fonctions à déterminer sont : x_1, x_2, x_3.

2- Variable d'Euler

Les variables d'Euler sont le temps t et les coordonnées x_i de la particule fluide à l' instant t, les fonctions à déterminer sont les vitesses U_i :

$$\begin{cases} U_1 = g_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ U_2 = g_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_3 = g_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{cases}$$

La description d'Euler consiste à donner a un instant t défini, un champ de vecteur $U(M, t)$ représentant le vecteur vitesse des particules d'un domaine fluide appelé champs d'écoulement.

Résumé :

Alors que des la description de Lagrange on suppose accompagnant chaque particule des son mouvement, un observateur capable d'indiquer à tout instant la position d'un élément fluide au quel il est lié, dans la description d'Euler, on dispose en chaque point de l'écoulement d'un observateur capable de repérer à tout instant la grandeur et la direction de la vitesse des particules passant en ce point.

La description lagrangienne n'est pratiquement jamais utilisée en mécanique des fluides, car elle exige la connaissance de la trajectoire de chaque particule du fluide et donc est peu pratique.

II- Lignes de courant-Mouvement non permanent – Mouvement permanent- lignes d'émission – débits

1- Lignes de courant

Plaçons à un instant donné t, une courbe qui en chaque un de ces points, est tangente au vecteur vitesse correspondant est dite ligne de courant.

Si dx, dy et dz désigne les composantes d'un élément pris sur une telle ligne on dit avoir :

$$\overrightarrow{dl} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} U_1(x,y,z,t) \\ U_2(x,y,z,t) \\ U_3(x,y,z,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\frac{dx}{U_1(x,y,z,t)} = \frac{dy}{U_2(x,y,z,t)} = \frac{dz}{U_3(x,y,z,t)}$$

2- Mouvement non permanent

Pour un Mouvement non permanent, toutes les grandeurs scalaires ou vectorielles varient en fonction du temps et du point. Dans ce cas là les lignes de courant sont différents des trajectoires.

3- Mouvement permanent

- Les grandeurs scalaires ou vectorielles ne dépendant que de x,y,z.

- Les lignes de courant vont restées les mêmes lorsque le temps varie.
- Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

Remarque :

Insistant sur le fait que la constante en un point de $\vec{v}$ lorsque le temps varie n'entraine pas pour autant la constante dans le temps de la particule fluide, celle-ci-peut être donnée d'accélération même si l'écoulement est permanent.

Exemple :

On considère une conduite ou la vitesse des particules de fluide est 30m/s. L'air aspiré de l'atmosphère traverse le convergent avant de s'engager dans la conduite, une particule fluide voit donc sa vitesse passe continuellement de 0 à 30m/s bien que le régime soit permanent au sens on nous l'entendons, la vitesse reste en effet constante en un point quelconque du système: atmosphère ($V = 0\, m/s$) ; convergent ($0 < V < 30\, m/s$) et $S_1(V = 30\frac{m}{s})$.

Exercice :

On envisage l'écoulement bidimensionnel suivant tel que le vecteur vitesse d'une particule fluide soit :

$$\vec{V} = (A + \alpha t)\vec{x}_1 + B\vec{x}_2$$

Déterminer les lignes de courant à un instant t_0 et la trajectoire.

Réponse :

- Les lignes de courant sont données par l'équation :

$$\frac{dx}{U_1(x, y, z, t)} = \frac{dx_2}{U_2(x, y, z, t)}$$

qui à l'instant t_0 donne ici :

$$\frac{dx_1}{(A+\alpha t_0)} = \frac{dx_2}{B}$$

Une intégration directe donne l'équation suivante:

$$\frac{x_1}{(A+\alpha t_0)} = \frac{x_2}{B} + C$$

Il s'agit de l'équation d'une famille de droites. Les lignes de courant sont donc, à l'instant t_o, des droites.

- Trajectoire :

$$\begin{cases} dx_1 = U_1 dt = (A+\alpha t)dt \\ dx_2 = U_2 dt = Bdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = At + {}^{\alpha}/_{2}\, t^2 + x_{10} \\ x_2 = Bt + x_{20} \end{cases}$$

En éliminant le temps entre x_1 et x_2, on trouve :

$$x_1 = A\frac{x_2 - x_{20}}{B} + \frac{\alpha}{2B^2}(x_2 - x_{20})^2 + x_{10}$$

Les trajectoires sont ainsi des paraboles.

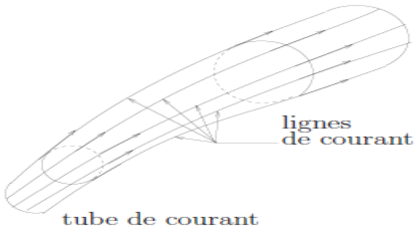
4- Lignes d'émission

Une ligne d'émission relative à un point M, est l'ensemble des positions à l'instant t des particules qui sont passées par le pt M .

5- Débit à la traversée d'un tube de courant

5-1 Tube de courant

On désigne par tube de courant le volume limité par l'ensemble des lignes de courant qui partent des différents points d'une courbe fermé.



En écoulement permanent tout ce passe comme ci le fluide s'écoulait dans le tube de courant comme dans des tubes limités par des parois solides, en conséquence toute particule qui se trouve à un instant t donne dans un tube de courant y demeure.

5-2 Débits massique et volumique

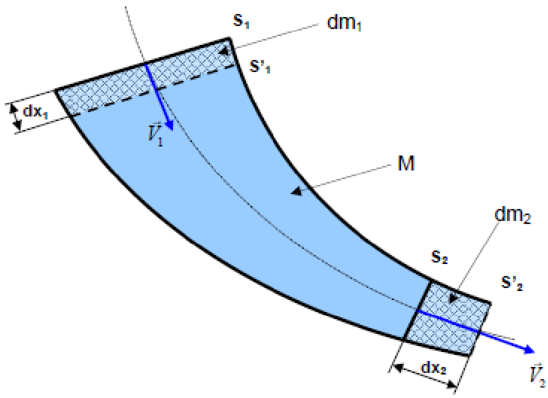
Considérons une section S d'un tube de courant on a:

- débit massique : $q_m(S) = \iint \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\,\vec{n}\,ds$ (kg /s)
- débit volumique : $q_v(S) = \iint \vec{V}(M,t)\,\vec{n}\,ds$ (m^3/s)

Exemple :

En région permanent, l'écoulement se fait en tube de courant, calculons le flux de mass à travers (S) :

$$I = \iint \rho(\vec{V}\,.\vec{n})ds \quad \text{avec} \quad S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$



Par analogie avec l'intensité électrique ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$) nous définissant le vecteur :

$\vec{J}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}(M,t)$ qu'on l'appelle densité volumique de courant de masse. Et par suit :

$$q_m(S) = \iint \vec{J}\,\vec{n}\,ds$$

III-Dérivation particulaire

L'utilisation des variables d'Euler pose un problème de dérivation. En effet considérons une grandeur h (pression, masse volumique, température, vitesse…) que l'on suppose attachée à un point matériel M et dont on veut étudier la variation par rapport au temps. Si on décrit $h(x_1, x_2, x_3, t)$ en variables d'Euler, il ne suffit plus de faire une dérivée partielle par rapport à t puisque les x_i dépendent de t, on introduit alors la dérivée particulaire qui tient compte de la variation temporelle des x_i :

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}$$

Ce qui donne :

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \overrightarrow{grad}h.\vec{U} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}.\overrightarrow{grad}\right]h$$

Cette dérivée particulaire se décompose en :

$\frac{\partial}{\partial t}$: La dérivée locale qui indique un caractère non permanent de h.

$\vec{v}.\overrightarrow{grad}$: la dérivée convective qui indique un caractère non informe de h.

Nous pourrons ainsi écrire la dérivation de la masse volumique :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\rho.\vec{v}$$

Dans le cas d'une grandeur vectorielle $\vec{g}$, la dérivée particulaire est donnée par :

$$\frac{D\vec{g}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\overrightarrow{grad}\right)\vec{g}$$

Application : accélération d'une particule

Appliquons la formule de dérivation particulaire d'une grandeur vectorielle a la vitesse d'une particule de fluide, nous obtenus :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$$

L'accélération se décompose en :

- $\frac{\partial}{\partial t}$: La dérivée locale qui indique un caractère non permanent de la vitesse.
- $\vec{v}.\overrightarrow{grad}$: la dérivée convective qui indique un caractère non informe de la vitesse.

IV- Bilan de masse : équation intégrale et local de conservation

1- Introduction

Dans diverses disciplines de la physique, lorsqu'une quantité est supposée conservée malgré son déplacement, on peut établir une équation reliant la variation de cette quantité dans le temps à sa variation dans l'espace, appelée équation de conservation de la grandeur.

2- Équation intégrale de conservation

Considérons un volume de contrôle (V) fixe de l'espace occupé par le fluide délimité par une surface fermée S fixe (surface de contrôle).

Pour un volume élémentaire $d\tau$, contenant la masse $dm = \rho(M,t)d\tau$, la variation $\delta(dm)$ pendant δt est telle que :

$$\delta(dm) = \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} d\tau\delta t.$$

La masse totale m (t) du fluide situé dans le volume (V) a donc varié pendant le temps δt de :

$$\delta(m) = \iiint \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} d\tau\delta t$$

La masse de fluide qui traversé la surface de contrôle (S) de l'extérieur vers l'intérieur pendant le temps δt , Càd :

$$\delta(m) = -q_{m,sortant}\delta t = -[\oiint \rho(p,t)\vec{v}\,(p,t)\vec{N}ds]\delta t$$

ce qui nous donne une équation intégrale de conservation de la masse :

$$\iiint \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} d\tau + \oiint \rho(p,t)\vec{v}\,(p,t)\overrightarrow{dS} = 0$$

3- Equation locale de conservation

On a :

$$\iiint \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau + \oiint \rho(M,t)\vec{v}\,(M,t)ds\,\vec{N} = 0$$

En appliquant le théorème d'OSTROGRADSKI , on obtient :

$$\iiint [\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + div(\rho(M,t)\vec{v}\,(M,t)]d\tau = 0$$

Cette égalité est vérifiée ∀ le volume (V). Nous en déduisons une relation locale, càd vérifiée en tout point M du fluide :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + div\big(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\big) = 0$$

Remarque :

On a $div\big(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\big) = \rho div\vec{v} + \overrightarrow{grad}\rho.\vec{v}$

L'équation locale de conservation de la masse s'écrira alors :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \rho div\vec{v} + \overrightarrow{grad}\rho.\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{v} = 0$$

4- Cas du régime stationnaire: conservation du débit massique

En régime stationnaire : $\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0$ donc $div\big(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\big) = 0$

Calculons le débit massique à travers $\sum = S_1 + S_2 + S_l$

$$q_m(S) = \oiint_{\Sigma} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds$$

$$= \oiint_{S_1} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds$$

$$+ \oiint_{S_2} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds + \overbrace{\oiint_{S_l} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds}^{=0\ (\vec{V}(M,t)\perp\vec{N}_l}$$

donc on obtient :

$$q_m(S) = \oiint_{\Sigma} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds$$

$$= \oiint_{S_1} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds + \oiint_{S_2} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds$$

d'autre part on a:

$$q_m(S) = \oiint_{\Sigma} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}\,ds = \iiint_V div\big(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\big) = 0$$

D'où :

$$\oiint_{S_1} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}_1 ds + \oiint_{S_2} \rho(M,t).\vec{V}(M,t)\vec{n}_2 ds$$

Conclusion :

Lors d'un écoulement stationnaire, le débit massique $q_m(S)$ se conserve.

5- Cas d'un fluide incompressible: conservation du débit volumique

Pour un fluide incompressible : $\frac{D\rho(M,t)}{Dt} = 0$ donc $div(\vec{v}) = 0$

Le débit volumique a travers à travers $\sum = S_1 + S_2 + S_l$

$$q_V = \oiint_{S_1} \vec{V}(M,t)\overrightarrow{n}_1 ds + \oiint_{S_2} \vec{V}(M,t)\overrightarrow{n}_2 ds = \iiint_V div\big(\vec{v}(M,t)\big)d\tau = 0$$

On alors :

$$\oiint_{S_1} \vec{V}(M,t)\overrightarrow{n}_1 ds = \oiint_{S_2} \vec{V}(M,t)\overrightarrow{n}_2 ds$$

Conclusion :

Pour un écoulement de fluide incompressible, le débit volumique q_V se conserve

V- Écoulement irrotationnel – Potentiel des vitesses

1- Ecoulement irrotationnel (non tourbillonnaires)

Un écoulement est dit irrotationnel si le champ des vitesses du fluide est à rotationnel nul :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$$

Si $\overrightarrow{rot}\vec{V} \neq \vec{0}$ en un point donné de l'espace, l'écoulement est dit tourbillonnaire.

2- Ecoulement potentiels

Pour un écoulement non tourbillonnaire, on a : $\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$

puisque on a $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\emptyset) = \vec{0}$, donc on associe un scalaire $\emptyset$ à $\vec{V}$ tel que :

$$\overrightarrow{grad}\emptyset = \vec{V}$$

$\emptyset$ est appelé potentiel des vitesses.

Conclusion :

Un écoulement non tourbillonnaire est dit potentiel, en tout plus de l'écoulement, le potentiel de vitesse $\emptyset$ est tel que :

$$\overrightarrow{grad}\emptyset = \vec{V}$$

Si l'écoulement est de plus incompressible, $div\big(\vec{v}(M,t)\big) = 0$, d'où $div\big(\overrightarrow{grad}\emptyset\big) = \Delta\emptyset = 0$: équation de Laplace.

3 Chapitre

BILANS DYNAMIQUE ET THERMODYNAMIQUE

Leonhard Euler: (1707-1783)

Quelques sublimes que soient les recherches sur les fluides dont nous sommes redevables à Mrs. Bernoullis, Clairaut, et d'Alembert, elles découlent si naturellement de mes deux formules générales qu'on ne saurait assez admirer cet accord de leurs profondes méditations avec la simplicité des principes d'où j'ai tiré mes deux équations, et auxquels j'ai été conduit immédiatement par les premiers axiomes de la Mécanique. »

Objectifs :

- Comprendre et appliquer le théorème de la résultante cinétique.
- Savoir appliquer le théorème du moment cinétique.
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.
- Etablir le bilan thermodynamique et dynamique d'un fluide en écoulement unidimensionnel.

BILANS DYNAMIQUE ET THERMODYNAMIQUE

I- Introduction

Le mouvement des fluides, est régi par des principes dits de conservation ou encore de bilan. Un bilan décrit les variations temporelles d'une grandeur au sein d'un système, que l'on considérera ouvert (au sens de la thermodynamique), c'est-à-dire que la grandeur peut rentrer ou sortir du système.

Tout un chacun sait écrire un bilan, tout au moins lorsque la grandeur fait partie de la vie courante. Prenons par exemple le cas où la grandeur est une quantité d'argent A et le système mon compte en banque. Pour connaitre la quantité d'argent instantanée sur mon compte, j'´ecris entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\overbrace{Mon\ compte\ en\ banque}^{\text{à}\ l'instant\ t_2} - \overbrace{Mon\ compte\ en\ banque}^{\text{à}\ l'instant\ t_1}$$
$$= \overbrace{Mes\ revenus\ (ce\ qui\ rentre)}^{entre\ t_1 et\ t_2}$$
$$- \overbrace{Mes\ dépenses\ (ce\ qui\ sort)}^{entre\ t_1 et\ t_2}$$

II- Théorème de la résultante cinétique

1- Loi de la résultante cinétique pour un système ouvert

Un système ouvert peut échanger de la matière avec l'extérieur. Soit un fluide en mouvement contenu a l'intérieur d'une surface de contrôle $\sum$ fixe, qui délimite un volume τ de fluide. On désigne par $\vec{p}(t)$ la quantite de mouvement de la matière contenu a l'intérieur de $\sum$ à l'instant t.

Bilan dynamique : dans un repère galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{D\vec{p}}{Dt}$$

On a : $\vec{p} = \iiint_\tau \vec{V}\, dm = \iiint_\tau \vec{V} \rho\, d\tau$, or

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \vec{V}\rho\, d\tau + \oiint_\Sigma \vec{V}\,(\rho\vec{V} dS)\vec{N}$$

Donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \oiint_\Sigma \vec{V}\,(\rho\vec{V} dS)\vec{N}$$

Remarque : la somme des forces $\sum \vec{F}_{ext}$ englobe les forces volumiques dans τ, a l'intérieur de $\sum$ et les forces de contact (surfaciques) au niveau de $\sum$.

2- Loi de la résultante cinétique pour un système fermé

Pour un système fermé, le débit des quantités de mouvement sortant de la surface de contrôle $\sum$, est nul :

$$\oiint_\Sigma \vec{V}\,\left(\rho\vec{V} dS\right)\vec{N} = 0$$

donc le bilan de la quantité de mouvement devient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \vec{V}\rho\, d\tau$$

3- Cas du régime permanent: théorème d'Euler

En régime permanent $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ donc la loi de la résultante cinétique pour un système fermé s'écrit :

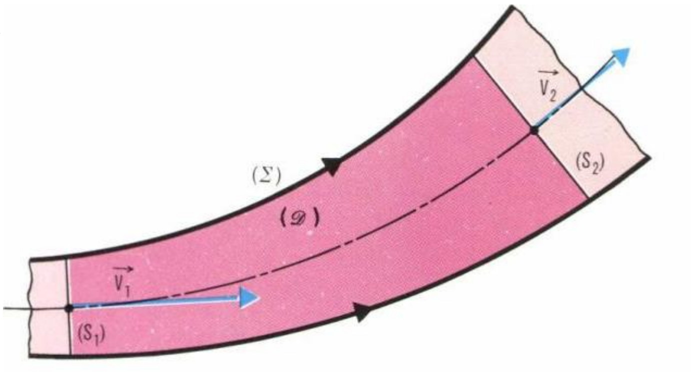
$$\sum \vec{F}_{ext} = \oiint_{\Sigma} \vec{V}\,(\rho \vec{V} dS)\vec{N}$$

d'où le théorème d'Euler: « En régime permanent, la somme des forces extérieures qui agissent sur un fluide contenu a l'intérieur d'une surface de contrôle $\sum$ est égale au débit total des quantités de mouvement sortant de $\sum$ ».

Si de plus l'écoulement est unidimensionnel, le théorème d'Euler prend une forme simple :

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Où $q_m = \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} dS$ est le débit massique (c'est en régime permanent). Les vitesses $\vec{V}_1$ et



III- Théorème du moment cinétique

1-Loi du moment cinétique pour un système ouvert

Si on désigne par $\vec{\sigma}_0(t) = \iiint_{\tau} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) dm$, le moment cinétique total en O de la matière contenue a l'intérieur de la surface de contrôle $\sum$ du système ouvert.

Bilan dynamique : dans un repère galiléen

$$\sum\vec{M}_{o_{ext}} = \frac{D\vec{\sigma}_0(t)}{Dt} = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M)\rho d\tau + \oiint_\Sigma \rho\vec{V}\,(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M))\overrightarrow{dS}$$

$$\Rightarrow \sum\vec{M}_{o_{ext}} = \frac{d\vec{\sigma}_0(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M)\rho d\tau + \overbrace{\oiint_\Sigma \rho\vec{V}\,(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M))\overrightarrow{dS}}^{\text{débit du moment cinétique en } O \text{ à travers la surface de contrôle } \Sigma}$$

2- Loi du moment cinétique pour un système formé

Pour un système fermé, le débit du moment cinétique à travers la surface de contrôle $\sum$est nul :

$$\oiint_\Sigma \rho\vec{V}\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M)\right)\overrightarrow{dS} = 0$$

donc le bilan de moment cinétique s'écrit :

$$\sum\vec{M}_{o_{ext}} = \frac{d\vec{\sigma}_0(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M)\rho d\tau$$

VI- Théorème de l'énergie cinétique

1- Puissance des forces appliquées à un système ouvert

Pour un système ouvert, l'énergie cinétique totale est :

$$E_c = \iiint_\tau \frac{1}{2}V^2 dm = \iiint_\tau \frac{\rho}{2}V^2 d\tau$$

Théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{DE_c}{Dt} = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \frac{\rho}{2}V^2 d\tau + \oiint_\Sigma \vec{V}.\overrightarrow{dS}(\rho/_2 V^2)$$

$$\underset{\tilde{\mathcal{P}}}{Puissance\ des\ forces\ appliquées} = \frac{dE_c}{dt} + \overbrace{\oiint_\Sigma \vec{V}.\overrightarrow{dS}(\rho/_2 V^2)}^{débit\ d'énergie\ cinétique\ sortant\ de\ \Sigma}$$

2- Puissance des forces appliquées à un système formé

Pour un système fermé, le débit d'énergie cinétique sortant de $\sum$ est nul :

$$\oiint_\Sigma \vec{V}.\overrightarrow{dS}\left(\rho/_2 V^2\right) = 0$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

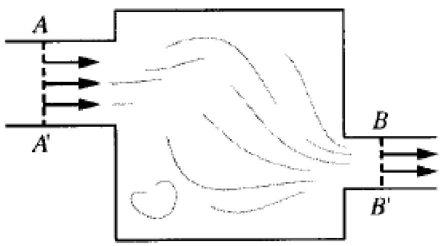
$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \frac{\rho}{2}V^2 d\tau$$

V- Bilan thermodynamique de fluides en écoulement unidimensionnel

1- Bilan énergétique d'un fluide en régime d'écoulement non permanent

Considérons le système

suivant :



Entre deux instants voisins t et t +dt, une masse dm_1 de fluide (de vitesse $\vec{V}_1$, de pression P_1 et d'altitude z_1) pénètre dans le volume de contrôle τ et une masse dm_2 de fluide (de vitesse $\vec{V}_2$, de pression P_2 et d'altitude z_2) sort du volume de contrôle τ.

Le bilan énergétique, qui traduit le premier principe de thermodynamique, permet d'obtenir la variation de l'énergie totale E du fluide du volume de contrôle τ :

$$dE = \delta W + \delta Q + dE_1 - dE_2$$

Avec : δW : Travail autre que des forces de pression.

δQ : Energie thermique reçue de la part du milieu extérieur.

dE_1 : Energie reçue de la part du fluide qui pénètre dans le volume de contrôle τ, son expression est donnée par :

$$dE_1 = \overbrace{U_1 dm_1}^{\text{énergie interne}} + \overbrace{{}^1/_2\, dm_1 V_1^2}^{\text{énergie cinétique}} + \overbrace{g z_1 dm_1}^{\text{énergie potentielle de pesanteur}} + \overbrace{p_1 V_1 dm_1}^{\text{travail des forces de pression}}$$

dE_2 : Energie perdue de la part du fluide qui sort du volume de contrôle τ, son expression est donnée par :

$$dE_2 = \overbrace{U_2 dm_2}^{\text{énergie interne}} + \overbrace{{}^1/_2\, dm_2 V_2^2}^{\text{énergie cinétique}} + \overbrace{g z_2 dm_2}^{\text{énergie potentielle de pesanteur}} + \overbrace{p_2 V_2 dm_2}^{\text{travail des forces de pression}}$$

donc le bilan énergétique s'écrit :

$$dE = \delta W + \delta Q + [\overbrace{U_1 dm_1}^{énergie\ interne} + \overbrace{{}^1\!/_2\, dm_1 V_1^2}^{énergie\ cinétique} + \overbrace{g z_1 dm_1}^{énergie\ potentielle\ de\ pesanteur} + \overbrace{p_1 V_1 dm_1}^{travail\ des\ forces\ de\ pression}] - [\overbrace{U_2 dm_2}^{énergie\ interne} + \overbrace{{}^1\!/_2\, dm_2 V_2^2}^{énergie\ cinétique} + \overbrace{g z_2 dm_2}^{énergie\ potentielle\ de\ pesanteur} + \overbrace{p_2 V_2 dm_2}^{travail\ des\ forces\ de\ pression}]$$

En introduisant l'enthalpie massique, l'expression de la variation de l'énergie totale E du fluide du volume de contrôle τ, s'écrit :

$$\Rightarrow dE = \delta W + \delta Q + dm_1[\overbrace{h_1}^{enthalpie\ massique} + \overbrace{{}^1\!/_2\, V_1^2}^{énergie\ cinétique} + \overbrace{g z_1}^{énergie\ potentielle\ de\ pesanteur}] - dm_2[\overbrace{h_2}^{enthalpie\ massique} + \overbrace{{}^1\!/_2\, V_2^2}^{énergie\ cinétique} + \overbrace{g z_2}^{énergie\ potentielle\ de\ pesanteur}]$$

2- Bilan énergétique en régime permanent

Pour un fluide incompressible non visqueux, en régime permanent on a conservation de débit massique :$q_m = \frac{dm}{dt} = 0$, donc $dm_1 = dm_2 = dm$. Le bilan énergétique s'écrite alors :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} + \frac{dm}{dt}\left[h_1 + {}^1\!/_2\, V_1^2 + g z_1\right] - \frac{dm}{dt}\left[h_2 + {}^1\!/_2\, V_2^2 + g z_2\right]$$

Soit :

$$\frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} = q_m\left(\left[h_1 + {}^1\!/_2\, V_1^2 + g z_1\right] - \left[h_2 + {}^1\!/_2\, V_2^2 + g z_2\right]\right)$$

Cas particulier :

Si l'écoulement permanent du fluide s'effectue sans échange de chaleur $(Q = 0)$ et sans recevoir d'énergie mécanique autre que les forces de pression (δQ) le bilan s'écrit :

$$\left[h_1 + {}^1\!/_2\, V_1^2 + g z_1\right] = \left[h_2 + {}^1\!/_2\, V_2^2 + g z_2\right]$$

Chapitre
4

DYNAMIQUE LOCALE DES FLUIDES PARFAITS

Daniel Bernoulli: (1700-1782)

Daniel Bernoulli expose en 1738 le théorème fondamental de la mécanique des fluides, qui exprime de façon simplifiée la conservation de l'énergie d'un fluide dans une conduite, dans l'ouvrage Hydrodynamica. Il interprète la pression comme provenant du choc des molécules gazeuses et montre le rôle fondamental de la conservation de l'énergie. Il fait le point sur les problèmes hydrauliques de son époque. Il établit un théorème qui exprime le bilan hydraulique simplifié d'un fluide dans une conduite. Il pose ainsi les bases de l'hydrodynamique et, d'une façon plus générale, de la mécanique des fluides, science qui est à la base du calcul de l'écoulement d'un liquide ou d'un gaz dans un espace confiné ou non.

Objectifs :

- Maitriser la notion de fluide parfait.
- Distinguer entre forces volumiques et massiques.
- Appliquer l'équation d'Euler pour le cas d'un fluide parfait.
- Etablir les formes des relations de Bernoulli.

DYNAMIQUE LOCALE DES FLUIDES PARFAITS

I- Introduction

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de la conductivité thermique. Avec en plus l'hypothèse, de validité très générale, de conservation de la masse, le mouvement du fluide est donc isentropique.
Mathématiquement cela revient à annuler les termes correspondants dans l'équation de Navier-Stokes on obtient ainsi l'équation d'Euler des fluides. Ce sont le produit des coefficients de viscosité et de conductivité thermique (et pas seulement ces coefficients) avec respectivement les cisaillements de vitesse et les gradients thermiques, qui doivent être négligeables.

Tous les fluides ayant une viscosité (sauf un superfluide, ce qui en pratique ne concerne guère que l'hélium à très basse température et l'intérieur d'une étoile à neutrons), le fluide parfait ne peut être qu'une approximation pour une viscosité tendant vers zéro. Cela revient à faire tendre le nombre de Reynolds vers l'infini. Ce type de situation est cependant très courant, par exemple en aérodynamique (où des nombres de Reynolds très grands sont en jeu). Dans ces conditions, les zones de cisaillement important (où la viscosité et la turbulence sont influentes) sont concentrées dans des espaces restreints, appelés couches limites, et la description globale de l'écoulement par un fluide parfait peut être adéquate.

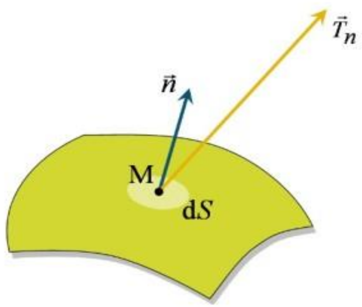
En cosmologie, les différentes formes de matière qui emplissent l'univers peuvent être considérées, du moins aux échelles où l'univers est homogène comme des fluides parfaits. Comme l'écoulement d'un fluide parfait est isentropique, l'expansion de l'Univers est parfois décrite comme étant adiabatique, s'identifiant sous certains aspects à la détente d'un gaz sans échange de chaleur avec l'extérieur.

II- Contrainte dans un fluide

1- Forces surfaciques

Délimitions à l'intérieur d'un fluide une surface fictive fermée $\sum$, que le fluide soit homogène on non, les particules de fluide extérieures à $\sum$ exercent des actions sur les particules intérieures.
Soit un élément de surface dS de $\sum$: $d\vec{F}_N + d\vec{F}_T$

- La composante normale $d\vec{F}_N = -p(M,t)\vec{N}dS$: force de pression.
- La composante tangentielle $d\vec{F}_T = \eta\left(\overrightarrow{grad}v.\vec{n}\right)dS\vec{T}$ avec $\vec{v} = v\vec{T}$.



Remarque :
Dans l'hypothèse du fluide parfait, nous négligeons les forces de viscosité, les forces surfaciques tangentielles sont nulles .

2- Forces volumiques–Forces massiques

Un élément de fluide de volume $d\tau$ est également soumis a des forces volumiques. Ces actions sont ressenties par toutes les particules du fluide, elles sont donc proportionnelles au volume élémentaire $d\tau$ considéré.

$d\vec{f} = \vec{f}_v d\tau$: Efforts volumiques

Nous introduisons une représentation massique de ces forces sous la forme :

$$d\vec{f} = \vec{f}_m dm = \rho \vec{f}_m d\tau$$

d'où l'équivalence : $\vec{f}_v = \rho \vec{f}_m$

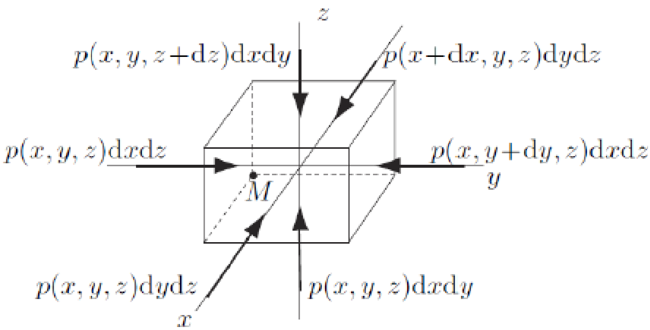
Exemple :

Cas du champ de pesanteur $\vec{g}$: $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$ et $\vec{f}_m = \vec{g}$

3- Equivalent volumiques-Equivalent massiques

3-1 Cas des forces de pression

Démontrons que les forces de pression possédaient un équivalent volumique. Calculons la résultante $d\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant sur le parallélépipède élémentaire de fluide de volume $d\tau = dxdydz$.



La composante de cette force sur la direction de l'axe (Ox) est :

$$dF_x = P(x - dx, y, z)dydz - P(x + dx, y, z)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

Considérons les forces élémentaire exercées sur le six faces, non voyons que :

$$d\vec{F} = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}dxdydz\vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\vec{e}_z = -\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}dm$$

donc, les équivalents volumique et massique des forces de pression d'origine surfacique, s'expriment sous la forme :

- d'équivalent volumique : $\vec{f_v} = -\overrightarrow{grad}P$
- d'équivalent massique : $\vec{f_m} = -\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}$

Remarque :

Cas d'un fluide barotrope, càd, sa masse volumique ne dépend que de la pression : $\rho = \rho(P)$.

Montrons que dans le cas d'un fluide barotrope, $\vec{f_m}$ est le gradient d'une fonction.

Posons $\chi(p) = \int_{p_0}^{p}\frac{du}{\rho(u)}$: Cette intégrale a bien une fonction de p dépendant du paramètre constant p_0. On a

$$\frac{d\chi(p)}{dp} = \frac{1}{\rho(p)}$$

d'après les règles de dérivation des fonctions composées :

$$\overrightarrow{grad}\chi(p) = \frac{d\chi(p)}{dp}.\overrightarrow{grad}p = \frac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)}$$

Nous avons montré que :

$$\vec{f_m} = -\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho} = -\overrightarrow{grad}\chi(p) = \overrightarrow{grad}[\int_{p_0}^{p}\frac{du}{\rho(u)}]$$

3-2 Cas des forces de viscosité

Les équivalents volumique et massique des forces de viscosité, d'origine surfacique, s'expriment sous la forme :

- d'équivalent volumique : $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$
- d'équivalent massique : $\vec{f}_m = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$

III- Équation d'Euler, Applications

Considérons un fluide parfait, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule de fluide de masse dm, dont nous suivons le mouvement, soumise à la résultante des forces extérieures $d\vec{F}$, s'écrit :

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}$$

On a:

$$d\vec{F} = \vec{f}_{V,totale} d\tau = \vec{f}_{m,totale} dm$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left({v^2}/{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{v} \wedge \vec{v} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left({v^2}/{2}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{f}_{m,totale} \end{aligned}$$

Avec $\vec{\Omega} = {1}/{2}\, \overrightarrow{rot}\vec{v}$: vecteur tourbillon

En distinguant les forces massiques et les équivalents massiques dus uniquement aux forces de pression, cette force $\vec{f}_{m,totale}$ se met sous la forme :

$$\vec{f}_{m,totale} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)}$$

Nous obtenons alors l'équation l'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)}$$

Les diverses expressions de l'équation d'Euler pour un fluide parfait :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \vec{f}_m - \dfrac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)} \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left({v^2}/{2}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{f}_m - \dfrac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)} \\ \rho\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \vec{f}_v - \overrightarrow{grad}p \end{cases}$$

Application :

Un liquide homogène, de masse volumique uniforme ρ, est surmonté d'une atmosphère à la pression uniforme P_0, et soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. L'écoulement du liquide (analogue a celui de la tornade) est stationnaire et à symétrique de révolution autour de l'axe (OZ). Son champ des vitesses, en coordonnées cylindriques, est de la forme :

- pour $r < a : \vec{v} r w \vec{e}_\theta$
- pour $r < a : \vec{v} r w \vec{e}_\theta$

L'origine de l'axe (OZ) étant choisie sur la surface libre du liquide (très loin de l'axe de révolution).

Déterminer le champ de pression $P(r, z)$ au sein du liquide et en déduire la forme de la surface libre.

Réponse :

L'équation d'Euler, en régime stationnaire, s'écrit ici :

$$\overbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}^{\vec{0}}+\overrightarrow{grad}\left({v^2}/{2}\right)+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}=-g\vec{e}_z-\frac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)}$$

deux cas doivent être distingués :

- $r < a$: on a

$$\vec{\Omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}=w\vec{e}_z$$

En projection sur $\vec{e}_r\ et\ \vec{e}_z$, l'équation d'Euler donne :

$$\text{selon } \vec{e}_r : \qquad \rho r w^2-2\rho r w^2=-\frac{\partial P(r,z)}{\partial r} \qquad (1)$$

$$\text{selon } \vec{e}_z : \qquad 0=-\rho g-\frac{\partial P(r,z)}{\partial z} \qquad (2)$$

En résolvant les équations (1) et (2), on obtient l'expression de $P(r,z)$:

$$P(r,z)={1}/{2}\,\rho w^2r^2-\rho gz+C_1$$

- $r > a$: on a

$$\vec{\Omega}=\vec{0}$$

la projection de l'équation d'Euler sur $\vec{e}_r\ et\ \vec{e}_z$, donne :

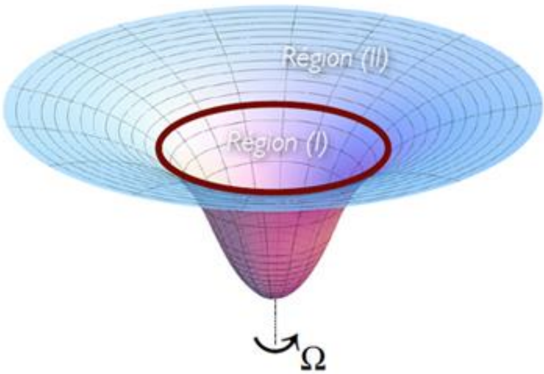
$$\text{selon } \vec{e}_r : \qquad -\frac{\rho a^4w^2}{r^3}=-\frac{\partial P(r,z)}{\partial r} \qquad (3)$$

$$\text{selon } \vec{e}_z : \qquad 0=-\rho g-\frac{\partial P(r,z)}{\partial z} \qquad (2)$$

En résolvant les équations (3) et (4), on obtient l'expression de $P(r,z)$:

$$P(r,z) = P_0 - \rho g z + {}^{1}/_{2}\,\rho w^2 (r^2 - 2a^2)$$

Dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ la trace de cette surface a la forme indiquée sur la figure suivante :



Forme de la surface libre du vortex de RANKINE

VI-Relations de Bernoulli

Prenons un élément de longueur $d\vec{l}$ quelconque en multipliant scalairement par $d\vec{l}$ les termes de l'équation d'Euler, nous obtenons .

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.d\vec{l} + \overrightarrow{grad}\left({v^2}/{2}\right).d\vec{l} + (2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}).d\vec{l} = (\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)}).d\vec{l} \qquad (*)$$

Hypothèses :

- Existence d'une énergie potentielle associée aux forces volumiques $\Rightarrow (\vec{f}_m = -\overrightarrow{grad}(e_{p_m})$

avec e_{p_m}est énergie potentielle massique associée aux forces autres les forces de pression

- Fluide homogène incompressible on écoulement barotrope :
  - ✓ Fluide homogène incompressible : $\frac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)} = \overrightarrow{grad}(\frac{p}{\rho})$
  - ✓ Ecoulement barotrope : $\frac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)} = \overrightarrow{grad}(\chi(p))$

Moyennant ces hypothèses, l'expression (*) s'écrit :

- Pour un fluide incompressible :
  $[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left({v^2}/_2 + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right) + \left(2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right)].\,d\vec{l} = 0$ (**)
- Pour un fluide barotrope :
  $[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left({v^2}/_2 + e_{p_m} + \chi(p)\right) + \left(2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right)].\,d\vec{l} = 0$ (**)

1- L'écoulement stationnaire

Si l'écoulement a stationnaire $\Rightarrow \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

L'intégration de l'éq (**) entre deux points quelconques A et B d'une ligne de courant donne :

- Pour un fluide incompressible :

$$[\left({v^2}/_2 + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right)]_A^B = 0,\ \ \forall t$$

- Pour un fluide barotrope :

$$[\left({v^2}/_2 + e_{p_m} + \chi(p)\right)]_A^B = 0,\ \ \forall t$$

Conclusion :

Il y a donne conservation de la quantité ${v^2}/_2 + e_{p_m} + \chi(p)$ le long d'une ligne de courant. Cette expression peut varier d'une ligne de courant à une autre.

2- Ecoulement irrotationnel

Pour un écoulement irrotationnel on a : $\vec{\Omega} = \vec{0}$ puisque

$$\overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{grad}(\varphi)$$

L'intégration de l'équation (**) entre deux points quelconques donne :

- pour un fluide incompressible :

$$\overbrace{\left(\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial t} + v^2/_2 + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right)}^{\text{à } une\ date\ t\ sur\ tout\ le\ fluide} = cte$$

- Pour fluide barotrope :

$$\overbrace{\left(\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial t} + v^2/_2 + e_{p_m} + \chi(p)\right)}^{\text{à } une\ date\ t\ sur\ tout\ le\ fluide} = cte$$

3- Écoulement irrotationnel et stationnaire

Si les deux dernières propriétés sont vérifiées simultanément, nous obtenons :

Pour un fluide incompressible :

$$\overbrace{\left(v^2/_2 + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right)}^{\forall t\ et\ sur\ tout\ le\ fluide} = cte$$

Pour une fluide barotrope :

$$\overbrace{\left(v^2/_2 + e_{p_m} + \chi(p)\right)}^{\forall t\ et\ sur\ tout\ le\ fluide} = cte$$

4- Différentes formes de d'équation de Bernoulli

Les différentes formes de l'équation de Bernoulli sont groupées dans le tableau suivant :

Différentes formes de l'équation de Bernoulli	Écoulement barotrope $\dfrac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)} = \overrightarrow{grad}(\chi(p))$	Écoulement homogène incompressible $\dfrac{\overrightarrow{grad}p}{\rho(p)} = \overrightarrow{grad}(\dfrac{p}{\rho})$
Ecoulement stationnaire : $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$	$\overbrace{\left({v^2}/{2} + e_{p_m} + \chi(p)\right) = cte}^{\forall t \text{ et sur tout le fluide}}$	$\overbrace{\left({v^2}/{2} + e_{p_m} + \dfrac{P}{\rho}\right) = cte}^{\forall t \text{ et sur tout le fluide}}$
Ecoulement irrotationnel : $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\varphi)$	$\overbrace{\left(\dfrac{\partial \varphi(M,t)}{\partial t} + {v^2}/{2} + e_{p_m} + \chi(p)\right) = cte}^{\text{à une date } t \text{ sur tout le fluide}}$	$\overbrace{\left(\dfrac{\partial \varphi(M,t)}{\partial t} + {v^2}/{2} + e_{p_m} + \dfrac{P}{\rho}\right) = cte}^{\text{à une date } t \text{ sur tout le fluide}}$
Ecoulement irrotationnel et stationnaire	$\overbrace{\left({v^2}/{2} + e_{p_m} + \chi(p)\right) = cte}^{\forall t \text{ et sur tout le fluide}}$	$\overbrace{\left({v^2}/{2} + e_{p_m} + \dfrac{P}{\rho}\right) = cte}^{\forall t \text{ et sur tout le fluide}}$

5- Interprétation physique des relations de Bernoulli

Dans le cas d'un écoulement stationnaire homogène incompressible, l'expression :

$$\left({v^2}/{2} + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right)$$

représente l'énergie mécanique massique associée à une particule de fluide :

$$\begin{cases} v^2/2 : \textit{énergie cinétique massique} \\ e_{p_m} : \textit{énergie potentielle massique des forces autres que celles de pression} \\ \frac{P}{\rho} : \textit{représente l'énergie massique associée aux forces de pression} \end{cases}$$

Conclusion :

L'équation de Bernoulli représente alors une forme locale du 1er principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement.

L'équation de Bernoulli s'écrit encore :

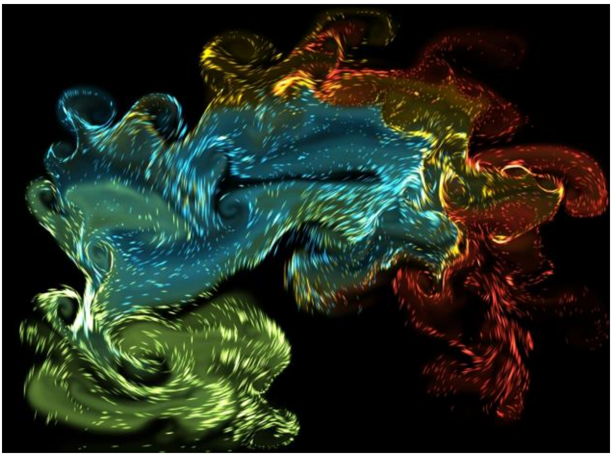
$$\overbrace{\rho\, v^2/2}^{\textit{pression dynamique}} + \overbrace{\rho e_{p_m} + P}^{\textit{pression totale (pression de stagnation)}} = cte$$

Exemple :

Un écoulement uniforme horizontal arrivant sur un obstacle :

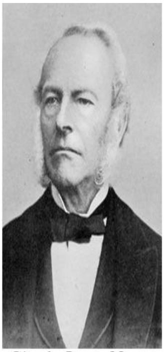
$$\overbrace{\rho\, v_\infty^2/2}^{\textit{pression dynamique}} + \overbrace{\rho e_{p_m} + P_\infty}^{\textit{pression totale (pression de stagnation)}} = \overbrace{\rho\, v_A^2/2}^{\textit{pression dynamique}} + \overbrace{\rho e_{p_m} + P_A}^{\textit{pression totale (pression de stagnation)}} = cte \Rightarrow P_A = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2}$$

5 Chapitre



FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLE

Sir George Gabriel Stokes



Claude-Louis Navier

Claude Luis Navier: (1785-1863)

George Gabriel Stokes: (1819-1903)

L'équation de Navier-Stokes est l'une des plus importantes de toute la physique. Si elle n'a pas la chance d'être aussi connue que E=mc^2, elle nous sert pourtant à prédire la météo, simuler les océans, optimiser les ailes des avions et même améliorer le réalisme des jeux vidéos. Bien qu'elle fut établie au XIX^{ème} siècle, elle continue de fasciner les ingénieurs, les physiciens et même les mathématiciens.

Objectifs :

- Maitriser la notion de fluide visqueux.
- Comprendre et établir les équations de Navier-Stokes.
- Introduire la notion d'écoulement viscométriques stationnaires.
- Etudier l'écoulement de Poiseuille.

FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLE

I- Introduction

Le fluide parfait étudié au chapitre précédent ne reflète pas toujours suffisamment bien la réalité. Les fluides ont tous une viscosité plus au moins élevée qu'il est nécessaire de prendre en compte notamment près des parois de solides ou dans laissés par ceux–ci.

II- Equation du mouvement

1- Equation de Navier-Stokes

Comme des le cas du fluide parfait incompressible, l'écriture de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement ne fait intervenir comme inconnues que les champs de vitesses et de pression au sein du fluide.

L'écriture de l'équation de continuité est inchangée et l'on a encore :

$$div(\vec{v}) = 0$$

L'écriture de l'équation de la quantité de mouvement sous forme locale devient quant –à- elle :

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \rho\vec{f}_v - \overrightarrow{grad}p + \mu\Delta\vec{v}$$

Ces relations constituent les équations de Navier-Stokes du fluide incompressible visqueux. On remarquera que ces équations s'identifient aux équations d'Euler des fluides parfait en faisant $\mu = 0$.

2- Conditions aux limites

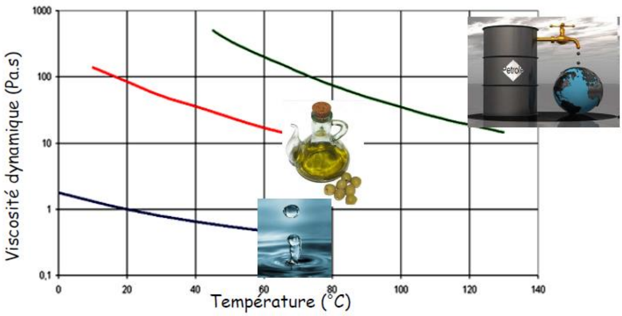
Au contact d'une paroi solide on a la condition d'adhérence suivante :

$$\vec{v} = \vec{v}_{paroi}$$

Cette condition est compatible avec l'expérience qui montre qu'une paroi imperméable freine ou accélère le fluide visqueux jusqu'à ce que celui-ci ait la même vitesse que la paroi.

3- Variation de la viscosité avec la température

La viscosité des liquides diminuent lorsque la température augmente. Pour les gaz, la viscosité provient des collisions entre les molécules et donc elle augmente quand la température augmente (à condition que le gaz soit à pression constante).



III – Écoulements viscométriques stationnaires

Nous allons résoudre les équations de Navier-stokes pour trois écoulements particuliers. Dans ces exemples, nous chercherons des solutions dites laminaires, càd en imposant a proprio les lignes de courant parallèles aux parois.

1- Écoulement entre deux plans parallèles

L'écoulement est plan ; parallèle à (O, x_1, x_2). Nous supposons que le vecteur vitesse est de la forme :

$$\vec{U} = U_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + U_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$$

Cet écoulement est limité par les deux plans d'équations respectives :

$$x_2 = 0 \text{ et } x_2 = h$$

Le plan $(x_2 = 0)$ a immobile et le plan $(x_2 = h\ )$ est animé d'une vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_1$.

La recherche des solutions laminaires impose : $U_2 = 0$ $(L.C \parallel$ à $parois)$

L'équation de quantité de mouvement impose :

$$div\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0 \text{ d'où } U_1(x_1, x_2) = U_1(\ x_2)$$

L'équation de quantité de mouvement donne alors:

$$\begin{cases} selon\ Ox_1 : \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = \mu \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \\ selon\ Ox_2 : \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = -\rho g \approx 0\ (poid\ négligeable) \Rightarrow P = P(x_1) \\ selon\ Ox_3 : \dfrac{\partial P}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

L'équation selon $Ox_1\ donne$:

$$\overbrace{\frac{\partial P}{\partial x_1}}^{fonction\ de\ x_1} = \overbrace{\mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}}^{fonction\ de\ x_2} = A = cte$$

- Profil de vitesse :

$$\frac{d^2U_1(x_2)}{dx_2^2} = \frac{A}{\mu} \Rightarrow \frac{dU_1(x_2)}{dx_2} = \frac{A}{\mu}x_2 + C_1 \Rightarrow U_1(x_2) = \frac{A}{2\mu}x_2^2 + C_1x_2 + C_2$$

Les conditions d'adhérence :

$$\begin{cases} U_1(x_2 = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ U_1(x_2 = h) = V \Rightarrow C_1 = \frac{V}{h} - h\frac{A}{2\mu} \end{cases}$$

et par suite on a :

$$U_1(x_2) = \frac{A}{2\mu}x_2(x_2 - h) + \frac{V}{h}x_2$$

- Pression :

$$\frac{dP(x_1)}{dx_1} = A \Rightarrow P(x_1) = Ax_1 + P(0)$$

avec : $\frac{dP(x_1)}{dx_1} = A$: est la chute linéique de pression.

Les moteurs du mouvement du fluide est:

- La chute linéique de pression.
- Vitesse du plan supérieur.

2- Ecoulement de Poiseuille

Soit un écoulement au sein d'un tube cylindrique de rayon R et de longueur L dans le repère précisé sur la figure ci- après. On cherche encore des solutions laminaires :

$$\vec{U} = U_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3$$

On cherche les champs : $\begin{cases} \vec{U} \\ P \end{cases}$

L'équation de continuité impose : $\frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow U_3 = U_3(x_1, x_2)$

L'équation de quantité de mouvement donne alors :

$$\begin{cases} selon\ Ox_1 : \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = 0\ (poid\ négligeable) \\ selon\ Ox_2 : \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \\ selon\ Ox_3 : \dfrac{\partial P}{\partial x_3} = \mu \Delta \vec{U}_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

- R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. Transport phenomena. John Wiley and sons, 1960.
- F. M. White. Fluid Mechanics. Mc Graw-Hill, 1994.
- J.M. Brébec, Mécanique des fluides, Hprépa, Hachette, 1998.
- O. Louisnard, Cours de mécanique des fluides, Ecole des Mines d'Albi, France, 2012.
- S. Poncet, Cours de mécanique des fluides, IUT Génie thermique et énergie, Marseil, 2013.

Sites WEB

- http://www.msc.univ-paris-diderot.fr/
- http://man21.free.fr/wp/index.php/mecanique des fluides
- http://alain.lerille.free.fr/Pedagogique/Chap03.html
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre Simon de Laplace
- http://www.slideserve.com/roden/le monde de fluide
- https://sciencetonnante.wordpress.com/la-mysterieuse-equation-de-navier-stokes
- ttps://fr.wikipedia.org/wiki/Fluide
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Pression
- http://www.universalis.fr/encyclopedie/viscosite
- https://sciencetonnante.wordpress.com/le nombre de Reynolds
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Couche limite
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Fluide parfait

Mécanique des Fluides

M. BOURICH

Ce manuel de cours est un support de Mécanique des Fluides enseigné en première année de l'École Nationale des Sciences Appliquées-Marrakech. Il constitue une introduction des concepts fondamentaux de la Mécanique des Fluides.

L'ensemble de notions abordées dans ce cours polycopié devrait permettre au futur ingénieur de disposer des concepts de base pour comprendre plusieurs problèmes concrets de la Mécanique des Fluides et pour approfondir ses connaissances dans ce domaine. Le cours es articulé en cinq chapitres :

- Etude phénoménologique des fluides.
- Cinématique des fluides.
- Bilans dynamique et thermodynamique
- Dynamique locale des fluides parfaits.
- Fluides visqueux incompressible

M. BOURICH, Docteur ès Sciences, Enseignant chercheur à l'École Nationale des Sciences Appliquées-Marrakech, Spécialité : Énergétique, membre du laboratoire Mécanique des Fluides et Énergétique de la Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.

Un des plus grands avantages qu'on tire de notre théorie, c'est de pouvoir démontrer que la fameuse loi de mécanique appelée la conservation des forces vives a lieu dans le mouvement des fluides comme dans celui des corps solides

Citation J.R. D'Alembert