



Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Laboratoire de Modélisation en Hydraulique et Environnement



Notes de cours

MECANIQUE DES FLUIDES

Une introduction à la dynamique des fluides réels incompressibles

[Ghazi Bellakhal](#)

Version octobre 2015

Avant propos

Le contenu de cet ouvrage est un récapitulatif des notes d'un cours de la mécanique des fluides enseigné à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis de l'Université Tunis El Manar. Ces notes de cours ont été développées durant plusieurs années d'enseignement de la mécanique des fluides aux filières de Génie Civil (GC), de Génie Industriel (GI) et de Modélisation pour l'Industrie et Service (MINDS). Elles ont été développées également en interaction avec les travaux de recherche sur la dynamique des écoulements turbulents multiphasiques développés au Laboratoire de Modélisation en Hydraulique et Environnement (LMHE) à l'ENIT.

La mécanique des fluides est un outil essentiel pour l'ingénieur dans l'étude, la conception et le dimensionnement des systèmes fluides rencontrés aussi bien dans les écoulements naturels que dans les procédés industriels.

D'un point de vue pratique, le champ des applications mettant en jeu des écoulements fluides est très vaste. Il couvre des domaines très diversifiés qui s'étalent du domaine du vivant comme dans les applications médicales ou biologiques aux domaines industriels et environnementaux comme les applications à l'aéronautique, en énergétique et pétrolier ou en hydraulique des milieux urbains, naturels ou marins. En terme d'échelles de longueur caractéristiques des divers écoulements observés en pratique, leur spectre est également très large : il s'étale de l'échelle micrométrique caractéristique à titre d'exemple de la taille des microstructures tourbillonnaires dans les écoulements fortement turbulents, jusqu'à une échelle pouvant atteindre plusieurs milliers de kilomètres comme celle caractéristique des écoulements géostrophiques à l'échelle du globe terrestre.

D'un autre côté, selon le point de vue du physicien, malgré cette diversité, les mécanismes physiques régissant les écoulements des fluides aussi bien les liquides que les gaz (où l'agitation est beaucoup plus importante) sont identiques. Ils ne sont autres qu'une manifestation des principales lois de conservation de la physique classique. D'ailleurs certaines expériences montrent des comportements universels dans la dynamique des écoulements. A titre d'exemple, le comportement affine observé dans plusieurs situations d'écoulement ou la célèbre expérience de Reynolds pour un écoulement en charge dans une conduite. Cette expérience met en évidence un critère universel caractérisant la transition du régime d'écoulement laminaire au turbulent qui correspond à un nombre de Reynolds autour de 2200, et ceci indépendamment de la nature du fluide, de la géométrie de la conduite et de la vitesse d'écoulement.

La mécanique des fluides montre ainsi une dualité entre diversité et complexité de ces applications et une unification de la description physique de la dynamique des fluides et des phénomènes de transfert qui se produisent au sein des écoulements, valable pour les différents types de fluides (liquide ou gaz) et aux différentes échelles de longueur caractéristiques.

Le cours présenté dans cet ouvrage est développé dans cette vision. Il est structuré en huit chapitres:

- Une première partie constituée par les quatre premiers chapitres où on revient sur les notions fondamentales de la physique pour aboutir à l'établissement des équations de Navier-Stokes régissant la dynamique des fluides réels et l'équation de la chaleur. En d'autres termes, une formulation dans le cadre d'une description eulérienne, des équations locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement et d'énergie pour un fluide Newtonien incompressible.
- Une deuxième partie constituée par les quatre derniers chapitres où sont présentées les autres méthodes alternatives, autre que la résolution des équations de Navier-Stokes, utilisées par l'ingénieur pour l'étude d'un système fluide comme les théorèmes généraux (d'Euler et de Bernoulli) ou l'analyse dimensionnelle et la théorie de la similitude.

Les ouvrages suivants, accessibles par internet, ont été consultés librement au cours du développement de ces notes de cours :

- "Hydrodynamique Physique", Marc Fermigier, ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique
- "Fluid Mechanics", Frank M. White, University of Rhode Island, WCB McGraw-Hill
- "Mécanique Des Fluides Incompressibles", J.-S. Darrozes, C. François, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, édition 1998.

Ce cours permet d'aborder les problèmes d'applications pratiques sans envisager la proposition d'étude complète de problèmes réels comme ceux traités par les ingénieurs avec toutes les complexités qui y sont rencontrés. Toutefois, il sert comme pré-requis pour d'autres cours qui s'inscrivent dans l'axe de la dynamique des fluides et des transferts, ayant un aspect pratique plus proclamé dans lesquels les problèmes d'ingénierie rencontrés en pratique sont abordés de manière plus complète sous forme de projets d'étude.

Ghazi Bellakhal

Tunis, le 01 octobre 2015

Convention adoptée dans ce document

La convention suivante a été adoptée dans la rédaction de ces notes de cours :

- Le formalisme tensoriel est utilisé dans ce cours. Les équations sont écrites de manière alternative sous la forme tensorielle intrinsèque ou sous la forme indicielle.
- Les tenseurs d'ordre supérieur ou égal à 1 sont écrits en gras.
- La convention d'Einstein est utilisée dans l'écriture indicielle des équations.

Table des matières

CHAPITRE 1 : DE LA MECANIQUE DU POINT VERS LA MECANIQUE DES FLUIDES	1
1.1 INTRODUCTION	2
1.2 MECANIQUE DU POINT MATERIEL	3
1.3 MECANIQUE DU SOLIDE RIGIDE	5
1.4 MECANIQUE D'UN MILIEU CONTINU	8
1.5 SPECIFICITE DES MILIEUX FLUIDES	13
CHAPITRE 2 : CINEMATIQUE DES FLUIDES.....	15
2.1 INTRODUCTION	16
2.2 DESCRIPTION DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE.....	16
2.3 DERIVEE PARTICULAIRE	21
2.4 CONSERVATION DE LA MASSE.....	25
2.5 ETUDE GRAPHIQUE DE CAS D'ÉCOULEMENTS.....	28
CHAPITRE 3 : EQUATIONS DE BILANS.....	35
3.1 INTRODUCTION	36
3.2 FORCE A DISTANCE – FORCE DE CONTACT – TENSEUR DES CONTRAINTES	37
3.3 CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT	40
3.4 CONSERVATION DU MOMENT CINETIQUE	43
3.5 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE	45
CHAPITRE 4 : DYNAMIQUE DES FLUIDES NEWTONIENS	51
4.1 INTRODUCTION	52
4.2 POSITION DU PROBLEME - DEMARCHE DE FERMETURE	52
4.3 LOIS CONSTITUTIVES POUR UN FLUIDE NEWTONIEN.....	54
4.4 RECAPITULATION : LE SYSTEME FINAL DES EQUATIONS D'UN MILIEU FLUIDE	60
4.5 EXEMPLES DE SOLUTIONS EXACTES DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES	62
4.6 ÉCOULEMENT DANS UN MILIEU POREUX.....	71
CHAPITRE 5 : THEOREMES GENERAUX DE LA MECANIQUE DES FLUIDES	74
5.1 INTRODUCTION	75
5.2 CONSERVATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT: THEOREME D'EULER.....	76
5.3 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE : THEOREME DE BERNOULLI	78
5.4 DYNAMIQUE DES TOURBILLONS DANS UN ÉCOULEMENT DE FLUIDE PARFAIT	82

CHAPITRE 6 : ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE	84
6.1 INTRODUCTION	85
6.2 ANALYSE DIMENSIONNELLE DES EQUATIONS FONDAMENTALES	85
6.3 PROCEDE DE SIMILITUDE	90
6.4 APPLICATION 1 : FORCE DE TRAINEE EXERCEE SUR UN OBJET	92
6.5 APPLICATION 2 : FORME UNIVERSELLE D'EXPRESSION DE LA PERTE DE CHARGE LINEAIRE DANS UNE CONDUITE	97
CHAPITRE 7 : ECOULEMENTS POTENTIELS.....	104
7.1 INTRODUCTION	105
7.2 EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES ECOULEMENTS POTENTIELS	105
7.3 ECOULEMENTS POTENTIELS BIDIMENSIONNELS	107
7.4 ETUDE DE QUELQUES SOLUTIONS ELEMENTAIRES	109
7.5 METHODE DE SUPERPOSITION : ETUDE DE L'ECOULEMENT POTENTIEL AUTOUR D'UN CYLINDRE	114
CHAPITRE 8 : COUCHE LIMITE	120
8.1 INTRODUCTION	121
8.2 APPROCHE PAR LA METHODE DES DEVELOPPEMENTS RACCORDES	122
8.3 GRANDEURS CARACTERISTIQUES D'UNE COUCHE LIMITE	130
8.4 COUCHE LIMITE SUR PLAQUE PLANE SANS GRADIENT DE PRESSION : SOLUTION DE BLASIVUS.....	133
ANNEXE 1 : EQUATIONS EN COORDONNEES CARTESIENNES	140
1.1 FORMULAIRE D'ANALYSE TENSORIELLE EN COORDONNEES CARTESIENNES	140
1.2 EQUATIONS DE NAVIER-STOCKES	143
1.3 EQUATION DE LA CHALEUR.....	143
ANNEXE 2 : EQUATIONS EN COORDONNEES CYLINDRIQUES	144
2.1 FORMULAIRE D'ANALYSE TENSORIELLE EN COORDONNEES CYLINDRIQUES	144
2.2 EQUATIONS DE NAVIER-STOCKES	146

Chapitre 1 : De la mécanique du point vers la mécanique des fluides

1.1 Introduction

1.2 Mécanique du point matériel

1.2.1 Cinématique d'un point matériel

1.2.2 Dynamique d'un point matériel

1.3 Mécanique du solide rigide

1.3.1 Cinématique du solide rigide

1.3.2 Dynamique du solide rigide

1.4 Mécanique d'un milieu continu

1.4.1 Hypothèse de continuité

1.4.2 Cinématique d'un milieu continu - Modélisation de la déformation

1.5 Spécificité des milieux fluides

1.1 Introduction

Il existe plusieurs niveaux de description du comportement mécanique d'un objet. Le premier niveau consiste à la description proposée par la mécanique du point où l'objet est représenté par un point matériel de masse équivalente. Ce point matériel soumis à une force ponctuelle est repéré, par rapport à un référentiel donné, à l'aide d'un seul vecteur (vecteur de position). Sa dynamique est entièrement régie par *la loi fondamentale de la dynamique*. Ainsi pour décrire la vitesse de l'objet à ce premier niveau il suffit de 3 variables.

La description de la cinématique d'un objet dans un référentiel en considérant qu'il occupe, à un instant donné, un domaine limité de l'espace nécessite la connaissance du champ de vitesse en tout point dans ce domaine. Cependant, l'hypothèse de l'indéformabilité de l'objet offre une simplification énorme de cette description et ceci grâce à l'hypothèse d'antisymétrie vérifiée par son champ de vitesse. Ce champ est entièrement déterminé connaissant deux vecteurs : la résultante du torseur cinématique et son moment en un point quelconque du solide. Ceci revient en d'autres termes à déterminer la position de l'objet et sa rotation autour de lui-même. D'où le second niveau de description du comportement mécanique d'un objet qui est donné par la mécanique du solide rigide. Dans cette description il nous faut 6 variables correspondant aux composantes des deux vecteurs. Le plus d'information acquis dans cette description par rapport à celle fournie par la mécanique du point consiste à la prise en compte de la rotation du solide autour de lui-même.

L'introduction de la déformation de l'objet rend l'hypothèse d'antisymétrie du champ de vitesse invalide et donc la description plus complexe. En plus de sa rotation autour de lui-même, le milieu peut subir des déformations et la variation de la vitesse entre deux points voisins de ce milieu est due à la fois à la rotation et à la déformation. Les vecteurs en tant qu'outils mathématiques s'avèrent insuffisants pour cette description reproduisant la déformation de l'objet et on a recours à d'autres outils mathématiques qui sont *les tenseurs*. C'est le troisième niveau de description qui correspond à la description fournie par la mécanique des milieux continus. Ainsi la cinématique d'un objet déformable est décrite par deux tenseurs (des taux de déformation et des taux de rotation) comprenant chacun 6 composantes, soit au total 12 variables.

Les milieux fluides peuvent être considérés comme des milieux continus obéissant à des lois de comportement particulières. Leur comportement mécanique est décrit ainsi par le formalisme de la

mécanique des milieux continus, d'où il est possible d'interpréter la mécanique des fluides comme une branche particulière qui dérive de la mécanique des milieux continus.

Dans le paragraphe suivant nous expliciterons les équations générales régissant le mouvement d'un point matériel. Dans le troisième paragraphe, nous présenterons les équations similaires régissant le mouvement d'un corps rigide. Dans le quatrième paragraphe, nous généraliserons ces relations au cas des milieux continus. Nous reviendrons sur le cas des fluides dans le cinquième paragraphe.

1.2 Mécanique du point matériel

C'est le niveau de la mécanique le plus élémentaire où l'on cherche à décrire le mouvement d'une masse ponctuelle m par rapport à un référentiel donné.

1.2.1 Cinématique d'un point matériel

Si on se donne un repère $R = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ d'un référentiel (\mathcal{R}) . La position d'un point matériel M est repérée par le vecteur position \mathbf{OM} . Sa vitesse et son accélération sont les deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{a} donnés par les relations suivantes :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} \quad (1-1)$$

Du point de vue de la mécanique des milieux continus, une telle description du mouvement ne peut être que lagrangienne parce qu'elle consiste à suivre le point matériel dans son mouvement. La seule ligne caractéristique de la cinématique est la trajectoire qui est l'ensemble des positions successives occupées par le point matériel dans son mouvement.

Relativement à un autre repère $R' = (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ en mouvement par rapport à R , la cinématique du point matériel est déduite par les lois de composition du mouvement. La vitesse $\mathbf{v}_{R'}$ et l'accélération $\mathbf{\Gamma}_{R'}$ relatives à R' sont données par les lois de composition du mouvement qui s'écrivent :

$$\mathbf{v}_{R'} = \mathbf{v}_R - \mathbf{v}_e \quad (1-2)$$

avec \mathbf{v}_e est la vitesse d'entraînement de M donnée par la relation :

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_R(O') + \boldsymbol{\Omega}_{R'/R} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} \quad (1-3)$$

$\boldsymbol{\Omega}_{R'/R}$ étant le vecteur vitesse de rotation du repère R' par rapport à R

$$\boldsymbol{\Gamma}_{R'} = \boldsymbol{\Gamma}_R - \boldsymbol{\Gamma}_e - \boldsymbol{\Gamma}_c \quad (1-4)$$

avec $\boldsymbol{\Gamma}_e$ et $\boldsymbol{\Gamma}_c$ sont les accélérations d'entraînement et de Coriolis de M données par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \boldsymbol{\Gamma}_R(O') + \boldsymbol{\Omega}_{R'/R} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{R'/R} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} \quad (1-5)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_c = 2 \boldsymbol{\Omega}_{R'/R} \wedge \mathbf{v}_R \quad (1-6)$$

1.2.2 Dynamique d'un point matériel

L'équation du mouvement du point matériel M de masse m est donnée par le principe fondamental de la dynamique qui n'est autre que le principe de conservation de quantité de mouvement dû à Newton.

Ce principe énonce que toute variation de la quantité de mouvement du point M est due à l'action d'une force appliquée et réciproquement :

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (1-7)$$

Cette équation est à la base du développement de toute la mécanique classique. Les équations dynamiques régissant le comportement des milieux continus (rigides ou déformables) se ramènent à des formes similaires à l'équation (1-7) ce qui permet une interprétation plus aisée de ces équations. Partant de cette équation, on peut écrire :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (1-8)$$

Ou encore en introduisant l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$:

$$P = \frac{dE_c}{dt} \quad (1-9)$$

avec $P = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ est la puissance de la force \mathbf{F} . On peut intégrer cette équation entre deux instants t_1 et t_2 pour faire apparaître le travail de cette force sur cet intervalle de temps:

$$\int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_c}{dt} dt \quad (1-10)$$

On déduit ainsi l'équation de conservation de l'énergie cinétique qui s'écrit :

$$W(\mathbf{F})_{t_1 \rightarrow t_2} = \Delta E_c \quad (1-11)$$

Cette équation stipule que la variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la force \mathbf{F} .

La mécanique du point matériel était à la base, depuis le 17^{ème} siècle, du développement de la mécanique céleste dans la mesure où elle a permis de comprendre et de reproduire le mouvement des objets astronomiques traités comme des objets ponctuels.

1.3 Mécanique du solide rigide

Par rapport au point matériel, un solide est défini comme un ensemble (discret ou continu) de points dont les distances mutuelles restent constantes. Un milieu continu indéformable peut alors être considéré comme un solide qui occupe, à un instant t donné, un domaine fini D de l'espace. La répartition de la masse dans D est décrite par une fonction définie et continue sur D : la masse volumique ρ .

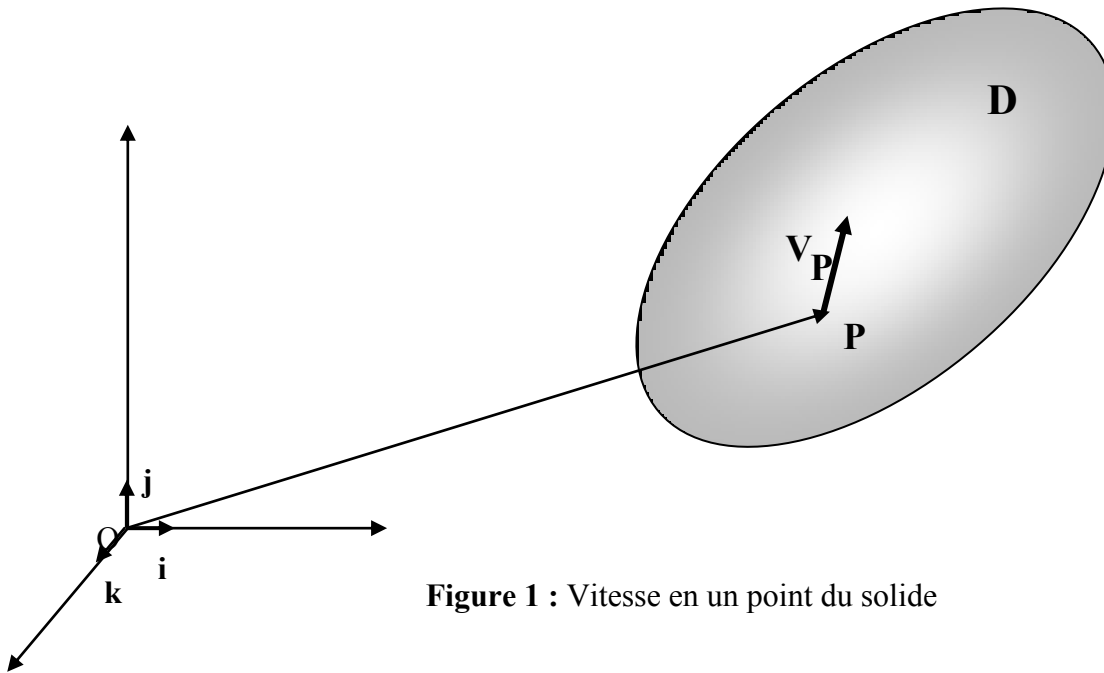


Figure 1 : Vitesse en un point du solide

1.3.1 Cinématique du solide rigide

On se propose d'étudier dans ce paragraphe la cinématique d'un solide S par rapport au repère de référence $R = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Elle n'est plus décrite par la donnée d'un seul vecteur vitesse comme c'était le cas pour un point matériel, mais plutôt par la donnée du champ de vitesse instantané défini sur le domaine occupé par le solide à chaque instant. Cependant, ce champ de vitesse vérifie, grâce à l'indéformabilité, la propriété d'antisymétrie : les vitesses en deux points A et B quelconques du solide sont liées par la relation suivante :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{BA} \quad (1-12)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse de rotation d'une base de vecteurs liée au solide par rapport à la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. C'est la vitesse de rotation du solide autour de lui-même. Le mouvement d'un solide est alors parfaitement décrit si on connaît la vitesse \mathbf{v}_M en un point M quelconque du solide et la vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$. Ces deux vecteurs correspondent aux éléments de réduction du *torseur cinématique* $[\boldsymbol{\tau}]$ au point M noté comme suit :

$$[\boldsymbol{\tau}] = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}_M]_M \quad (1-13)$$

Ainsi pour décrire la cinématique d'un solide rigide il en faut 6 variables correspondant aux composantes des deux vecteurs décrits ci-dessus.

1.3.2 Dynamique du solide rigide

Dans le repère R dans lequel on observe le mouvement du solide S, le torseur cinétique ou le torseur des quantités de mouvement du solide S, noté $[\mathbf{K}]$, est défini à partir de son champ de vitesse \mathbf{v}_M . Ses éléments de réduction en un point A sont donnés par les expressions suivantes :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{P}, \boldsymbol{\sigma}_A]_A \quad (1-14)$$

Avec :

$$\mathbf{P} = \int_D \rho \mathbf{v}_M d\tau \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_A = \int_D \rho \mathbf{AM} \wedge \mathbf{v}_M d\tau \quad (1-15)$$

Le torseur dynamique ou le torseur des quantités d'accélération du solide S, noté $[\mathbf{A}]$, est défini à partir de son champ d'accélération \mathbf{a}_M . Ses éléments de réduction au point A sont donnés par :

$$[\mathbf{A}] = [\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Pi}_A]_A \quad (1-16)$$

Avec :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \int_D \rho \mathbf{a}_M d\tau \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Pi}_A = \int_D \rho \mathbf{AM} \wedge \mathbf{a}_M d\tau \quad (1-17)$$

Ces deux torseurs cinétique et dynamique sont reliés entre eux par la relation de dérivation suivante :

$$[\mathbf{A}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{K}] \quad (1-18)$$

Le torseur des forces extérieures exercées sur le solide S est exprimé par ses éléments de réduction au point A, qui expriment la résultante des forces extérieures exercées sur S et leur moment au point A, comme suit :

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{F}, \mathbf{M}_A]_A \quad (1-19)$$

Nous reviendrons sur les expressions de ces éléments de réduction en détails au chapitre 4 lorsque nous allons étudier les forces qui s'exercent dans le cas général sur un milieu continu.

La loi fondamentale régissant la dynamique du solide S s'énonce comme suit :

Il existe un référentiel absolu \mathbf{R}^a , dit galiléen, tel qu'à chaque instant par rapport à ce repère le torseur dynamique est égal au torseur des forces extérieures :

$$[\mathbf{A}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{K}] = [\mathbf{F}] \quad (1-20)$$

Ce qui implique l'égalité des résultantes (la conservation de quantité de mouvement) et l'égalité des moments en tout point (la conservation du moment cinétique).

1.4 Mécanique d'un milieu continu

Un système matériel peut subir dans son évolution une éventuelle déformation. Dans ce cas, la distance entre deux points de ce système n'est plus conservée et la variation de la vitesse entre ces deux points est due à la rotation de ce système autour de lui-même ainsi qu'à sa déformation. Une question fondamentale se pose à ce niveau : à quelles échelles spatiales et temporelles cette déformation sera décrite ?

Nous savons qu'à l'échelle moléculaire ($\approx 1 \text{ \AA}$) les éléments constitutifs de la matière formant le système sont en perpétuelle agitation décrite par la théorie de Boltzmann. Par conséquent, à cette échelle la matière est en déformation aléatoire permanente et même le concept de continuité du milieu est mis en question. Une discipline qui étudie le comportement à cette échelle moléculaire s'appelle la « nano-physique » et qui voit actuellement un très grand progrès.

À des échelles beaucoup plus grandes, les interactions moléculaires ne seront plus « vues ». Elles se manifestent à travers des propriétés physiques macroscopiques décrites par des lois constitutives caractéristiques du type du milieu considéré. C'est le domaine d'étude de la « Mécanique des Milieux Continus ». Dans ce cadre, les systèmes matériels seront considérés comme des milieux continus et leur déformation sera quantifiée par le biais de tenseurs spécifiques.

1.4.1 Hypothèse de continuité

C'est l'observation de la déformation d'une barre de fer chauffée, de l'écoulement d'un fluide ou de la détente d'un gaz qui suggère qu'à l'échelle macroscopique la déformation d'un milieu peut

être décrite par des opérateurs mathématiques continus sans contredire la modélisation de la physique microscopique.

Du point de vue de la constitution du milieu, l'hypothèse de continuité est basée sur le concept de la "particule matérielle" : il s'agit d'un volume du milieu infinitésimal par comparaison au volume total du domaine, mais qui reste suffisamment grand pour contenir un nombre très grand de molécules et être perçu comme un continuum de matière.

Si on note l_{micro} ; L_{macro} et l : des échelles caractéristiques respectivement de la structure microscopique du milieu, des dimensions macroscopiques et de la particule matérielle. Ces trois échelles vérifient la relation suivante :

$$l_{\text{micro}} \ll l \ll L_{\text{macro}} \quad (1-21)$$

L'échelle l_{micro} peut être représentée à titre d'exemple par l'un des paramètres caractéristiques de la maille dans le cas d'un cristal solide ou par le libre parcours moyen dans le cas d'un fluide. Quand à l'échelle macroscopique L_{macro} , elle peut être représentée par exemple par le diamètre de la conduite dans le cas d'un écoulement de fluide dans celle-ci. La figure 2 ci-dessous illustre une signification de cette hypothèse de continuité.

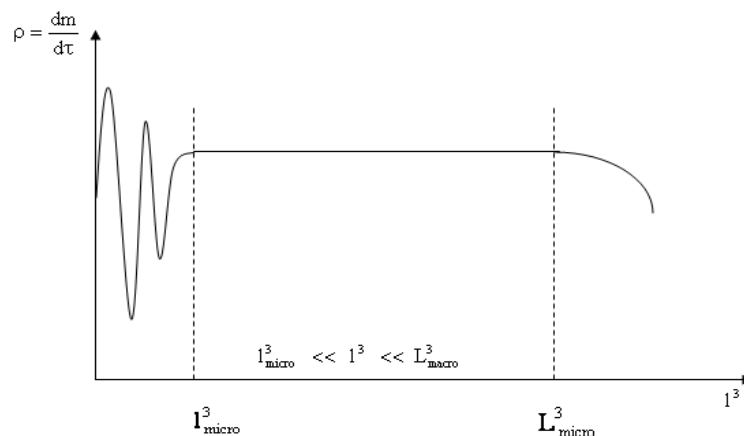


Figure 2 : Domaine de définition du volume élémentaire du milieu continu

Elle montre la variation de la masse volumique du milieu représentée par le rapport de la masse dm de matière contenue dans le volume $d\tau = l^3$. Pour des valeurs $l < l_{\text{micro}}$, cette grandeur extensive

varie d'une manière aléatoire. Elle converge vers une valeur constante lorsque le nombre de molécules contenues dans le volume l^3 devient suffisamment grand.

1.4.2 Cinématique d'un milieu continu - Modélisation de la déformation

L'étude cinématique de l'évolution d'un milieu continu sera développée d'une manière détaillée dans le chapitre suivant. Nous focalisons dans ce paragraphe sur la prise en compte de la déformation et les nouveaux développements introduits par rapport à ce que nous avons déjà vu dans le cas du système rigide.

1.4.2.1 Champs de gradient de vitesse – Champs des tenseurs de taux de déformation et de taux de rotation

La distance entre deux points M et N d'un milieu continu n'est pas conservée lors de son évolution entre deux états et ceci à cause de la déformation. Il en résulte qu'une relation de type (1-12) n'est plus valable dans ce cas. Pour procéder ici, on considère (à un instant t) les vitesses en deux points du domaine occupé par le milieu continu très proches.

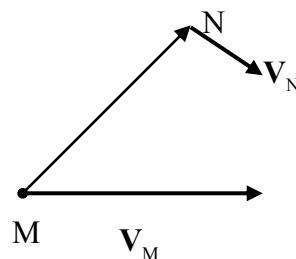


Figure 3 : Variation de la vitesse entre deux points voisins

La variation de la vitesse entre ces deux points reste infinitésimale et elle peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{v}_N - \mathbf{v}_M = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{MN} \quad (1-22)$$

On introduit ainsi le champ du tenseur au second ordre de *gradient de vitesse* $\nabla \mathbf{v}$ caractéristique de la cinématique d'un milieu continu. Comme tout tenseur au second ordre, ce tenseur se décompose en deux parties symétrique et antisymétrique selon :

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{R} \quad (1-23)$$

Avec :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (1-24)$$

On note que les trois tenseurs $\nabla \mathbf{v}$, \mathbf{D} et \mathbf{R} sont homogènes à l'inverse d'un temps. D'autre part, on sait que pour le tenseur au second ordre antisymétrique \mathbf{R} , il existe un vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ qui lui est associé tel que l'on ait pour tout vecteur \mathbf{w} :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{w} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{w} \quad (1-25)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ est donné par la relation :

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{v} \quad (1-26)$$

Le tenseur \mathbf{R} est interprété comme "*le tenseur des taux de rotation*". On en déduit alors l'expression suivante de la variation élémentaire de la vitesse entre les deux points M et N :

$$\mathbf{v}_N - \mathbf{v}_M = \mathbf{D} \cdot \mathbf{MN} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{MN} \quad (1-27)$$

Cette relation peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{v}_N = (\mathbf{v}_M + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{MN}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{MN} \quad (1-28)$$

Par comparaison à (1-12), l'équation (1-28) montre une généralisation de cette dernière au cas des milieux déformables.

1.4.2.2 Interprétation de la déformation

L'équation (1-28) introduit un terme supplémentaire " $\mathbf{D} \cdot \mathbf{MN}$ " associé à la déformation que nous allons essayer d'interpréter. Pour cela, on considère à l'instant t deux points M et N du milieu déformable qui subissent au cours d'un temps dt des déplacements élémentaires aux points M' et N' tels que ces deux points gardent la même direction comme le montre la figure suivante :

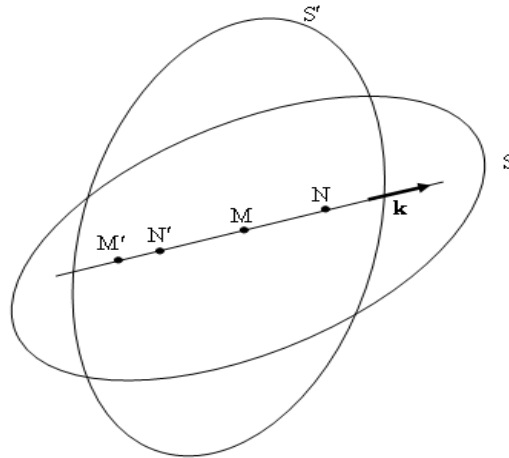


Figure 4 : Déformation élémentaire d'un segment

En posant :

$$\mathbf{MN} = r \mathbf{k} \quad (1-29)$$

où \mathbf{k} est un vecteur unitaire porté par l'axe MN. On peut exprimer la variation élémentaire $d\mathbf{MN}$ dans la configuration (S) comme suit :

$$d\mathbf{MN} = d\mathbf{ON} - d\mathbf{OM} = (\mathbf{v}_N - \mathbf{v}_M)dt \quad (1-30)$$

Compte tenu de (1 - 27), on aura :

$$d\mathbf{MN} = [\mathbf{D} \cdot (r\mathbf{k}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (r\mathbf{k})]dt \quad (1-31)$$

D'autre part, comme la déformation de MN se fait dans la même direction \mathbf{k} , on peut écrire :

$$d\mathbf{MN} = dr \mathbf{k} \quad (1-32)$$

Et on en déduit alors l'égalité suivante :

$$dr \mathbf{k} = [\mathbf{D} \cdot (r\mathbf{k}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (r\mathbf{k})]dt \quad (1-33)$$

Le produit contracté des membres de cette équation avec le vecteur \mathbf{k} s'écrit :

$$dr \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}_1 = \left[r(\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{k}) + \underbrace{\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge (r\mathbf{k}))}_0 \right] dt \quad (1-34)$$

Et on obtient enfin :

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{k} = Q(\mathbf{k}) \quad (1-35)$$

Où Q est la forme quadratique associée au tenseur \mathbf{D} .

Le rapport $\frac{1}{r} \frac{dr}{dt}$ homogène à l'inverse d'un temps représente le taux d'élongation relative dans la direction \mathbf{k} . l'équation (1-35) montre que le tenseur \mathbf{D} permet de calculer *la vitesse de déformation* dans la direction \mathbf{k} qui sera donnée par $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{k} = Q(\mathbf{k})$. On peut montrer également que le taux de dilatation volumique d'un élément de volume ω centré sur un point M est donné par :

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = \text{trace}(\mathbf{D}) \quad (1-36)$$

Le tenseur \mathbf{D} est appelé "*le tenseur des taux de déformation*".

1.5 Spécificité des milieux fluides

D'un point de vue thermodynamique, le milieu fluide correspond aux deux états de la matière liquide et gazeux. Ces deux états montrent des similarités dans la mesure où ils ne gardent pas une forme propre du domaine qu'ils occupent dans l'espace. A l'échelle microscopique, l'état fluide peut être décrit par un système de molécules en agitation aléatoire et permanente qui ne garde en mémoire aucune structure (ou ordre) de répartition dans l'espace. Il existe cependant une différence fondamentale entre les deux états liquide et gazeux, en effet, le liquide a une surface libre : il occupe dans un récipient un volume fini délimité par la surface mouillée du récipient et l'interface du liquide avec l'air atmosphérique. Cependant un gaz occupe tout le volume offert par l'enceinte qui le contient. A l'échelle microscopique, une telle différence se traduit par une agitation moléculaire beaucoup plus importante dans le gaz (voir annexe 2).

D'un point de vue mécanique, la définition de l'état fluide est moins évidente. En effet, tout matériau qui se déforme peut être considéré comme un fluide selon le temps caractéristique de l'observation. A titre d'exemple, le manteau terrestre observé à une échelle de temps caractéristique de la vie humaine semble être solide, par contre observé sur une échelle de temps géologique il semble couler comme un fluide.

Cette fluidité des matériaux est caractérisée par le nombre adimensionnel de Deborah introduit en rhéologie qui s'écrit :

$$De = \frac{T_r}{T_p} \quad (1-37)$$

Où T_r est une échelle de temps caractéristique de déformation du matériau et T_p est le temps caractéristique de l'observation. Pour des valeurs de $De \ll 1$, le matériau se comporte comme un fluide et inversement, pour des valeurs de $De \gg 1$ il se comporte comme un solide.

D'autre part, une distinction entre un solide et un fluide peut être dégagée en examinant la réponse d'un matériau (sa déformation) vis-à-vis d'une contrainte appliquée. Un solide peut être ainsi défini comme un matériau dont la déformation croît linéairement avec la contrainte appliquée jusqu'à la rupture. Tandis qu'un fluide soumis à une contrainte continue à se déformer sans qu'il y ait rupture. C'est la vitesse de déformation qui diffère entre deux fluides. Afin d'illustrer cette notion, considérons l'exemple suivant : Un ressort soumis à une contrainte de compression se déforme proportionnellement à l'amplitude de cette contrainte. Il passe alors d'un état initial non comprimé à un état final comprimé. Cependant, si on applique la même contrainte tangentiellement à une plaque flottante sur une lame d'eau, on va maintenir la plaque en mouvement uniforme permanent. Autrement dit on va maintenir une déformation continue de l'eau. C'est la vitesse de déformation qui sera constante. C'est pour cela qu'à l'échelle de la force développée par un être humain, on serait capable de tirer par la corde une barque dans l'eau même si elle est assez grande seulement son déplacement sera assez lent, cependant on serait incapable de comprimer un ressort à raideur assez grand même lentement.

L'expression de la vitesse de déformation du fluide en fonction de la contrainte appliquée constitue la loi de comportement rhéologique du fluide sur laquelle on va revenir au chapitre 4.

Chapitre 2 : Cinématique des fluides

2.1 Introduction

2.2 Description de l'écoulement d'un fluide

2.2.1 Description lagrangienne

2.2.2 Description eulérienne

2.2.3 Correspondance entre descriptions lagrangienne et eulérienne

2.3 Dérivée particulaire

2.3.1 Dérivée particulaire lagrangienne

2.3.2 Dérivée particulaire eulérienne

2.4 Conservation de la masse

2.4.1 Principe de conservation de la masse

2.4.2 Forme intégrale de conservation de la masse en description eulérienne

2.4.3 Forme locale de conservation de la masse en description eulérienne : Equation de continuité

2.5 Etude graphique de cas d'écoulements

2.5.1 Lignes d'émission – Lignes de courant – Tubes de courant

2.5.2 Visualisation expérimentale

2.5.3 Fonction courant en écoulement incompressible bidimensionnel

2.1 Introduction

La cinématique des fluides a pour objet la description de l'évolution d'un milieu fluide dans l'espace-temps indépendamment des causes et des lois qui la régissent. Dans le cadre de la mécanique classique, l'espace et le temps sont considérés comme indépendants : le temps est paramétré sur l'axe des réels et l'espace est assimilé à un espace affine associé à un espace vectoriel euclidien de dimension 3. La cinématique d'un corps matériel n'a de sens que dans le cadre de la définition d'un référentiel. On appelle « référentiel \mathcal{R} » la donnée de 4 points de l'espace non coplanaires formant un trièdre rigide et d'une chronologie.

Une difficulté caractéristique surgit dès qu'on aborde l'étude de la cinématique d'un milieu fluide (ou d'un milieu continu en général) qui consiste à la description même du mouvement du fluide. En effet, pour décrire le mouvement d'un point matériel ou même d'un solide, on suit d'une manière systématique le système dans sa trajectoire et donc on adopte, du point de vue de la mécanique des milieux continus, naturellement une description « lagrangienne » du mouvement. Dans le cas d'un milieu continu, la description lagrangienne reste encore suffisante notamment lorsque le milieu continu est soumis à une petite déformation. Cependant, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les milieux fluides sont considérés comme des milieux continus susceptibles de subir des fortes déformations au cours desquelles la configuration initiale du système est quasiment oubliée. Par conséquent, une description Lagrangienne s'avère dans le cas général peu adaptée aux applications pratiques dans le cas des milieux fluides. On recourt dans la plupart des cas à un autre type de description du mouvement : « La description eulérienne ».

Dans le second paragraphe nous nous proposons de revenir sur les différentes méthodes de description du mouvement d'un milieu fluide. Au troisième paragraphe nous introduisons la notion de dérivée particulaire ou matérielle. Nous établissons les équations traduisant le principe de conservation de la masse au quatrième paragraphe. Au dernier paragraphe nous décrivons l'étude graphique des écoulements.

2.2 Description de l'écoulement d'un fluide

Un milieu fluide, considéré comme un milieu continu, peut être représenté comme une association d'un très grand nombre de particules fluides (paragraphe 1.4.1) constituant d'un point

de vue mathématique un ensemble M . Cet ensemble susceptible d'évoluer au cours du temps, existe indépendamment du domaine Ω de l'espace qu'il occupe à un instant donné de son évolution. On peut reproduire (dans un référentiel \mathcal{R}) le mouvement de ce milieu fluide en décrivant le mouvement de chacune des particules. On reconstitue ainsi au cours du temps les configurations instantanées successives Ω_t de ce fluide dans l'espace sachant le mouvement de chacune des particules. On note par configuration instantanée le domaine de l'espace occupé par l'ensemble M des particules à l'instant t .

D'un point de vue mathématique, la description cinématique de l'écoulement d'un milieu fluide entre deux instants t_1 et t_2 peut se restreindre à l'étude de l'opérateur de transformation :

$$\begin{aligned} \Phi_{t_2 t_1} : \Omega_{t_1} &\rightarrow \Omega_{t_2} \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2-1)$$

\mathbf{X} et \mathbf{x} étant les deux vecteurs position d'une particule fluide de M respectivement aux instants t_1 et t_2 comme le montre la figure suivante :

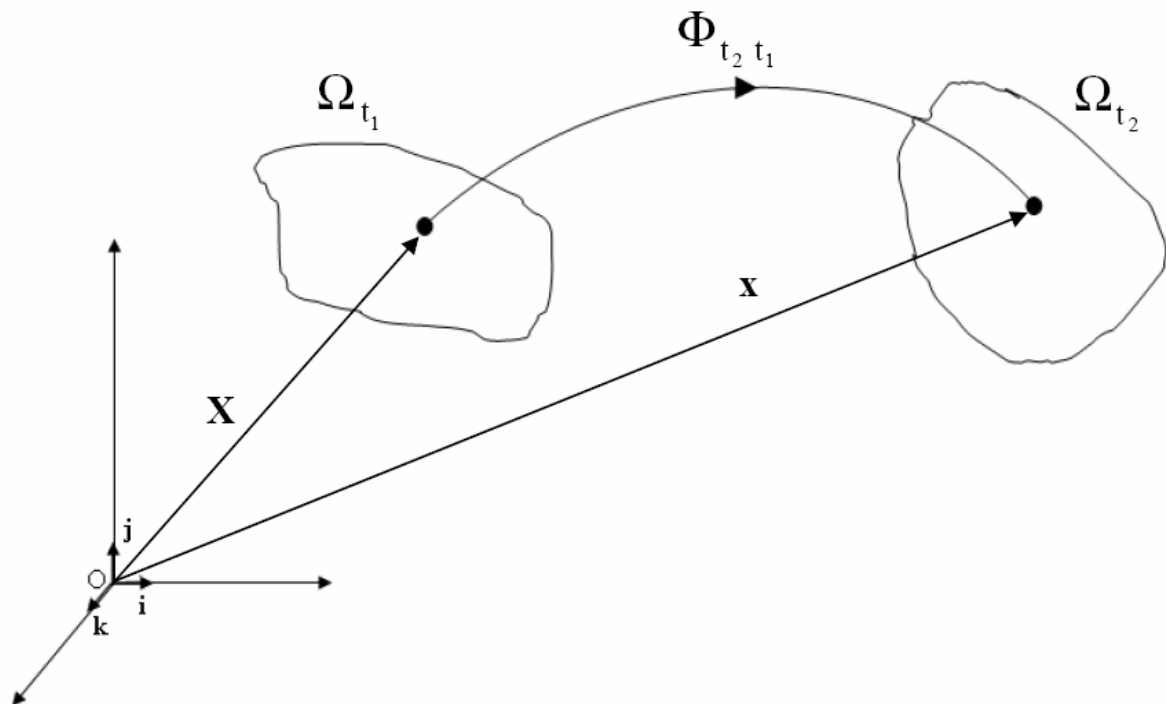


Figure 1 : Transformation entre deux configurations

La fonction $\Phi_{t_2 t_1}$ est évidemment bijective. Elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\Phi_{t_3 t_1} = \Phi_{t_3 t_2} \circ \Phi_{t_2 t_1} \quad (2-2)$$

$$\Phi_{t t} = \text{Id} \quad (2-3)$$

$$\Phi_{t_2 t_1} = [\Phi_{t_1 t_2}]^{-1} \quad (2-4)$$

L'hypothèse de continuité du milieu implique la continuité de cette transformation. Elle est également supposée de classe C^2 sur son domaine de définition (Ω_{t_1}).

2.2.1 Description lagrangienne

Si on choisit la configuration du milieu fluide Ω_0 à l'instant $t = 0$ comme une configuration de référence, sa configuration Ω_t à l'instant t peut être déduite à l'aide de l'opérateur de transformation Φ_{t0} . La position géométrique \mathbf{x} de la particule P, identifiée dans la configuration Ω_0 par sa position \mathbf{X} , est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{x} = \Phi_{t0}(\mathbf{X}) \quad (2-5)$$

On définit ainsi la fonction Φ donnée par l'expression :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (2-6)$$

qui permet de déterminer la position \mathbf{x} à l'instant t connaissant (\mathbf{X}, t) . La relation (2-6) ci-dessus représente l'équation horaire de la trajectoire de la particule P.

La description lagrangienne du mouvement du fluide consiste à décrire les grandeurs physiques caractéristiques du milieu à l'instant t dans la configuration Ω_t comme des fonctions de la variable \mathbf{X} dans Ω_0 et du temps t . Les trois composantes X_i ainsi que le temps t sont appelés « *les variables de Lagrange* ». En d'autres termes, dans la description lagrangienne on identifie les particules fluides et on les suit dans leurs mouvements. Toute grandeur physique ψ associée à une particule est exprimée en fonction des variables de Lagrange $\psi = \psi(X_i, t)$.

Comme les variables X_i sont indépendantes du temps, la dérivée matérielle (ou particulaire) de cette grandeur s'identifie à sa dérivée partielle par rapport au temps :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2-7)$$

En particulier, la vitesse et l'accélération sont données par les relations suivantes :

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (2-8)$$

D'un point de vue pratique, la mise en œuvre de la méthode lagrangienne est mieux adaptée à l'étude de la cinétique des solides ou des milieux continus peu déformables, tandis que pour la description de l'écoulement d'un fluide elle n'est pas aussi évidente. Toutefois, il existe des cas d'applications pratiques où on a recours à cette méthode telle que l'étude d'une dispersion d'inclusions dans un fluide.

2.2.2 Description eulérienne

A la différence de la description lagrangienne où on identifie les particules, la description eulérienne consiste à fixer un point d'observation \mathbf{x} dans l'espace et à enregistrer au cours du temps la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ des particules fluides qui défilent en ce point. C'est le résultat obtenu par une sonde fixe placée en un point donné qui enregistre la vitesse locale et instantanée d'un écoulement de fluide. Ainsi sur un volume de contrôle fixe par rapport au repère d'observation et choisi de façon arbitraire, la description eulérienne définit l'écoulement du fluide par la donnée à chaque instant t du champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en tout point \mathbf{x} de ce domaine. Les coordonnées spatiales x_i ainsi que le temps t représentent les variables d'Euler (x_i, t) . Toute grandeur physique locale intensive ψ caractéristique de l'écoulement sera définie comme une fonction $\psi(x_i, t)$ des variables d'Euler dans l'espace-temps. En particulier, les composantes des champs de vitesse et d'accélération s'écrivent :

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = u_i(x_i, t) \quad \text{et} \quad a_i = \frac{d^2x_i}{dt^2} = u_i(x_i, t) \quad (2-9)$$

Sur le plan purement géométrique, la description eulérienne est plus cohérente avec la description incrémentale de l'évolution du milieu fluide. En effet, à chaque instant l'évolution infinitésimale à venir y est définie sur la configuration actuelle. En d'autres termes, le mouvement étant défini par la donnée du champ de vitesse actuel $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t)$, c'est le gradient de ce champ qui définit localement la transformation infinitésimale. Le tenseur des taux de déformations donné par la partie symétrique de ce gradient de vitesse (voir paragraphe 1.4.2), qui est un tenseur eulérien, caractérise la déformation locale élémentaire. Tandis que le tenseur des taux de rotations correspondant à la partie antisymétrique de ce gradient, qui est de même un tenseur eulérien, caractérise la rotation locale élémentaire du milieu fluide.

Sur le plan pratique, l'approche eulérienne est mieux adaptée à l'étude expérimentale de l'écoulement des milieux fluides.

2.2.3 Correspondance entre descriptions lagrangienne et eulérienne

D'un point de vue mathématique, les deux descriptions eulérienne et lagrangienne sont équivalentes. En effet, en partant d'une description eulérienne d'un écoulement donnée par le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, on peut écrire à l'aide de la relation lagrangienne (2-6) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}[\Phi(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (2-10)$$

Réciproquement, en partant d'une description lagrangienne donnée par la fonction de transformation Φ entre l'instant initial et un instant t donné, (2-6), on peut déduire la position initiale \mathbf{X} comme suit :

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2-11)$$

On peut ainsi écrire :

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}[\Phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2-12)$$

D'un point de vue pratique, on peut apercevoir la différence entre les deux descriptions lagrangienne et eulérienne en assimilant la description lagrangienne à une prise de photo de l'écoulement avec un temps de pose (c'est le temps d'ouverture de l'obturateur en photographie) s'étalant de 0 à t. Tandis que la description eulérienne est assimilée à une prise de photo instantanée et actuelle où l'on suppose qu'on connaisse en tout point de cette photo la vitesse de l'écoulement.

2.3 Dérivée particulaire

On distingue entre deux types de grandeurs physiques caractéristiques d'un milieu fluide :

1. Les grandeurs intensives locales : telles que la vitesse, la température ou la concentration d'un élément chimique
2. les grandeurs extensives intégrales : qui sont stockées dans des volumes telles que la masse, l'énergie ou la quantité de mouvement. Ces grandeurs peuvent être représentées par des intégrales de densité volumique :

$$\mathbf{B} = \int_{\tau} \mathbf{b} \, d\tau \quad (2-13)$$

où \mathbf{b} est la densité volumique qui est une grandeur locale intensive.

Selon la description de l'écoulement, ces grandeurs sont attachées aux particules fluides ou à l'élément matériel concerné (en description lagrangienne), ou définies en tant que des fonctions locales des variables d'Euler ou sous forme d'intégrale sur un volume de contrôle indépendant de l'écoulement (description eulérienne). Il en résulte que la dérivée particulaire ou dite également matérielle diffère selon la description.

2.3.1 Dérivée particulaire lagrangienne

Nous avons déjà vu que la dérivée particulaire d'une grandeur locale en description lagrangienne est identifiée à la dérivée partielle par rapport au temps (équation (2-7)).

Une grandeur intégrale peut être représentée comme suit :

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega_t} \mathbf{b} \, d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \, d\Omega_0 \quad (2-14)$$

Comme on peut intervertir l'intégration spatiale et la dérivation temporelle, on peut écrire :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{d\mathbf{b}(\mathbf{X}, t)}{dt} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} d\Omega_0 \quad (2-15)$$

La dérivée particulaire lagrangienne s'obtient alors dans tous les cas par une dérivation partielle par rapport au temps. Cette relation est valable quel que soit l'ordre tensoriel de la grandeur \mathbf{B} .

2.3.2 Dérivée particulaire eulérienne

2.3.2.1 Dérivée particulaire d'une grandeur locale intensive

D'un point de vue mathématique, nous avons vu qu'une grandeur locale intensive ψ est représentée en description eulérienne par une fonction à quatre variables (variables d'Euler) $\psi(x_i, t)$. Il en résulte que son différentiel s'exprime comme suit :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \quad (2-16)$$

Soit alors la dérivée particulaire eulérienne de ψ qui s'écrit :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (2-17)$$

Ou encore compte tenu de (2-9) :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (2-18)$$

L'écriture tensorielle de cette relation est formulée comme suit :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \quad (2-19)$$

Cette relation est valable quel que soit l'ordre tensoriel de la grandeur ψ .

La dérivée particulaire eulérienne d'une grandeur locale intensive comporte deux contributions : une première contribution représentée par la dérivée partielle par rapport au temps. Elle correspond à la variation locale au cours du temps de cette grandeur. Elle est la seule cause de variation de ψ

au point \mathbf{x} si la particule en ce point à l'instant t est immobile. Une seconde contribution représentée par le produit contracté des champs de vitesse de l'écoulement \mathbf{u} et de $\nabla\psi$. C'est un terme de variation spatiale de ψ dû au transport convectif par l'écoulement de cette grandeur. Cette contribution est la seule cause de variation de la grandeur si l'écoulement est stationnaire.

Afin de mieux mettre en évidence cette notion, on se propose de raisonner par rapport à l'accélération de l'écoulement. Ce champ d'accélération est donné en description eulérienne par :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \quad (2-20)$$

Dans cette expression on a :

- La première contribution $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$ représente l'accélération locale au point (x_i, t) due au caractère instationnaire de l'écoulement. C'est l'accélération subie par un « bloc de fluide » où on maintient un champ de vitesse uniforme.
- La seconde contribution $\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}$ représente la variation spatiale de la vitesse de l'écoulement environnant vue par une particule fluide, même si l'écoulement est stationnaire, lorsqu'il est non uniforme. C'est l'accélération par exemple de l'écoulement stationnaire d'un fluide dans un convergent. Une particule fluide allant dans le sens de rétrécissement voit sa vitesse augmenter progressivement.

En développant le second terme représentant l'accélération spatiale dans (2-20) comme suit :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = \nabla \left[\frac{1}{2} u^2 \right] + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \quad (2-21)$$

on pourra écrire l'accélération de l'écoulement sous la forme suivante :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{2} u^2 \right] + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \quad (2-22)$$

2.3.2.2 Dérivée particulière d'une grandeur intégrale extensive : le Théorème de transport

Soit un volume de contrôle Ω choisi arbitrairement dans l'espace. Une grandeur intégrale extensive calculée sur ce domaine peut être exprimée par la forme intégrale conformément à l'équation (2-13).

On considère la configuration Ω_t d'une partie du milieu fluide qui coïncide avec le volume de contrôle Ω à l'instant t . Cette configuration subit au cours de la durée élémentaire dt une transformation infinitésimale pour se transférer à la configuration Ω_{t+dt} comme l'illustre la figure suivante :

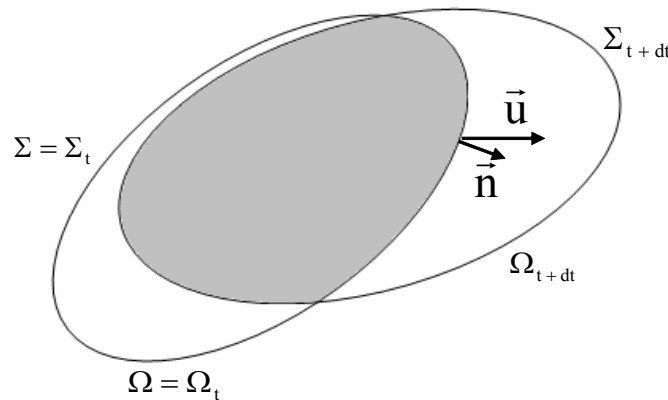


Figure 2 : Deux configurations voisines $\Omega_t = \Omega$ et Ω_{t+dt}

La variation élémentaire de B au cours d'un temps infinitésimal dt est liée à deux facteurs :

- La variation locale au sein de Ω (destruction ou création de B) représentée en tout point de ce volume par une variation locale de la densité b :

$$dB_1 = dt \int_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} d\tau \quad (2-23)$$

- L'échange avec le milieu extérieur à travers la surface Σ . Cet échange correspond au transport convectif de B au cours de la transformation de Ω_t à Ω_{t+dt} :

$$dB_2 = dt \oint_{\Sigma} b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = dt \oint_{\Sigma} (b\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2-24)$$

On en déduit alors la forme générale de la dérivée particulière de la grandeur intégrale B qui s'écrit :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB_1}{dt} + \frac{dB_2}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} (\mathbf{bu}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2-25)$$

Cette relation implique que le taux de variation de B est égal au taux d'accumulation à l'intérieur du volume de contrôle Ω ajouté au taux d'échange avec le milieu extérieur à travers la surface Σ .

2.4 Conservation de la masse

2.4.1 Principe de conservation de la masse

Dans le cadre de la physique classique, le principe de conservation de la masse stipule qu'il n'y a ni destruction ni création de la masse.

On note que dans ce cadre les deux concepts : masse et énergie ne sont pas encore unifiés. C'est la célèbre relation d'Einstein $E = mc^2$ qui les a unifiés dans le cadre de la théorie de la relativité (restreinte ou générale).

D'autre part, au niveau d'un milieu fluide (ou continu en général), l'hypothèse de continuité vérifiée dans ce milieu (voir paragraphe 1.4.1) vérifiée dans ces milieux impliquent que les particules fluides qui forment à l'instant initial un ensemble continu forment encore à tout instant un ensemble continu. Il en résulte que les particules qui se trouvent à l'instant initial dans une surface matérielle fermée continuent à être piégées dans la surface transformée à tout instant. On note par surface matérielle une surface constituée par les mêmes particules matérielles au cours du temps. On déduit alors que la masse contenue dans une surface matérielle fermée reste constante au cours du temps.

2.4.2 Forme intégrale de conservation de la masse en description eulérienne

La masse globale contenue dans un volume de contrôle Ω délimitée par la surface Σ montrée sur la figure suivante :

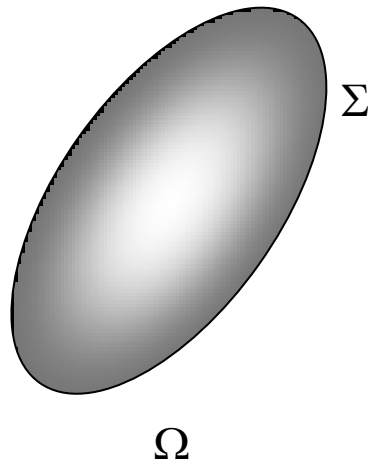


Figure 3 : Volume de contrôle arbitraire

Peut s'exprimer comme suit :

$$M = \int_{\Omega} \rho d\tau \quad (2-26)$$

Où ρ est la masse volumique du milieu fluide. Le principe de conservation de la masse se résume par :

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (2-27)$$

D'après le théorème de transport (2-25), la forme intégrale eulérienne de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (2-28)$$

En description eulérienne, la conservation globale de la masse s'énonce ainsi : Le taux d'accumulation de la masse dans Ω est égal au flux de la masse à travers la surface Σ qui le délimite. Si le fluide est incompressible, le champ de vitesse devient un champ à flux conservatif.

2.4.3 Forme locale de conservation de la masse en description eulérienne : Equation de continuité

En utilisant le théorème de la divergence (appelé également de Green ou d'Ostrogorski), on peut transformer l'intégrale sur la surface Σ qui figure dans (2-28) en une intégrale de volume sur Ω . On obtient alors après avoir sommé les deux intégrales :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\tau = 0 \quad (2-29)$$

La relation écrite ci-dessus est valable quel que soit le volume de contrôle Ω considéré. Elle implique par conséquent que la fonction à l'intérieur de l'intégrale est nulle. On en déduit ainsi la forme locale de conservation de la masse qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2-30)$$

Cette équation peut être réécrite en développant le second membre :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-31)$$

Elle fait apparaître sous cette forme la dérivée particulaire de la masse volumique. Si le fluide est incompressible l'équation locale de conservation de la masse se réduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-32)$$

Cette équation montre que le champ de vitesse est dans ce cas conservatif. Elle exprime qu'un élément du fluide se déforme en écoulement en conservant son volume.

On note à ce niveau qu'un fluide est considéré incompressible lorsque la masse volumique ρ reste constante le long de la trajectoire d'une particule fluide. Ce qui permet de considérer des écoulements de fluides hétérogènes (ex : écoulements stratifiés) comme étant des écoulements de fluides incompressibles.

2.5 Etude graphique de cas d'écoulements

L'étude graphique d'un écoulement se fait en traçant à l'instant t une carte de l'écoulement. Cette carte est représentée à l'aide de courbes caractéristiques outre que les trajectoires des particules fluides. Ces lignes sont : les *lignes de courant* et les *lignes d'émission*. Ces deux familles de courbes peuvent être visualisées et retracées dans certains cas d'écoulements et peuvent mener, rien qu'avec des considérations cinématiques, à établir des propriétés caractéristiques des écoulements étudiés.

2.5.1 Lignes d'émission – Lignes de courant – Tubes de courant

Une ligne d'émission est une courbe qui relie, à un instant donné, l'ensemble des particules fluides qui sont passées à un instant antérieur par un point donné qui s'appelle *le point d'émission*.

Une ligne de courant correspond à une ligne du champ de vitesse de l'écoulement dans un volume de contrôle à un instant donné. C'est une ligne où le vecteur vitesse \mathbf{u} est tangent en tout point comme le montre la figure suivante.

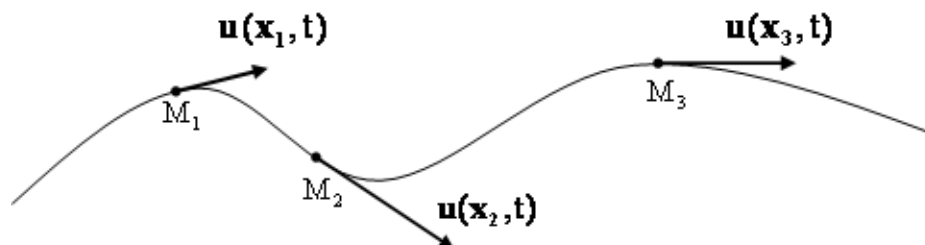


Figure 4 : Ligne de courant

D'un point de vue mathématique, si on considère un déplacement élémentaire $d\mathbf{l} = dl_i \mathbf{e}_i$ sur une ligne de courant, elle sera définie par la relation suivante :

$$\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l} = \vec{0} \quad (2-33)$$

Ce qui implique dans le système des coordonnées cartésiennes la relation suivante :

$$\frac{u_1}{dx_1} = \frac{u_2}{dx_2} = \frac{u_3}{dx_3} \quad (2-34)$$

Un tube de courant est une surface composée de lignes de courant et qui s'appuie sur un contour fermé.

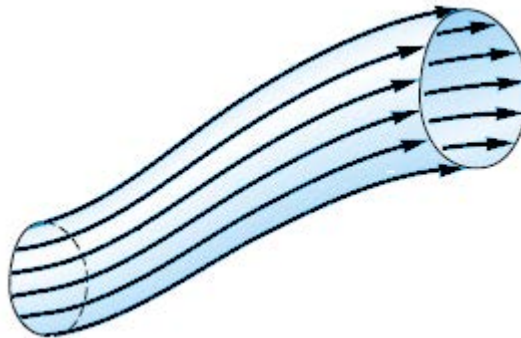


Figure 5 : Tube de courant

Le vecteur vitesse de l'écoulement y est tangent en tout point. Il en résulte que le fluide ne traverse pas la paroi d'un tube de courant, et donc le débit qui traverse une section droite d'un tube de courant reste constant.

En revenant sur la famille des trajectoires, chaque particule fluide que l'on suit dans son mouvement (description lagrangienne) décrit une trajectoire qu'on détermine en résolvant l'équation suivante :

$$dt = \frac{u_1}{dx_1} = \frac{u_2}{dx_2} = \frac{u_3}{dx_3} \quad (2-35)$$

On note d'après les deux relations (2-34) et (2-35) qu'en régime stationnaire les trajectoires des particules fluides, les lignes de courant et les lignes d'émission sont confondues. Elles constituent un réseau de courbes constant au cours du temps. Cependant, en régime instationnaire, les lignes de courant et d'émission évoluent au cours du temps et ne coïncident pas entre elles ni avec les trajectoires des particules.

2.5.2 Visualisation expérimentale

Une ligne d'émission relative à un point peut être visualisée en injectant de façon continue un colorant en ce point. Le filet de colorant qui évoluera dans l'écoulement est matérialisé par les particules fluides qui sont passées à un instant antérieur par le point d'injection. Si l'écoulement est

permanent, la ligne observée caractérise également une trajectoire des particules et une ligne de courant qui sont confondues.

Une visualisation des trajectoires des particules fluides peut être réalisée en introduisant dans le fluide des particules réfléchissantes. Une prise de photo de l'écoulement avec un temps de pose assez long permet d'obtenir une image des trajectoires des particules réfléchissantes.

Une ligne de courant peut être visualisée après traitement de deux images successives du domaine d'observation de l'écoulement prises avec un temps de pose très court. Le décalage entre les deux photos montre pour une particule fluorescente donnée la distance parcourue pendant l'intervalle de temps séparant les deux images ainsi que sa direction. Ces informations permettent de restituer toutes les caractéristiques du champ de vitesse de l'écoulement dans le domaine d'observation.

La figure suivante montre l'écoulement instationnaire derrière un cylindre visualisé par des lignes d'émission et des lignes de courant. La première image en haut montre les lignes d'émission matérialisées par l'injection d'un colorant fluorescent sur le cylindre et des lignes de courant représentées par les lignes fin tracées suite au passage de particules réfléchissantes. La seconde image en bas montre les lignes d'émission extraites et les lignes de courant reconstruites*.

On voit bien sur ces images que les lignes d'émission et de courant ne sont pas confondues à cause de l'instationnarité de l'écoulement.



Figure 6 : Ecoulement instationnaire derrière un cylindre *

^(*) Hydrodynamique Physique, Marc Fermigier, ESPCI – ParisTech, Laboratoire d'Hydrodynamique et de Mécanique Physique

2.5.3 Fonction courant en écoulement incompressible bidimensionnel

Nous avons vu que le champ de vitesse de l'écoulement d'un fluide incompressible est à flux conservatif (équation (2-32) : $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) . D'un point de vue mathématique, on peut définir un champ vectoriel \mathbf{A} tel que l'on ait :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (2-36)$$

Cette relation s'écrit à l'aide du pseudo-tenseur d'orientation θ sous sa forme indicelle suivante :

$$u_i = \theta_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (2-37)$$

\mathbf{A} correspond à un potentiel vectoriel.

Si l'écoulement est bidimensionnel évoluant dans le plan (x_1, x_2) , ceci implique les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0 \quad ; \quad u_3 = 0 \quad (2-38)$$

D'où, l'équation (2-37) se réduit à :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \\ u_2 = -\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2-39)$$

On définit ainsi un potentiel scalaire $\Psi = \Psi(x_1, x_2) = A_3$ appelé *fonction courant* permettant de déduire le champ de vitesse bidimensionnel :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ u_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2-40)$$

L'équation de continuité s'écrit dans ce cas :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2-41)$$

D'où on déduit la relation suivante vérifiée par Ψ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (2-42)$$

Ψ est alors une différentielle totale exacte. Son différentiel admet une primitive unique et on a :

$$\int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A \quad (2-43)$$

indépendamment du chemin suivi entre les points A et B.

D'autre part, les courbes définies par la relation : $\Psi = \text{cte}$ correspondent aux lignes de courant. En effet, dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} d\Psi &= 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 &= 0 \\ u_1 dx_2 - u_2 dx_1 &= 0 \\ \frac{u_1}{dx_1} &= \frac{u_2}{dx_2} \end{aligned} \quad (2-44)$$

On a également le débit unitaire (ou par unité de longueur selon la direction x_3) du fluide entre deux lignes de courant $\Psi = c_1$ et $\Psi = c_2$ est égal à la différence :

$$\Delta\Psi = c_2 - c_1 \quad (2-45)$$

En effet, ce débit est donné par :

$$Q = \int_M^N (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dl \quad (2-46)$$

Où \mathbf{n} est un vecteur unitaire normal à la section MN comme le montre la figure suivante :

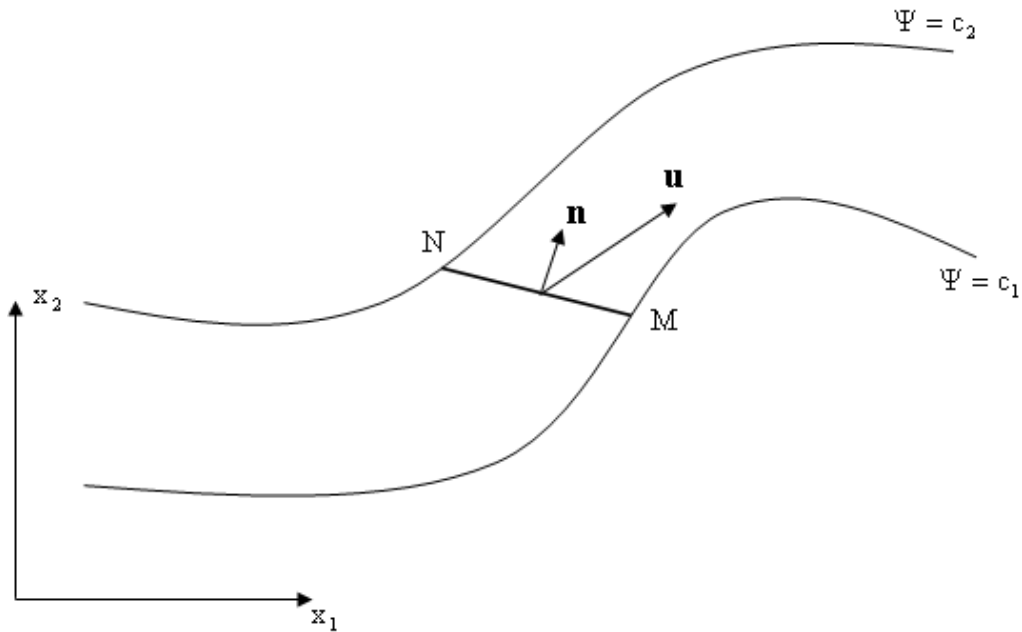


Figure 7 : Ecoulement entre deux lignes de courant

Pour un déplacement élémentaire tangent $d\mathbf{l} = dx_1\mathbf{e}_1 + dx_2\mathbf{e}_2$ à la section MN, le vecteur $\mathbf{n} dl$ sera donné par :

$$\mathbf{n}dl = dx_1\mathbf{e}_1 - dx_2\mathbf{e}_2 \quad (2-47)$$

Et le débit est égal à :

$$\begin{aligned} Q &= \int_M^N u_1 dx_1 - u_2 dx_2 \\ &= \int_M^N \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 \\ &= \int_M^N d\Psi \\ &= c_2 - c_1 \end{aligned} \quad (2-48)$$

Chapitre 3 : Equations de bilans

3.1 Introduction

3.2 Force à distance – Force de contact – Tenseur des contraintes

3.2.1 Force à distance – Force de contact

3.2.2 Tenseur des contraintes

3.3 Conservation de la quantité de mouvement

3.3.1 Enoncé

3.3.2 Forme globale

3.3.3 Forme locale

3.4 Conservation du moment cinétique

3.4.1 Enoncé

3.4.2 Forme globale

3.4.3 Forme locale : symétrie du tenseur des contraintes

3.5 Conservation de l'énergie

3.5.1 Energie – Travail des forces – Chaleur

3.5.2 Premier principe de la thermodynamique : Equations globales et locales de conservation de l'énergie

3.5.3 Equation de bilan locale de l'énergie cinétique

3.5.4 Equation de bilan de l'énergie interne

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la description du comportement dynamique des fluides en tenant compte des causes régissant ce comportement. Nous avons vu au chapitre 2 comment décrire un milieu fluide dans son mouvement en adoptant une description lagrangienne ou eulérienne. Nous avons vu également que la description eulérienne est la plus adaptée aux applications pratiques.

On se propose dans ce chapitre de récapituler les équations de conservation vérifiées par un milieu fluide dans son mouvement. Ces équations ne seront autres qu'une reformulation des lois universelles fondamentales de la mécanique classique. Il s'agit essentiellement des lois de conservation de quantité de mouvement, de moment cinétique et de l'énergie qui seront exprimées dans le cadre de la description eulérienne et en termes des variables eulériennes.

Ces équations font le point sur des bilans globaux des grandeurs physiques extensives caractéristiques du milieu fluide. Ces bilans seront définis comme des intégrales sur un volume de contrôle arbitraire. L'application du théorème de la divergence permet d'en déduire des bilans locaux de ces grandeurs qui constitueront les équations locales régissant le comportement thermodynamique des milieux fluides.

Dans le paragraphe suivant nous nous proposons de définir la classification adoptée en mécanique des fluides des forces mises en jeu dans les écoulements. Nous introduisons également le tenseur des contraintes caractéristique des forces de contact. Dans les troisième, quatrième et cinquième paragraphes nous établissons les équations de conservation respectivement de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie avec ses deux contributions : énergie cinétique et énergie interne.

3.2 Force à distance – Force de contact – Tenseur des contraintes

3.2.1 Force à distance – Force de contact

Avant d'établir les équations de bilans de quantité de mouvement et d'énergie pour un fluide, il est nécessaire de décrire les différents types de forces qui peuvent agir sur ces milieux.

Nous connaissons en physique qu'il existe dans la nature quatre types de forces : les interactions gravitationnelles – les interactions électromagnétiques – les interactions faibles et les interactions fortes, et que l'un des défis majeurs des physiciens consiste à l'unification de ces quatre forces. Cependant, pour la mécanique des milieux continus, et en raison du spectre des échelles caractéristiques d'observation de la matière considérées, une autre classification des forces agissant sur ces milieux est adoptée. Les forces sont classées selon leur portée en deux catégories.

La force de gravité, qui s'exerce sur des distances extrêmement grandes par rapport aux dimensions moléculaires, agit en tout point du milieu continu et, de ce fait, la force de gravité agissant sur un élément de volume est proportionnelle à son volume. Cette force est dite en mécanique des milieux continus *force à distance* ou *force de volume*.

Les interactions intermoléculaires qui assurent la cohésion de la matière, bien qu'elles soient d'origine électromagnétique, ont une portée à peine plus grande que les dimensions moléculaires et par conséquent pour un élément de volume ces interactions ne vont concerner qu'une mince couche externe de matière qui l'enveloppe. La force globale exercée par ces interactions à courte portée est proportionnelle à l'aire de la surface délimitant cet élément de volume indépendamment de son volume. Elle est appelée en mécanique des milieux continus *force de contact* ou *force de surface*.

Les interactions faibles et fortes, qui agissent sur des distances extrêmement faibles par rapport aux dimensions moléculaires (échelle de longueur nucléaire), restent invisibles à l'échelle d'observation de la mécanique des milieux continus.

3.2.2 Tenseur des contraintes

On considère en un point M du domaine D le repère orthonormé direct $(M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Soit le volume élémentaire du domaine D délimité par un trièdre droit $(M P_1 P_2 P_3)$ de sommet principal M et d'arrêtes les axes du repère comme le montre la figure 5.1 ci-dessous. On note également \mathbf{n} le vecteur normal à la surface du triangle $(P_1 P_2 P_3)$.

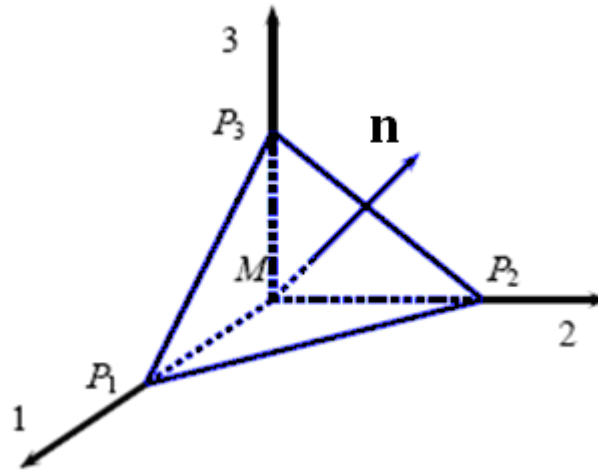


Figure 1 : Volume élémentaire de forme triédrique

La force de contact exercée par le reste du milieu continu sur ce volume est proportionnelle à l'aire de sa surface. Si on note $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ la densité surfacique de cette force à la surface plane de vecteur normal \mathbf{n} , la résultante des forces de contact sera donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A + \mathbf{T}(-\mathbf{e}_i)\delta A_i \quad (3-1)$$

où δA et δA_i représentent les surfaces des faces du trièdre. Les signes „-“, qui apparaissent devant les vecteurs \mathbf{e}_i proviennent du fait qu'il faut considérer les vecteurs normaux aux surfaces du trièdre dirigés vers l'extérieur. D'après le principe de l'action et de la réaction, la relation (3-1) peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A - \mathbf{T}(\mathbf{e}_i)\delta A_i \quad (3-2)$$

si on considère de plus les surfaces δA_i comme des projections de δA :

$$\delta A_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \delta A \quad (3-3)$$

on aura alors :

$$\mathbf{F}_c = [\mathbf{T}(\mathbf{n}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{T}(\mathbf{e}_i)]\delta A \quad (3-4)$$

en faisant tendre les dimensions linéaires du trièdre vers 0, son inertie ainsi que la force de volume à laquelle il est soumis deviennent nulles. Pour que la loi fondamentale de la dynamique appliquée à ce trièdre soit respectée, il faut que la force de contact \mathbf{F}_c soit nulle. D'où on tire la relation :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{T}(\mathbf{e}_i) \quad (3-5)$$

ou autrement exprimé :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{e}_i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i)] \quad (3-6)$$

L'équation (3-6) peut s'écrire également :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (4-7)$$

Où $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur du second ordre dont la contraction avec un vecteur unitaire \mathbf{n} représente la densité surfacique des efforts de contact exercés sur la surface orthogonale à \mathbf{n} . Ce tenseur est appelé *tenseur des contraintes*. En introduisant le champ scalaire de pression p , ce tenseur, qu'on démontre qu'il est symétrique (voir paragraphe 3.4.3), peut être décomposé en la somme d'un tenseur sphérique associé à la pression et d'un tenseur symétrique non isotrope $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3-8)$$

La première contribution (sphérique) appelée *tenseur des contraintes de pression* représente les efforts exercés orthogonalement à cette surface (ou efforts de pression) et qui subsistent même en absence d'écoulement. Tandis que la seconde contribution est appelée *tenseur des contraintes de cisaillement* et représente les efforts tangentiels à cette surface dus aux effets visqueux qui se produisent au sein du fluide.

3.3 Conservation de la quantité de mouvement

3.3.1 Enoncé :

Si on considère un volume de contrôle D_C délimité par une surface Σ_C et un repère $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

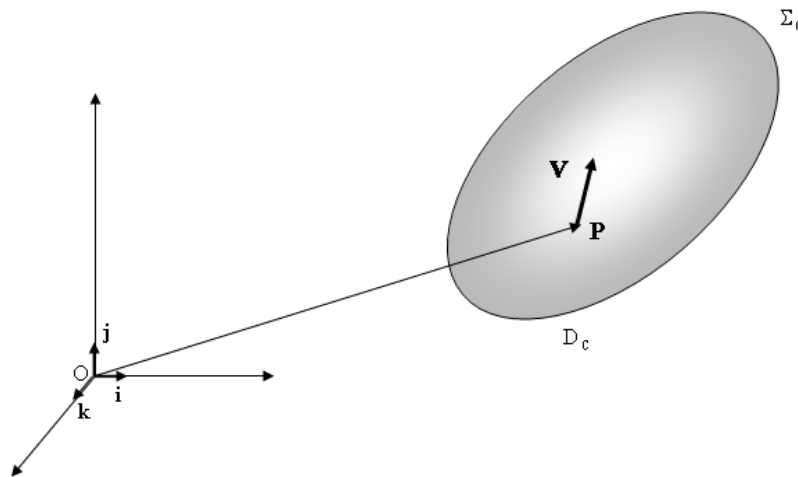


Figure 2 : Volume de contrôle arbitraire

La quantité de mouvement totale contenue dans le volume de contrôle D_C est donnée par l'intégrale suivante :

$$\mathbf{M} = \int_{D_C} \rho \mathbf{v} d\tau \quad (3-9)$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement n'est autre que la loi de Newton qui s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3-10)$$

où \mathbf{F}_{ext} est la résultante des forces extérieures exercées sur le volume D_C . Ce principe stipule que toute variation de la quantité de mouvement \mathbf{M} est due à l'action d'une force appliquée par le milieu extérieur et réciproquement.

3.3.2 Forme globale :

La force totale exercée sur le volume D_C est la somme des contributions des forces à distance (ou volumiques) qui s'exercent en tout point du domaine et qui peuvent être représentées par une intégrale de volume et des forces de contact (ou surfaciques) représentées par une intégrale de surface correspondant au flux du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ à travers Σ_C .

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-11)$$

\mathbf{f} étant la densité massique de la force à distance, elle coïncide avec l'accélération de pesanteur \mathbf{g} si le repère R est galiléen lié à la terre.

Le développement de l'équation (3-10), compte tenu des équations (3-9) et (3-11), permet d'établir la forme intégrale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\int_{D_C} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-12)$$

Compte tenu de la décomposition (3-8) du tenseur des contraintes, ce bilan global de quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_{D_C} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau - \int_{\Sigma_C} p \mathbf{n} \, ds + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-13)$$

Les deux derniers termes du second membre de ce bilan global représentent les forces de pression et de cisaillement exercées sur le volume de contrôle D_C à travers sa surface Σ_C .

3.3.3 Forme locale :

En utilisant le théorème de la divergence, l'équation (3-12) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{D_C} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \, d\tau + \int_{D_C} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\tau = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau + \int_{D_C} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\tau \quad (3-14)$$

Et ceci est vrai quelque soit le domaine D_c . On peut en déduire alors facilement la forme locale suivante de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3-15)$$

qui s'écrit également en utilisant la décomposition (3-8) du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-16)$$

Cette équation traduit la conservation de quantité de mouvement dans un volume élémentaire centré sur un point de l'écoulement. Le développement du premier membre de cette équation permet de la réécrire sous la forme suivante :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-17)$$

On rappelle l'équation locale de conservation de la masse (2-28) établie dans le chapitre précédent qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3-18)$$

Et par suite l'équation (3-17) se réduit à :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-19)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3-20)$$

3.4 Conservation du moment cinétique

3.4.1 Enoncé :

Le moment cinétique stocké dans un volume de contrôle D_C par rapport à un point A fixe est donné par l'expression suivante :

$$\Gamma_A = \int_{D_C} \mathbf{AP} \wedge (\rho \mathbf{v}) d\tau \quad (3-21)$$

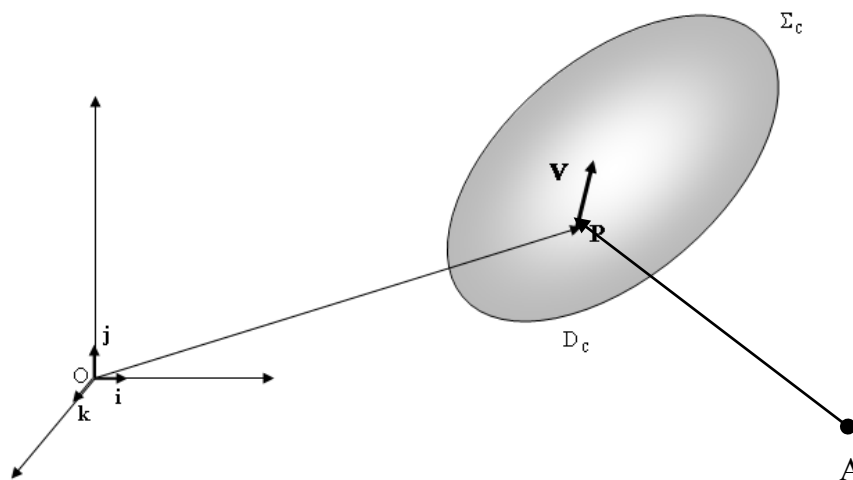


Figure 3 : Moment cinétique calculé par rapport à un point A

Le principe de conservation du moment cinétique stipule que toute variation du moment cinétique Γ_A par rapport au point A est due à l'action du moment d'une force extérieure exercée sur D_C et réciproquement. Il s'écrit :

$$\frac{d\Gamma_A}{dt} = \mathbf{Moment}_A(\mathbf{F}_{ext}) \quad (3-22)$$

3.4.2 Forme globale :

Le moment total des forces exercées sur le domaine D_C par rapport au point A, compte tenue de leur expression (3-11), est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{Moment}_A(\mathbf{F}_{ext}) = \int_{D_c} \mathbf{AP} \wedge (\rho \mathbf{f}) d\tau + \int_{\Sigma_c} \mathbf{AP} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3-23)$$

La dérivée matérielle du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\Gamma_A}{dt} = \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v})] d\tau + \int_{\Sigma_c} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} dS \quad (3-24)$$

On déduit alors la forme globale de conservation de moment cinétique :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v})] d\tau + \int_{\Sigma_c} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} dS = \int_{D_c} \mathbf{AP} \wedge (\rho \mathbf{f}) d\tau + \int_{\Sigma_c} \mathbf{AP} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3-25)$$

3.4.3 Forme locale : symétrie du tenseur des contraintes

En utilisant le pseudo-tenseur d'orientation $\boldsymbol{\varepsilon}$, l'équation globale de conservation du moment cinétique (3-25) s'écrit encore sous la forme indicielle suivante :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k)] d\tau + \int_{\Sigma_c} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l)] \mathbf{n}_l dS = \int_{D_c} \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) d\tau + \int_{\Sigma_c} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \mathbf{n}_l dS \quad (3-26)$$

Le théorème de la divergence permet de réécrire (3-26) comme suit :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k)] d\tau + \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial X_l} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l)] d\tau = \int_{D_c} \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) d\tau + \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial X_l} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) d\tau \quad (3-27)$$

d'où on déduit l'expression locale de l'équation de conservation de moment cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k)] + \frac{\partial}{\partial X_l} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l)] = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) + \frac{\partial}{\partial X_l} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \quad (3-28)$$

Qui s'écrit encore :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_k) + \frac{\partial}{\partial X_l} (\rho \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l) \right] = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) + \frac{\partial}{\partial X_l} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \quad (3-29)$$

D'après l'équation (3-15) de conservation de quantité de mouvement on aura :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \left[\rho \mathbf{f}_k + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}}{\partial X_l} \right] = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) + \frac{\partial}{\partial X_l} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \quad (3-30)$$

Soit après simplification :

$$\varepsilon_{ijk} \mathbf{x}_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} \mathbf{x}_j \sigma_{kl}) \quad (3-31)$$

Cette équation se réduit encore à :

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} = 0 \quad (3-32)$$

Ce qui implique que les éléments du tenseur des contraintes vérifient la propriété :

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \quad \text{lorsque } k \neq l \quad (3-33)$$

On déduit alors d'après cette relation que le tenseur des contraintes est symétrique.

3.5 Conservation de l'énergie

3.5.1 Energie – Travail des forces – Chaleur

Outre la matière et la quantité de mouvement, un milieu fluide est susceptible d'échanger de l'énergie au cours de son écoulement avec le milieu extérieur. Cette grandeur extensive de dimension ML^2T^{-2} se manifeste à l'échelle macroscopique sous plusieurs formes telles que : la chaleur, le travail mécanique (de forces), l'énergie cinétique ou l'énergie électrique. Selon le premier principe de la thermodynamique, qui est un principe de conservation, l'énergie totale d'un système fluide est conservée au cours de sa transformation mais elle change de forme.

On se propose dans ce paragraphe de traduire, dans le cadre de la description eulérienne et en termes des variables d'Euler, les principes de la thermodynamique régissant l'écoulement d'un fluide.

3.5.2 Premier principe de la thermodynamique : Equations globales et locales de conservation de l'énergie

3.5.2.1 Enoncé

Considérons comme les cas précédents un volume de contrôle D_c délimité par une surface Σ_c :

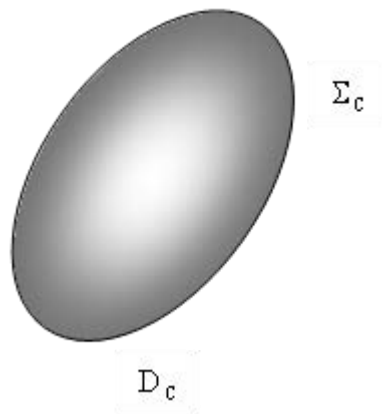


Figure 4 : Volume de contrôle arbitraire

L'énergie contenue dans ce volume de contrôle est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne. Elle peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$E = E_c + E_I = \int_{D_c} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) d\tau \quad (3-34)$$

où $\frac{v^2}{2}$ est la densité massique de l'énergie cinétique et e est la densité massique de l'énergie interne. On note que cette expression de l'énergie est valable à l'échelle macroscopique. En effet, à l'échelle microscopique le stockage de l'énergie interne dans D_c est effectué en la distribuant sous forme d'énergie cinétique d'agitation sur les molécules présentes dans ce milieu.

Le premier principe de la thermodynamique correspond au principe de conservation de l'énergie. Il énonce que la variation de l'énergie totale E de D_c entre deux instants est égale à la somme du travail et de la chaleur échangés avec le milieu extérieur par le billet des forces extérieures exercées

sur le domaine et des mécanismes de transfert de chaleur (conduction – rayonnement – convection). Le principe peut être exprimé en termes de puissances par l'équation suivante :

$$\frac{dE}{dt} = P_{F_{ext}} + P_{cal} \quad (3-35)$$

Où $P_{F_{ext}} = \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{v}$ est la puissance des forces extérieures et $P_{cal} = \frac{dQ}{dt}$ est la puissance calorifique.

3.5.2.2 Forme globale

Compte tenu de l'expression (3-11) de la force extérieure, la puissance $P_{F_{ext}}$ de cette force est donnée par la relation :

$$P_{F_{ext}} = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \quad (3-36)$$

la symétrie du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (voir paragraphe 3.4.3) permet de réécrire (3-36) ainsi :

$$P_{F_{ext}} = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-37)$$

En ce qui concerne la puissance calorifique, il existe trois mécanismes d'échange de chaleur :

- Les échanges par conduction : Ces échanges résultent du transfert de chaleur par diffusion moléculaire. Ils s'effectuent avec le milieu extérieur à travers la surface Σ_C . Ils sont représentés par le flux d'un vecteur \mathbf{q} à travers Σ_C appelé « le vecteur courant de chaleur ». La puissance calorifique échangée par conduction s'écrit :

$$\frac{dQ_C}{dt} = - \int_{\Sigma_C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-38)$$

- Les échanges par rayonnement : Se sont des échanges à distance résultant du transfert de chaleur par ondes électromagnétiques. La puissance calorifique échangée par rayonnement peut être représentée par une intégrale de volume comme suit :

$$\frac{dQ_R}{dt} = \int_{D_C} \rho r \, d\tau \quad (3-39)$$

où r est la quantité de chaleur échangée par rayonnement avec le milieu extérieur par unité de temps et par unité de masse.

- Les échanges par convection : Ils résultent du transfert convectif de la chaleur par l'écoulement fluide. Ces échanges sont représentés par le terme convectif de la dérivée particulaire de l'énergie totale E .

La dérivée particulaire de l'énergie totale E s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] d\tau + \int_{\Sigma_c} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (3-40)$$

Le bilan global (3-35) de l'énergie sur le volume de contrôle D_c s'écrit compte tenu des équations (3-36) à (3-40) comme suit :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] d\tau + \int_{\Sigma_c} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{D_c} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{\Sigma_c} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Sigma_c} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{D_c} \rho r d\tau \quad (3-41)$$

3.5.2.3 Forme locale

Le bilan global de l'énergie (3-41) s'écrit en utilisant le théorème de la divergence sous la forme suivante :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] d\tau + \int_{D_c} \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \right] d\tau = \int_{D_c} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{D_c} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) d\tau - \int_{D_c} \nabla \cdot \mathbf{q} d\tau + \int_{D_c} \rho r d\tau \quad (3-42)$$

Et ceci est vrai quelque soit le volume de contrôle D_c . On en déduit alors la forme locale de conservation de l'énergie totale qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (3-43)$$

Cette équation traduit le premier principe de la thermodynamique écrit localement pour un système thermodynamique constitué par un fluide en écoulement et dont le mouvement est décrit d'une manière eulérienne.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) v_j \right] = \rho f_j v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{jk} v_k) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho r \quad (3-44)$$

3.5.3 Equation de bilan locale de l'énergie cinétique

La projection du bilan local de quantité de mouvement (3-15) sur la vitesse nous donne :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \quad (3-45)$$

D'une part, le premier membre de ce bilan peut s'écrire dans le cas d'un fluide incompressible :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (e_c) + \nabla \cdot (e_c \mathbf{v}) \quad (3-46)$$

On note dans cette équation que la quantité $e_c = \rho \frac{v^2}{2}$ représente la densité volumique de l'énergie cinétique.

D'autre part, le dernier terme du second membre de l'équation (3-45) « $(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}$ » peut être développé pour donner :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-47)$$

Ce terme s'écrit également compte tenu de l'équation locale (2-30) de conservation de la masse dans le cas incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ établie dans le chapitre 2 (voir paragraphe 2.4.3) :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-48)$$

On déduit alors le bilan local de l'énergie cinétique qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_c) + \nabla \cdot (e_c \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-49)$$

Interprétons ce bilan à l'échelle d'un volume élémentaire de contrôle centré sur un point M de l'écoulement :

- Le premier terme du second membre représente la puissance des forces extérieures à distance.
- Le second est un terme de divergence, il correspond à un flux à travers la surface de ce volume élémentaire et représente alors la puissance des forces de contact.
- Le dernier terme qui montre une double contraction entre le tenseur des contraintes de cisaillement et le gradient de vitesse représente la puissance des efforts intérieurs.

En résumé, le bilan de l'énergie cinétique met en jeu la puissance des efforts extérieurs (à distance et de contact) et des efforts intérieurs.

3.5.4 Equation de bilan de l'énergie interne

En retranchant le bilan de l'énergie cinétique (3-49) du bilan de l'énergie totale (3-43), on obtient le bilan de l'énergie interne qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-50)$$

La puissance des efforts intérieurs qui figure dans les deux bilans (3-49) et (3-50) joue alors un rôle d'échange d'énergie entre le montant de l'énergie interne et le montant de l'énergie cinétique sans intervenir dans le montant de l'énergie totale.

Chapitre 4 : Dynamique des fluides Newtoniens

4.1 Introduction

4.2 Position du problème - Démarche de fermeture

4.3 Lois constitutives pour un fluide Newtonien

4.3.1 Loi constitutive de fermeture du tenseur des taux de cisaillement τ déduite de la rhéologie

4.3.2 Loi constitutive de fermeture du vecteur courant de chaleur q : loi de Fourier

4.3.3 Loi constitutive de fermeture de l'énergie interne déduite de la thermodynamique

4.4 Récapitulation : le système final des équations d'un milieu fluide

4.4.2 Problème hydrodynamique : Les équations de Navier-Stokes

4.4.3 Problème thermique : L'équation de la chaleur

4.5 Exemples de solutions exactes des équations de Navier-Stokes

4.5.1 Ecoulement de couette

4.5.2 Ecoulement à surface libre sur un plan incliné

4.5.3 Ecoulement visqueux dans une conduite cylindrique : écoulement de Poiseuille

4.5.4 Domaine de validité de la structure de l'écoulement de Poiseuille

4.6 Ecoulement dans un milieu poreux

4.6.1 Equation de Laplace pour la pression

4.6.2 Loi de Darcy

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on focalise l'étude sur les fluides dits « classiques » ou « newtoniens ». C'est le cas de la majorité des fluides d'usage courant tels que l'eau, l'air ou l'huile. Ces fluides sont caractérisés par des comportements rhéologique et thermique particuliers. En effet, le tenseur des taux de cisaillement (décrivant les contraintes de cisaillement tangentielles) et le vecteur courant de chaleur s'expriment linéairement respectivement en fonction du tenseur des taux de déformations (caractérisant la vitesse de déformation) et du vecteur gradient de la température. Les équations locales décrivant la dynamique de ces fluides sont appelées les équations de Navier-Stokes.

4.2 Position du problème - Démarche de fermeture

En pratique, l'écoulement d'un milieu fluide susceptible d'effectuer des échanges thermiques avec le milieu extérieur est totalement décrit par la donnée des champs eulériens des variables hydrodynamiques : La vitesse \mathbf{v} et la pression p , ainsi que le champ de la température T .

La description eulérienne de ces grandeurs est obtenue par l'intégration des équations locales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie établies dans les chapitres précédents (dans le domaine de l'écoulement et en tenant compte des conditions aux limites correspondantes). On récapitule ces équations comme suit :

- Conservation de la masse (équation (2-28) ; Chapitre 2) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4-1)$$

- Conservation de la quantité de mouvement (équation (3-19) ; Chapitre 3) :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (4-2)$$

- Conservation de l'énergie (équation (3-43) ; Chapitre 3) :

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (4-3)$$

- Bilan de l'énergie cinétique (équation (3-49) ; Chapitre 3) :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e_c = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad e_c = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (4-4)$$

- Bilan de l'énergie interne (équation (3-50) ; Chapitre 3) :

$$\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (4-5)$$

Dans ce système d'équations, le bilan de l'énergie cinétique (4-4) est déduit à partir de celui de quantité de mouvement (4-2). D'autre part le bilan (4-5) de l'énergie interne n'est autre que la différence entre (4-3) et (4-4). Ce système est par conséquent formé par 3 équations indépendantes qu'on peut choisir par exemple (4-1) ; (4-2) et (4-5).

Le problème ainsi formulé reste ouvert : il contient plus d'inconnues que d'équations. En effet, une comptabilisation des inconnues mises en jeu montre que l'on ait 9 inconnues répertoriées comme suit :

- Vitesse : \mathbf{v}
- Pression : p
- Température : T
- Masse volumique : ρ
- Densité massique des forces à distance : \mathbf{f}
- Densité massique de la puissance calorifique rayonnée : r
- Tenseur des taux de cisaillement : $\boldsymbol{\tau}$
- Vecteur courant de chaleur : \mathbf{q}
- Densité massique de l'énergie interne : e

Si on désire maintenir la vitesse \mathbf{v} , la pression p et la température T comme inconnues principales, on serait amené à fermer ce système par l'introduction de 6 équations complémentaires (en nombre égal aux inconnues restant). Comme ce système est valable pour des milieux fluides de natures très différentes, les équations complémentaires qu'on doit ajouter doivent préciser la constitution particulière de chaque milieu : ce sont *les lois constitutives*.

D'autre part, dans la plupart des cas d'applications, les densités massiques des forces à distance \mathbf{f} et de la puissance calorifique r sont à priori connues (\mathbf{f} s'identifie à l'accélération de pesanteur \mathbf{g} dans un repère Galiléen et r est décrite par la loi de Stéphane).

Ainsi, on retient enfin que les lois constitutives devront exprimer les grandeurs ρ , e , $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{q} en fonction de \mathbf{v} , p et T .

4.3 Lois constitutives pour un fluide Newtonien

4.3.1 Loi constitutive de fermeture du tenseur des taux de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ déduite de la rhéologie : loi de Newton

Du point de vue de la mécanique, la différence entre un fluide réel et un fluide parfait réside dans l'absence dans le cas de fluide parfait de tout effort de cisaillement. Ceci implique que :

- A l'échelle microscopique les particules fluides glissent les unes sur les autres sans frottement entre elles.
- A l'échelle macroscopique les contraintes de contact se réduisent aux contraintes de pression qui s'exercent perpendiculairement à la surface extérieure.

Ce comportement se manifeste particulièrement en présence de parois solides. En effet, aux points de contact entre un fluide parfait en écoulement et une paroi (étanche), seule la composante normale à la paroi de la vitesse de l'écoulement est nulle. Les conditions d'écoulement à la paroi sont alors des conditions de glissement. Cependant, les conditions à la paroi qui régissent l'écoulement d'un fluide réel sont des conditions d'adhérence : la vitesse aux points de contact entre le fluide réel et la paroi est égale à la vitesse de la paroi.

4.3.1.1 Introduction de la viscosité

Si on considère l'expérience suivante : Soit un fluide enfermé entre deux plaques planes parallèles distantes d'une épaisseur h très inférieure aux dimensions caractéristiques des deux plaques (voir Figure 1).

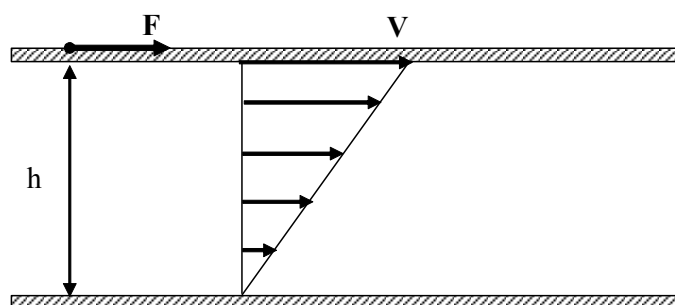


Figure 1 : champ de vitesse entre deux plaques planes parallèles

On se propose de maintenir la plaque supérieure en mouvement de translation uniforme à la vitesse V . Si le fluide était parfait, conformément à ce que nous avons décrit au paragraphe précédent, il suffit d'exercer une impulsion permettant à la plaque d'atteindre la vitesse V , elle gardera cette vitesse en mouvement uniforme. Cependant, dans le cas d'un fluide réel on doit maintenir l'exercice d'une force tangentielle colinéaire à la vitesse V . On remarque également que pour un grand nombre de fluides tels que l'eau, l'huile ou l'alcool, la force exercée par unité de surface $\frac{F}{S}$ est proportionnelle au rapport $\frac{V}{h}$:

$$\frac{F}{S} \propto \frac{V}{h} \quad (4-6)$$

Le rapport $\frac{F}{S}$ est homogène à une densité surfacique de force. Il représente la contrainte de cisaillement exercée sur le fluide. Tandis que le second membre de (4-6) $\frac{V}{h}$ est homogène à l'inverse d'un temps. Il représente le gradient de vitesse de l'écoulement du fluide qui reste sensiblement uniforme sur la faible épaisseur h .

Le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs représente la *viscosité dynamique* du fluide μ . C'est une grandeur physique caractéristique du milieu fluide. Elle est homogène à une « pression x temps » donc de dimension $M L^{-1} T^{-1}$. La viscosité dynamique est une grandeur intensive qui ne dépend que de la température. Elle est exprimée dans le S.I. en Poiseuille :

$$1 \text{ Poiseuille} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (4-7)$$

Ce comportement de proportionnalité correspond à une grande classe de fluides dans la nature dits *fluides Newtoniens*. On définit également pour ces fluides la viscosité cinématique ν obtenue par le rapport de la viscosité dynamique sur la masse volumique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4-8)$$

Le tableau 1 ci-dessous montre les valeurs mesurées de ces grandeurs pour quelques fluides.

Tableau 1 : masse volumique, viscosités dynamique et cinématique pour quelques fluides

Fluides		ρ (kg m^{-3})	μ (Poiseuille)	ν (m^2s^{-1})
Eau (1 atm, 20 °C)		998.2	$1.00 \cdot 10^{-03}$	$1.004 \cdot 10^{-6}$
Eau de mer (1 atm, 15 °C)		1025.0	$1.23 \cdot 10^{-03}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$
Mercure (1 atm, 15 °C)		13555.0	$1.49 \cdot 10^{-03}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
Alcool éthylène (96% dans l'eau)		788.6	$1.18 \cdot 10^{-03}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$
Glycérine (1 atm, 20°C)		1257.6	1.51	$1.2 \cdot 10^{-3}$
Air	-20 °C	1,58E-05	$1.58 \cdot 10^{-05}$	$1.13 \cdot 10^{-5}$
	0 °C	1,70E-05	$1.70 \cdot 10^{-05}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$
	20 °C	1,80E-05	$1.80 \cdot 10^{-05}$	$1.49 \cdot 10^{-5}$
	60 °C	2,04E-05	$2.04 \cdot 10^{-05}$	$1.92 \cdot 10^{-5}$

On note qu'il existe également dans la nature des fluides dit fluides *non Newtoniens* qui ne réagissent pas dans l'expérience précédente de la même manière. En effet, la contrainte de cisaillement $\frac{F}{S}$ qu'on doit maintenir appliquée pour ces fluides n'est pas proportionnelle aux taux de déformation $\frac{V}{h}$. Deux comportements sont observés expérimentalement selon la nature du fluide utilisé : Il existe des fluides (tels que les solutions de polymères) qui montrent une résistance importante aux faibles vitesses de déplacement de la plaque. Au fur et à mesure que la vitesse augmente ils deviennent plus "fluides". Un tel comportement s'appelle *rhéofluidifiant*. On observe au contraire pour d'autres fluides une faible résistance pour les petites vitesses de la plaque, mais qui deviennent assez rigides pour les fortes vitesses.

En termes de viscosité, les fluides non Newtoniens peuvent être interprétés comme des fluides à viscosité variables en fonction du taux de déformation. L'interprétation d'un tel comportement vis-à-vis de la constitution atomique de ces milieux constitue la discipline appelée *rhéologie*. On définit le rhéogramme qui est un diagramme où on représente les variations des composantes du tenseur des taux de cisaillement τ_{ij} en fonction de celles du tenseur des taux de déformations D_{ij} . La figure suivante montre schématiquement les rhéogrammes relatifs aux trois types de fluides décrits ci-dessus

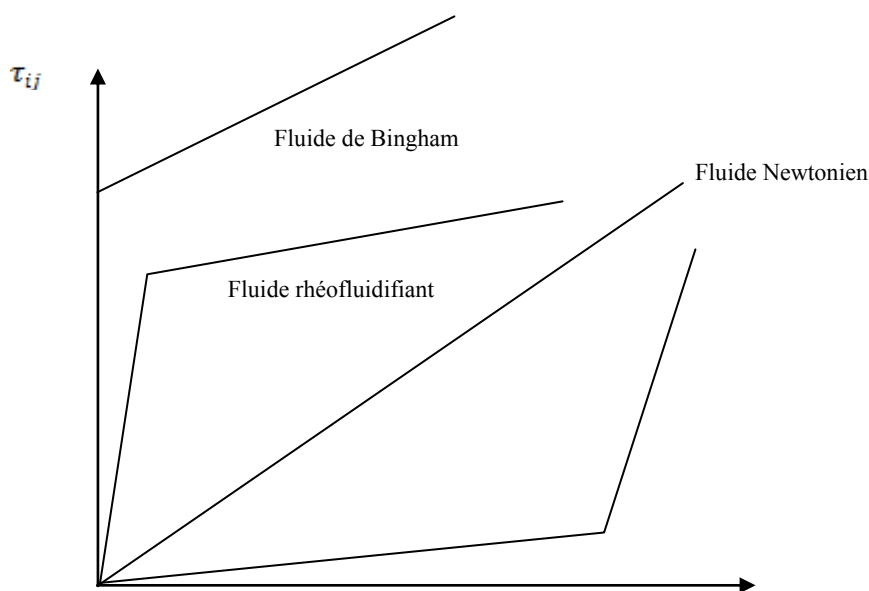


Figure 2 : Rhéogrammes de différents types de fluides non Newtoniens

4.3.1.2 Loi de comportement rhéologique d'un fluide Newtonien

Le tenseur des taux de cisaillement dans un fluide Newtonien est exprimé en fonction du tenseur des taux de déformation \mathbf{D} par la loi de comportement linéaire de Newton qui s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \quad (4.9)$$

μ est la viscosité dynamique et μ_v est la viscosité volumique ou deuxième viscosité rencontrée dans le cas des fluides compressibles. Compte tenu de l'équation de conservation de la masse, cette loi de comportement se réduit dans le cas de fluide incompressible à l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} \quad (4.10)$$

Les éléments de ce tenseur $\boldsymbol{\tau}$ s'expriment ainsi en fonction du gradient de vitesse comme suit :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.11)$$

4.3.2 Loi constitutive de fermeture du vecteur courant de chaleur \mathbf{q} : loi de Fourier

De même pour un fluide Newtonien, le vecteur courant de chaleur \mathbf{q} est exprimé en fonction du gradient de température ∇T par une loi de comportement linéaire donnée par :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (4.12)$$

Où le coefficient λ est la conductivité thermique du fluide. C'est une propriété caractéristique du milieu fluide qui ne dépend que de la température. Elle est de dimension $MT^{-3}(\text{°K})^{-1}$ et donc

homogène à « $\frac{\text{Puissance}}{\text{Longueur} \times \text{Température}}$ ». On remarque enfin que le signe "-" qui apparaît dans

(4-12) traduit le fait que le flux de chaleur s'oriente spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides dans un milieu.

Le tableau suivant montre des valeurs de cette grandeur à 20 °C pour quelques matériaux

Tableau 2 : valeurs de la conductivité thermique mesurée à 20 °C pour quelques matériaux

Matériau	λ à 20 °C (W m ⁻¹ °K ⁻¹)
Eau	0.6
Air sec immobile (P = 1 atm)	0.0262
Cuivre	390
Béton	0.92
Laine de verre	0.04
Liège	0.04

4.3.3 Loi constitutive de fermeture de l'énergie interne déduite de la thermodynamique

On se restreint dans notre développement au cas des fluides incompressibles. La masse volumique ρ reste dans ce cas constante le long de la trajectoire d'une particule fluide. Nous admettons également l'hypothèse de l'état local, ce qui consiste à supposer que toute particule fluide passe par des états d'équilibre intermédiaires au cours de son évolution. Cette hypothèse permet d'exprimer la dérivée particulaire de la densité massique de l'énergie totale "e" en fonction de celle de la densité massique de l'entropie "s" à l'aide de la relation de Gibbs comme suit :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} - \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (4-13)$$

comme le fluide est incompressible, cette relation se réduit à :

$$de = \left(\frac{ds}{dt} T\right) dT = C_v(T) dT \quad (4-14)$$

où C_v est la chaleur spécifique à volume constant.

L'équation (4-5) du bilan de l'énergie interne s'écrit alors compte tenu de (4-14) sous la forme suivante faisant intervenir la température T :

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (4-15)$$

4.4 Récapitulation : le système final des équations d'un milieu fluide

4.4.1 Problème hydrodynamique : Les équations de Navier-Stockes

Compte tenu de la fermeture (4-10), les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement d'un fluide Newtonien incompressible s'écrivent comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4-16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (4-17)$$

Ce système s'écrit sous la forme indicielle (dans le système de coordonnées cartésiennes) comme suit :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4-18)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + g_i \quad (4-19)$$

Du point de vue mathématique, ces équations forment un système différentiel fermé d'inconnues les champs de vitesse $\mathbf{v}(x_i, t)$ et de pression $p(x_i, t)$ qu'on appelle *le système de Navier-Stokes*. La résolution de ce système avec la prise en compte des conditions aux limites auxquelles obéit le milieu fluide conduit ainsi à la description totale de l'écoulement.

Le caractère universel de ce système laisse à s'attendre qu'on serait capable de décrire des systèmes fluides à des échelles de longueur caractéristiques extrêmement différentes : depuis les écoulements géophysiques qui se produisent à l'échelle de la terre jusqu'aux écoulements biologiques qui se produisent à une échelle microscopique au sein d'un organisme. Seulement, la non linéarité de ce système qui apparaît au niveau du terme convectif $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ (ou $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ dans (4-19)) le rend très instable et la résolution analytique dans le cas général n'est pas possible. Ce système n'est solvable analytiquement que dans un nombre assez réduit de cas d'écoulements qui vérifient des hypothèses de symétrie permettant de le linéariser.

Dans les annexes I et II sont explicités les développements de ce système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

4.4.2 Problème thermique : L'équation de la chaleur

D'après les fermetures (4-10) et (4-12), l'équation de la chaleur (4-15) s'écrit sous la forme fermée suivante :

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right] = -\lambda \Delta T + \rho r + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] : (\nabla \mathbf{v}) \quad (4-20)$$

Le dernier terme dans cette équation montre la puissance calorifique produite au sein de l'écoulement par frottement visqueux entre les particules fluides. La forme indicielle de cette équation de la chaleur s'écrit comme suit :

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \rho r + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad (4-21)$$

Comme dans un grand nombre de cas d'écoulements les grandeurs intensives ρ , μ et C_v varient peu en fonction de la température, les deux problèmes dynamique et thermique peuvent être découplés. Le problème thermique est alors abordé après avoir résolu le problème dynamique.

4.5 Exemples de solutions exactes des équations de Navier-Stokes

4.5.1 Ecoulement de couette

Cette situation correspond à l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux confiné entre deux parois solides planes très proches susceptibles d'être en mouvement relatif à la vitesse U_0 . Ces deux parois délimitent un domaine d'épaisseur H très petite devant l'échelle de longueur L caractéristique des parois. Une telle configuration d'écoulement peut être rencontrée à titre d'exemple dans les systèmes de lubrification.

L'écoulement est supposé permanent, parallèle aux deux parois et bidimensionnel dans le plan vertical. Par commodité des calculs, on suppose que les deux parois soient horizontales et on choisit un système d'axes ($o x_1 x_2 x_3$) où la direction x_1 est la verticale ascendante comme le montre la figure suivante :

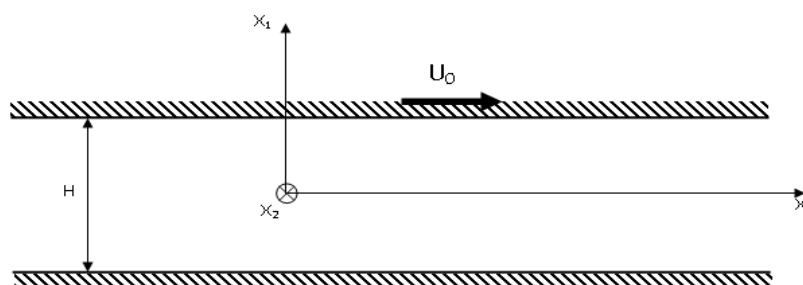


Figure 3 : Ecoulement de couette plan

Cette situation d'écoulement est intéressante dans la mesure où le moteur de l'écoulement peut être un cisaillement dans le cas où les parois sont en mouvement relatif, un gradient de pression longitudinal ou une superposition des deux.

L'équation de conservation de la masse se réduit dans ce cas à la forme suivante :

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (4-22)$$

Ce qui implique que l'écoulement est établi dans la direction x_3 . Les projections de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.17) s'écrivent dans ce cas comme suit :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + v \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} \quad (4-23)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (4-24)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + g \quad (4-25)$$

Avec les conditions aux limites de non glissement sur les deux parois. Le grand avantage des hypothèses de symétrie auxquelles obéit l'écoulement consiste à l'élimination de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes qui apparaît au niveau du terme de convection. Ce système est ainsi linéarisé et devient alors solvable.

La projection (4-24) montre que la pression ne dépend que de x_1 et x_3 . La projection (4-25) s'intègre facilement et indique une distribution verticale hydrostatique de la pression indépendante de l'écoulement qui s'écrit :

$$p = \rho g x_1 + p_0(x_3) \quad (4-26)$$

Compte tenu de (4-26), la projection (4-23) s'écrit :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{d p_0}{d x_3} + v \frac{d^2 v_3}{d x_1^2} \quad (4-27)$$

Si on note $\Gamma = \frac{dp_0}{dx_3}$ le gradient de pression longitudinal. Deux cas intéressants se présentent :

4.5.1.1 Cas où $U_0 \neq 0$ et $\Gamma = 0$

L'équation (4-27) s'intègre pour donner compte tenue des conditions aux limites le profile linéaire suivant de la vitesse :

$$v_3 = \left(\frac{U_0}{H}\right) x_1 \quad (4-28)$$

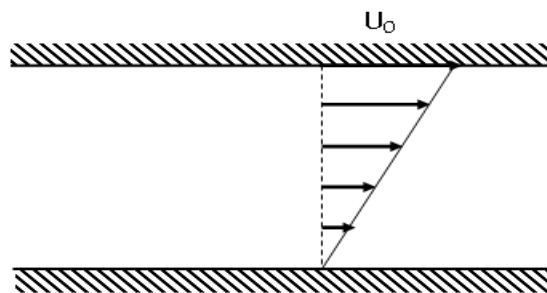


Figure 4 : Profile linéaire de la vitesse

Le tenseur des taux de cisaillement est constant en tout point du domaine de l'écoulement (y compris en contact avec les parois). Il a une seule composante non nulle donnée par :

$$\tau_{31} = \tau_{13} = \mu \frac{U_0}{H} \quad (4-29)$$

4.5.1.2 Cas où $U_0 = 0$ et $\Gamma \neq 0$

L'équation (4-27) s'intègre pour donner compte tenue des conditions aux limites un profile parabolique de la vitesse qui s'annule sur les parois. Il montre un maximum au centre du domaine. Ce profile est donné par l'expression suivante :

$$v_3 = \left(\frac{\Gamma H^2}{2\mu}\right) \left[\left(\frac{x_1}{H}\right)^2 - \frac{x_1}{H} \right] \quad (4-30)$$

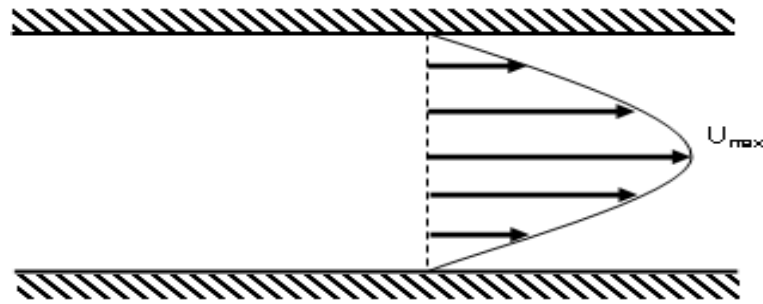


Figure 5 : Profile parabolique de la vitesse

La valeur maximale de la vitesse atteinte au centre du domaine vaut :

$$U_{\max} = -\left(\frac{\Gamma H^2}{8\mu}\right) \quad (4-31)$$

On déduit à partir de ce champ hydrodynamique l'expression suivante des composantes non nulles du tenseur des taux de cisaillement :

$$\tau_{31} = \tau_{13} = (\Gamma H) \left[\frac{x_1}{H} - \frac{1}{2} \right] \quad (4-32)$$

Le cisaillement est alors nulle au milieu du domaine de l'écoulement.

On note enfin, comme l'équation (4-27) est linéaire, un troisième cas est intéressant où on superpose un gradient de pression non nulle avec une vitesse relative de la paroi. La solution obtenue sera un profile de vitesse parabolique avec un maximum rapproché de la paroi en mouvement. Il correspond à une superposition des deux solutions précédentes.

4.5.2 Ecoulement à surface libre sur un plan incliné

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné qui fait un angle α avec l'horizontale comme le montre la figure suivante. Cet écoulement est supposé laminaire, permanent et bidimensionnel dans le plan (x_2, x_3) . Il garde une profondeur constante h .

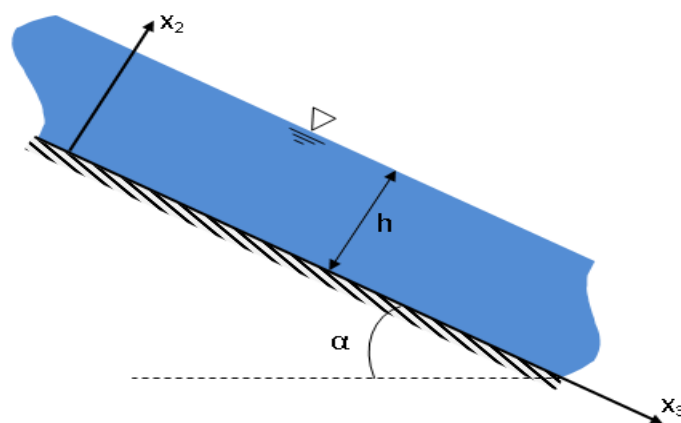


Figure 6 : Ecoulement sur un plan incliné

C'est une situation basique d'un écoulement gravitaire à surface libre. Il diffère par rapport au cas de l'écoulement de Couette au niveau de la condition aux limites vérifiée à la surface libre qui correspond à une condition de cisaillement nul (et non plus de vitesse nulle) et de pression égale à la pression atmosphérique. La solution obtenue ci-dessous montre que dans ce cas d'écoulement c'est la gravité qui est le moteur générateur de l'écoulement.

Le système d'équations de Navier-Stokes se réduit, compte tenu des hypothèses, à la forme linéarisée suivante :

$$0 = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (4-33)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (4-34)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} - g \cos \alpha \quad (4-35)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + g \sin \alpha \quad (4-36)$$

L'équation (4-33) implique que l'écoulement est établi dans la direction x_3 . La projection (4-34) montre que la pression ne dépend que de x_2 et x_3 . La projection (4-35) s'intègre pour donner un

profil de pression hydrostatique qui s'écrit compte tenu de la condition de la pression à la surface libre comme suit :

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha [h - x_2] \quad (4-37)$$

Le bilan longitudinal (4-36) s'intègre pour donner, compte tenu de (4-37) et des conditions aux limites, le profil parabolique suivant de la vitesse :

$$v_3 = \left(\frac{g \sin \alpha h^2}{2\nu} \right) \left[2 \left(\frac{x_2}{h} \right) - \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 \right] \quad (4-38)$$

Le cisaillement pour cet écoulement varie linéairement entre la surface libre et le fond selon :

$$\tau_{32} = \tau_{23} = (\rho g \sin \alpha h) \left[1 - \frac{x_2}{h} \right] \quad (4-39)$$

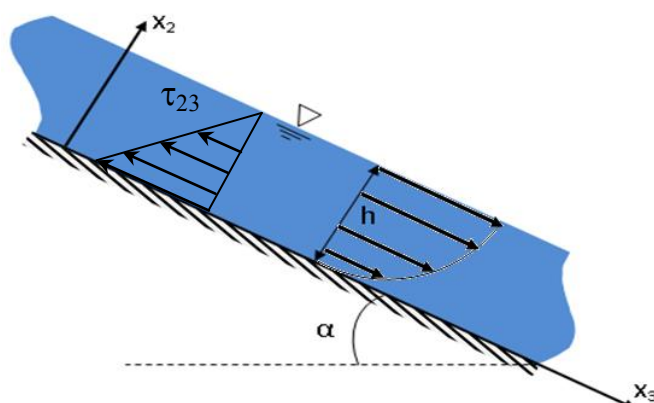


Figure 7 : Profils de la vitesse et du cisaillement

Cette situation d'écoulement est un cas de référence pour initier l'étude des écoulements à surfaces libres dans le milieu naturel tel que les cours d'eau, les systèmes lacustres ou le milieu marin.

4.5.3 Écoulement visqueux dans une conduite cylindrique : écoulement de Poiseuille

Elle correspond à l'écoulement d'un fluide réel incompressible dans une conduite cylindrique. Cet écoulement est permanent, axisymétrique, parallèle et établi : le profil transversal de la vitesse du fluide devient invariant par déplacement longitudinal comme le montre la figure suivante. C'est un écoulement en charge dont le moteur est le gradient de pression longitudinal.

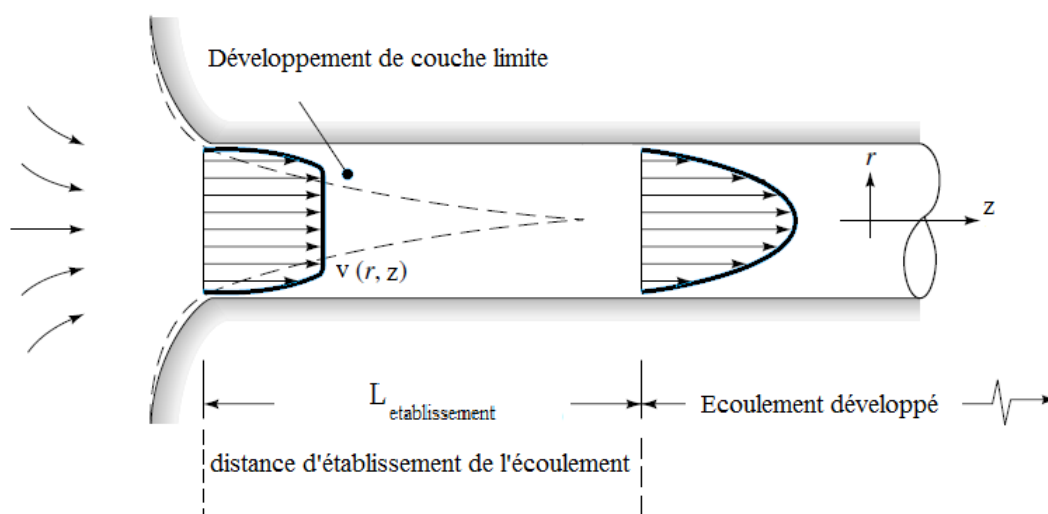


Figure 8 : distance d'établissement de l'écoulement de Poiseuille

C'est un écoulement à symétrie de révolution équivalent à l'écoulement de Couette lorsqu'il est vu en coordonnées cylindriques.

4.5.3.1 Les champs locaux de la vitesse et des taux de cisaillement

Les équations de Navier-Stokes exprimées dans le système des coordonnées cylindriques (voir annexe II) s'écrivent dans ce cas sous la forme linéarisée suivante :

$$0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4-40)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4-41)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (4-42)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] \quad (4-43)$$

Si on note $\Gamma = \frac{dp}{dz}$ le gradient de pression longitudinal. L'intégration de l'équation (4-43) nous

fournit un profil parabolique de la vitesse de l'écoulement qui s'écrit :

$$v_z = \left(\frac{-\Gamma R^2}{4\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4-44)$$

On déduit à partir de ce champ de vitesse un profil de cisaillement linéaire qui varie de 0 à l'axe jusqu'à la valeur maximale au niveau de la paroi de la conduite. Les composantes non nulles du tenseur des taux de cisaillement s'écrivent :

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \left(\frac{\Gamma}{2} \right) r \quad (4-45)$$

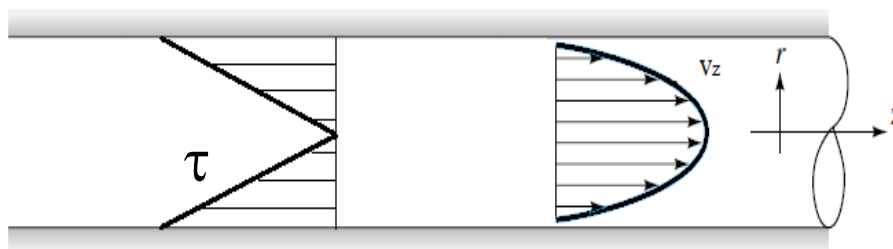


Figure 9 : Profils de la vitesse et du cisaillement en écoulement de Poiseuille

4.5.3.2 La vitesse moyenne - le débit

A partir de l'expression (4-44) du champ de vitesse, on déduit les expressions suivantes du débit et de la vitesse moyenne sur la section :

$$Q = -\left(\frac{\pi}{8} \right) \frac{\Gamma}{\mu} R^4 \quad (4-46)$$

$$V = -\left(\frac{\Gamma}{8\mu}\right)R^2 \quad (4-47)$$

Le gradient de pression longitudinale dans cet écoulement qui exprime la chute de pression le long d'une distance unitaire s'écrit ainsi comme suit :

$$\frac{dp}{dz} = -\left(\frac{8\mu}{R^2}\right)V \quad (4-48)$$

Cette situation d'écoulement est un cas de référence pour initier l'étude des écoulements en charge largement rencontrés dans les systèmes industriels.

4.5.4 Domaine de validité de la structure de l'écoulement de Poiseuille

Nous avons vu que les mécanismes de transport dans un milieu fluide correspondent à deux mécanismes fondamentaux :

- La convection représentée dans les équations de Navier-Stockes ((4-17) ou (4-18)) par le terme convectif non linéaire $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$
- La diffusion moléculaire due à la viscosité représenté par le terme visqueux dans les équations de Navier-Stockes ((4-17) ou (4-18)) et qui peut s'écrire sous la forme de divergence $\nabla \cdot [\nu \nabla \mathbf{v}]$

Ces mécanismes agissent de manières différentes et leur importance relative est représentée par un rapport adimensionnel qui définit le *nombre de Reynolds*. Il s'écrit :

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (4-49)$$

Dans cette relation V est une échelle de vitesse représentative de l'écoulement, L est une échelle de longueur représentative également de l'écoulement et ν est la viscosité cinématique du milieu fluide. Ce nombre adimensionnel met en jeu un rapport entre l'effet d'inertie représenté par le produit VL et l'effet visqueux représenté par la viscosité cinématique ν . Lorsqu'il est très grand par

rapport à 1, il montre que le transport est gouverné par la convection, tandis que les faibles valeurs de ce nombre par rapport à 1 montrent que la diffusion moléculaire domine le transport.

Une expérience assez originale réalisée par Reynolds depuis plus qu'un siècle montre que la structure de l'écoulement de Poiseuille en conduite décrite analytiquement dans le paragraphe précédent est maintenue jusqu'à un nombre de Reynolds autour de 2200.

Cette expérience consiste à l'injection d'un filet de colorant dans une conduite en charge pour différentes vitesses d'écoulement pour visualiser le comportement d'une ligne de courant. Cette expérience met en évidence un résultat universel : le basculement du régime laminaire vers un nouveau régime appelé *turbulent* caractérisé par une structure chaotique aléatoire se produit à un nombre de Reynolds autour de 2200 indépendamment de la viscosité du fluide " ν ", de la géométrie de la conduite " L " et l'écoulement " V ".

4.6 Ecoulement dans un milieu poreux

Un milieu poreux peut être défini comme un matériau massif formé d'une phase solide (des grains solides de différentes tailles) distribuée de manière aléatoire dans le volume du matériau et renfermant des cavités vides ou pores. L'ensemble de ces pores constitue un espace interstitiel qui peut le siège de l'écoulement d'un milieu fluide mono ou multiphasique. Du point de vue pratique, les écoulements dans ces milieux poreux sont très intéressants à comprendre pour modéliser convenablement la dynamique des nappes ou les gisements des hydrocarbures.

4.6.1 Equation de Laplace pour la pression

Compte tenu de l'extrême complexité de la géométrie des milieux poreux, l'écoulement dans ces milieux est à priori très difficile à modéliser. La résolution directe des équations de Navier-Stokes nécessite que l'on connaisse parfaitement la géométrie des surfaces de toutes les particules solides pour introduire les conditions aux limites. Ce qui reste quasiment impossible.

Néanmoins, comme les pores dans un milieu poreux sont caractérisés par une échelle de longueur extrêmement faible (de l'ordre des micromètres) et les vitesses d'écoulement sont

quasiment nulles, le nombre de Reynolds caractéristique de tel écoulement reste très faible par rapport à 1, c'est pourquoi un tel écoulement est appelé rampant.

Les équations (4-16) et (4-17) de Navier-Stockes s'écrivent dans ce cas sous la forme linéarisée suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4-50)$$

$$0 = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (4-51)$$

En prenant la divergence de (4-51) et compte tenu de (4-50) on obtient l'équation de Laplace à laquelle obéit le champ de pression et qui s'écrit :

$$\Delta p = 0 \quad (4-52)$$

La résolution de cette équation compte tenu des conditions aux limites du domaine vérifiées par le champ de la pression permet de déduire ce champ. Le retour à l'équation (4-51) permet ensuite de déduire le champ de la vitesse. Une telle procédure analytique est rendue possible grâce à la linéarisation du système d'équations de Navier-Stockes en négligeant les termes d'inertie.

4.6.2 Loi de Darcy

Outre cette démarche analytique, une description assez judicieuse de l'écoulement dans un milieu poreux peut être effectuée en assimilant à l'échelle microscopique l'écoulement au niveau d'un pore dans un milieu poreux à un écoulement de Poiseuille dans une micro-conduite.

D'après le résultat (4-47) établi précédemment, la vitesse moyenne d'écoulement au niveau du micro-pore sera proportionnelle au gradient de pression locale. Nous pourrions ainsi déduire une relation qui généralise le résultat (4-47) pour exprimer la vitesse locale dans un milieu poreux proportionnellement en fonction du gradient de pression locale compte tenu de l'orientation aléatoire des micro-pores :

$$\mathbf{v} = -\frac{d^2}{\mu} \nabla p \quad (4-53)$$

Où d est une échelle de longueur caractéristique du diamètre des pores.

Si nous regardons à une échelle de longueur beaucoup plus grande que le diamètre du pore. Pour cela nous considérons un volume de longueur caractéristique $L \gg d$ pour contenir un nombre de pores suffisamment grand pour que la moyenne à travers ce volume fait disparaître les fluctuations dues à la variabilité des pores. La prise de moyenne de l'équation (4-53) à travers ce volume permet de définir une vitesse d'écoulement dans le milieu poreux qui s'exprime en fonction du gradient de pression comme suit :

$$\langle \mathbf{v} \rangle = - \left(\frac{K}{\mu} \right) \nabla \langle p \rangle \quad (4-54)$$

Où $\langle \rangle$ dénote l'opérateur de moyenne.

K est un paramètre caractéristique du milieu poreux homogène au carré d'une distance. Il est appelé la perméabilité du milieu. Comme il prend des valeurs généralement très faibles, il est exprimé en Darcy sachant que :

$$1 \text{ Darcy} = 1 \text{ micron}^2 = 10^{-12} \text{ m}^2 \quad (4-55)$$

On donne dans le tableau suivant des valeurs mesurées de perméabilité pour quelques milieux.

Tableau 3 : mesures de la perméabilité pour quelques milieux poreux

Milieu poreux	Perméabilité (en Darcy)
Sable	2 à 120
Grès	5×10^{-4} à 3
Calcaire	2×10^{-3} à 5×10^{-2}
Sols	0.3 à 10

Chapitre 5 : Théorèmes généraux de la mécanique des fluides

5.1 Introduction

5.2 Conservation de quantité de mouvement : Théorème d'Euler

5.2.1 Forme générale

5.2.2 Forme particulière

5.3 Conservation de l'énergie : Théorème de Bernoulli

5.3.1 Forme générale : cas d'un fluide réelle

5.3.2 Premier théorème de Bernoulli : cas de l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible

5.3.3 Deuxième théorème de Bernoulli : cas de l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait barotrope

5.4 Dynamique des tourbillons dans un écoulement de fluide parfait

5.4.1 Lignes de tourbillon - filet de tourbillon

5.4.2 Equation de tourbillon pour un fluide parfait incompressible

5.4.3 Théorème de Lagrange pour l'écoulement d'un fluide parfait

5.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent le système d'équations qui décrit le comportement dynamique (équations de Navier-Stokes) et thermique (équation de la chaleur) d'un milieu fluide newtonien. L'intégration du système de Navier-Stokes nous fournit une description totale de la dynamique de l'écoulement en termes des champs eulériens locaux de pression et de vitesse.

D'un autre côté, nous avons mis l'accent sur un aspect fondamental de ces équations qui est la non-linéarité. En effet, bien que le système de Navier-Stokes soit mathématiquement fermé, la non-linéarité introduite par les termes de convection rend la résolution analytique dans le cas général, même approchée, quasiment impossible. Nous avons vu également que la résolution n'est possible que dans un nombre très réduit de cas qui obéissent à des hypothèses simplificatrices qui permettent justement de linéariser ces équations (Ex : écoulement de Poiseuille ou écoulement de couette).

Dans le cas général, la résolution numérique reste une issue très intéressante qui a donné lieu à une discipline intitulée « Mécanique des Fluides Numérique ». Grâce au grand progrès des moyens de calcul numérique, cette discipline a permis de développer des codes numériques de CFD (Computational Fluid Dynamics) qui se basent sur cette résolution numérique. Ces codes constituent actuellement un outil d'ingénierie fondamental pour la simulation et l'investigation des systèmes fluides dans les divers domaines d'application.

D'autre part, dans un grand nombre d'applications pratiques on n'a pas besoin de connaître un écoulement jusqu'à ces échelles caractéristiques microscopiques. Mais plutôt ses conséquences, telles que le débit ou l'effort exercé sur une structure solide. En termes d'échelles, ces résultats peuvent être interprétés comme des grandeurs globales à une échelle macroscopique résultant d'une intégration sur une surface ou sur un volume des quantités locales. C'est pourquoi il serait extrêmement utile de disposer de relations ayant un aspect pratique permettant d'établir ces grandeurs globales.

Dans ce chapitre nous nous proposons de revenir sur ces relations qu'on a l'habitude de regrouper sous le vocable de *théorèmes généraux de la mécanique des fluides*. Ils concernent le *théorème d'Euler* et le *théorème de Bernoulli* qui se déduisent respectivement des principes de conservation de quantité de mouvement et de l'énergie (voir chapitre 3). Nous préciserons notamment les hypothèses de leur application en pratique qu'il faut respecter et qu'il faut traiter

avec prudence. En effet, l'absence de ces hypothèses (comme par exemple l'hypothèse d'un fluide parfait) peut mener dans certains cas à des résultats très loin de la réalité.

5.2 Conservation de quantité de mouvement: Théorème d'Euler

5.2.1 Forme générale

On considère l'écoulement permanent d'un fluide réel. L'équation globale de conservation de quantité de mouvement sur un volume de contrôle D_C établie au chapitre 3 (voir équation (3-13) au chapitre 3) s'écrit :

$$\int_{\Sigma_C} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{D_C} \rho \mathbf{g} \, d\tau - \int_{\Sigma_C} p \mathbf{n} \, ds + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (5-1)$$

Cette relation constitue la forme générale du théorème d'Euler qui permet de déduire, à partir de la connaissance du champ de vitesse \mathbf{v} sur la paroi Σ_C et de la masse volumique ρ , les efforts auxquels est soumis le milieu fluide contenu dans D_C .

5.2.2 Forme particulière

Si le volume de contrôle est un tube de courant coiffé par deux sections de base S_1 et S_2 : $\Sigma_C = S_1 \cup S_2 \cup S_L$ où S_L est la surface latérale comme le montre la figure suivante. Ce cas correspond, à titre d'exemple, à l'écoulement en charge dans un tronçon d'une conduite ou à une approximation d'un jet d'eau dans l'air atmosphérique.

Le flux de quantité de mouvement à travers la surface latérale S_L est nul et l'équation (5-1) se réduit alors à la forme suivante :

$$\int_{S_1} \rho \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) \, ds + \int_{S_2} \rho \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \, ds = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (5-2)$$

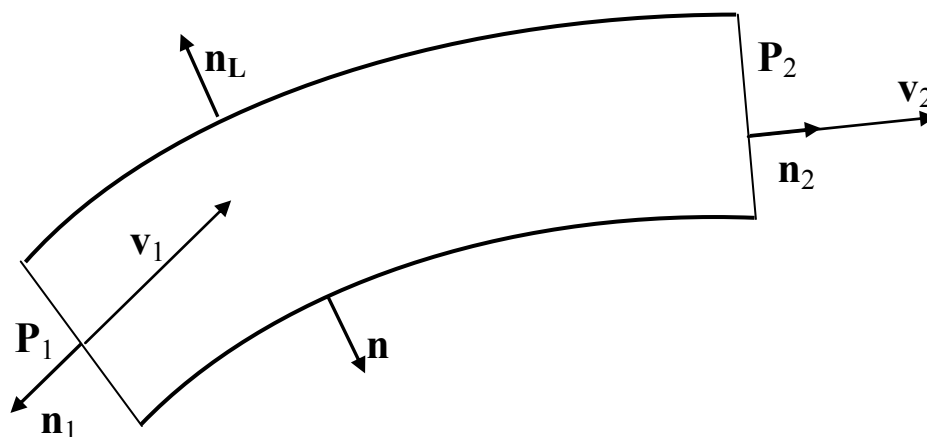


Figure 1 : Ecoulement dans un tronçon de conduite

La conservation de la masse se traduit dans ce cas par une conservation du débit qui s'écrit :

$$Q = - \int_{S_1} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \, ds = \int_{S_2} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \, ds \quad (5-3)$$

Si on néglige la variation de la vitesse sur les sections. D'après (5-1), (5-2) et (5-3), l'effort de contact exercé par la paroi sur l'écoulement s'exprime comme suit :

$$\mathbf{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{écoulement}}^{\text{contact}} = - \int_{\Sigma_C} p \mathbf{n} \, ds + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{D_C} \rho \mathbf{g} \, dt + \rho Q (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad (5-4)$$

Si on néglige la variation de la pression sur une section de l'écoulement, la contrainte de pression qui figure au second membre de (5-4) se réduit à :

$$\mathbf{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{écoulement}}^{\text{pression}} = - \int_{\Sigma_C} p \mathbf{n} \, ds = - (p_1 S_1 \mathbf{n}_1 + p_2 S_2 \mathbf{n}_2) \quad (5-5)$$

On déduit alors une expression aisée de la force de frottement des parois exercée sur l'écoulement qui s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{écoulement}}^{\text{cisaillement}} = \int_{S_L} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds = \rho Q (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + (p_1 S_1 \mathbf{n}_1 + p_2 S_2 \mathbf{n}_2) \quad (5-6)$$

5.3 Conservation de l'énergie : Théorème de Bernoulli

5.3.1 Forme générale : cas d'un fluide réelle

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur terrestre. Le bilan local de l'énergie cinétique établi au chapitre 3 (équation (3-49)) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_c) + \mathbf{v} \cdot (\nabla e_c) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (5-7)$$

Soit un système d'axes $(O ; \mathbf{e}_x ; \mathbf{e}_y ; \mathbf{e}_z)$ choisi tel que l'axe $(O ; \mathbf{e}_z)$ est dirigé selon la verticale ascendante. Le champ de pesanteur $\rho \mathbf{g}$ dérive du potentiel scalaire de gravité :

$$\psi = \rho g z \quad (5-8)$$

selon la relation :

$$\rho \mathbf{g} = -\nabla \psi \quad (5-9)$$

En introduisant la décomposition du tenseur des contraintes en contraintes de pression et de cisaillement, la puissance des efforts de contact dans l'équation (5-7) s'écrit :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = -\nabla p \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \quad (5-10)$$

L'équation (5-7) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_c) + \mathbf{v} \cdot (\nabla e_c) = -(\nabla \psi) \cdot \mathbf{v} - \nabla p \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (5-11)$$

En passant les deux premiers termes du second membre à gauche on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_c) + \mathbf{v} \cdot \nabla [e_c + \psi + p] = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (5-12)$$

Si on introduit la quantité Φ définie par :

$$\Phi = e_c + \psi + p = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p \quad (5-13)$$

Φ de dimension $ML^{-1}T^{-2}$ est homogène à une densité volumique d'énergie. L'équation (5-12) s'écrit par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_c) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \Phi) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (5-14)$$

C'est l'équation locale de Bernoulli sous sa forme générale. On peut interpréter cette équation à l'échelle d'un volume élémentaire de la manière suivante :

« La variation locale au cours du temps de l'énergie cinétique ajoutée au flux advectif de l'énergie totale Φ est égale à la somme de la puissance des efforts de contact de cisaillement s'exerçant à la surface de ce volume et la puissance des efforts intérieurs »

Le premier terme du second membre qui représente la puissance des efforts de contact de cisaillement peut être interprété, à l'échelle de l'écoulement, comme un terme d'échange d'énergie avec le milieu extérieur. Il est positif en cas d'apport d'énergie depuis le milieu extérieur : c'est le rôle d'une pompe dans un écoulement. Il est négatif en cas de transfert d'énergie depuis l'écoulement vers le milieu extérieur : c'est le cas de présence d'une turbine.

Le second terme du second membre qui représente la puissance des efforts intérieurs est un terme constamment négatif. C'est un terme qui représente à l'échelle de l'écoulement la perte d'énergie par les effets de frottement. Ce frottement se produit entre les particules fluides à l'intérieur du milieu fluide ou en contact avec la paroi. L'effet de ce terme est très présent dans les applications pratiques.

5.3.2 Premier théorème de Bernoulli : cas de l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible

Une relation importante appelée « le théorème de Bernoulli » est obtenue si on considère les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est permanent : $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$
- Le fluide est parfait : $\boldsymbol{\tau} = 0$

L'équation (5-14) du théorème de Bernoulli sous sa forme générale se réduit dans à :

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \Phi) = 0 \quad (5-15)$$

ce qui veut dire que la quantité Φ reste constante le long d'une ligne de courant :

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = \text{Cte}_{(\text{ligne de courant})} \quad (5-16)$$

ceci traduit la conservation de l'énergie totale le long d'une ligne de courant en écoulement de fluide parfait.

A fin d'exprimer cette conservation d'énergie en termes de grandeurs homogènes à des distances, on divise Φ par la quantité ρg . On obtient ainsi une nouvelle grandeur H homogène à une distance et qui se conserve le long d'une ligne de courant :

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad (5-17)$$

H s'appelle « *La charge hydraulique* » définie localement.

On note enfin que ce résultat reste valable pour le cas des fluides parfaits barotropes où la masse volumique ne peut dépendre que de la pression. Nous pouvons citer à titre d'exemples le cas du gaz parfait en écoulement adiabatique où la masse volumique est liée à la pression par la relation suivante :

$$p \rho^\gamma = \text{Cte} \quad (5-18)$$

où γ est une constante caractéristique des gaz parfaits.

5.3.3 Deuxième théorème de Bernoulli : cas de l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait barotrope

5.3.3.1 Introduction du potentiel d'écoulement

Si l'écoulement est irrotationnel, on dit qu'il est potentiel. En effet, nous pouvons définir un potentiel scalaire Φ tel que le champ de vitesse de l'écoulement dérive de ce potentiel selon la relation de gradient suivante :

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (5-18)$$

Nous nous proposons de revenir sur cette classe d'écoulements potentiels en détails au chapitre 7.

5.3.3.2 Deuxième forme du théorème de Bernoulli

Compte tenu de la relation (2-21) développée au chapitre 2, l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement (équ (4-17) au chapitre 4) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (5-19)$$

Si on considère les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est irrotationnel
- Le fluide est parfait et barotrope

L'irrotationnalité du fluide permet de réduire ce bilan compte tenu de (5-18) et (5-9) comme suit :

$$\frac{\partial(\nabla\Phi)}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla\Psi \quad (5-20)$$

Du fait que le fluide est barotrope, ce bilan peut être arrangé sous la forme suivante :

$$\nabla \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right] = 0 \quad (5-21)$$

Cette relation est valable en tout point du domaine de l'écoulement. Nous déduisons alors, qu'à un instant t donné, la quantité à l'intérieur de l'opérateur de gradient est constante en tout point de l'écoulement.

Ceci nous permet d'énoncer la deuxième forme du théorème de Bernoulli pour un écoulement irrotationnel de fluide parfait barotrope comme suit :

La charge hydraulique instantanée \mathfrak{S} donnée par l'expression suivante :

$$\mathfrak{S}(t) = \frac{1}{g} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (5-22)$$

est conservée, à un instant donné, en tout point de l'écoulement indépendamment des lignes de courant.

5.4 Dynamique des tourbillons dans un écoulement de fluide parfait

5.4.1 Lignes de tourbillon - filet de tourbillon

Nous avons défini au chapitre 1 pour un écoulement donné le champ de vorticité qui s'écrit :

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{v} \quad (5-23)$$

Les lignes de tourbillon correspondent aux lignes de courant du champ de vorticité. Un filet de tourbillon est défini par une surface de courant pour le champ de vorticité s'appuyant sur un contour fermé.

5.4.2 Equation de tourbillon pour un fluide parfait incompressible

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (5-19) peut également s'écrire en introduisant le vecteur vorticité comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (5-24)$$

En calculant le demi-rotationnel de cette relation on déduit que :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (5-25)$$

Soit encore :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{\Omega}) - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (5-26)$$

Ce qui nous permet d'établir l'équation de tourbillon qui s'écrit alors comme suit :

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\nabla \mathbf{v}) \cdot \Omega \quad (5-27)$$

Dans un écoulement plan, le vecteur vorticité est perpendiculaire au plan de l'écoulement à tout instant. L'équation de tourbillon s'écrit alors dans ce cas :

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 \quad (5-28)$$

Le vecteur vorticité se conserve alors pour un écoulement plan sur une trajectoire.

5.4.3 Théorème de Lagrange pour l'écoulement d'un fluide parfait

Si on considère un contour fermé C dans un écoulement de fluide parfait. La circulation du vecteur vitesse sur ce contour est liée au flux du vecteur vorticité sur une surface S quelconque s'appuyant sur ce contour d'après le théorème de Stokes comme suit :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \Omega \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (5-29)$$

Cette circulation se conserve au cours du temps. En effet, sa dérivée particulière par rapport au temps est nulle :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_C \left[-\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Psi \right] \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5-30)$$

Ce qui permet de déduire que la circulation du vecteur vitesse sur un contour fermé que l'on suit dans son mouvement se conserve au cours du temps.

Théorème de Lagrange :

"si à un instant donné t_0 l'écoulement est irrotationnel dans un domaine Ω_0 , il reste irrotationnel quelque soit le temps $t > t_0$ si l'on suit dans son mouvement"

Ce théorème est d'une importance considérable pour justifier l'hypothèse de l'irrotationnalité des écoulements observés non permanents à l'échelle atmosphérique ou océanographique. En effet, la plupart des écoulements non permanents observés au temps réel étaient au repos à l'instant initial et par conséquent en état irrotationnel.

Chapitre 6 : Analyse dimensionnelle et similitude

6.1 Introduction

6.2 Analyse dimensionnelle des équations fondamentales

6.2.1 Principe d'invariance dimensionnelle

6.2.2 Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes

6.2.3 Analyse dimensionnelle de l'équation de la chaleur

6.3 Procédé de similitude

6.3.1 Principe

6.3.2 Similitude partielle

6.4 Application 1 : force de trainée exercée sur un objet

6.4.1 Force de trainée sur un obstacle sphérique

6.4.2 Force de trainée sur des obstacles non sphériques d'usage courant

6.5 Application 2 : Forme universelle d'expression de la perte de charge linéaire dans une conduite

6.5.1 Perte de charge linéaire en conduite lisse

6.5.2 Perte de charge linéaire en conduite rugueuse

6.1 Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre de décrire une nouvelle alternative permettant d'étudier les systèmes fluides sans passer par la résolution des équations de Navier-Stokes. Cette nouvelle alternative à caractère empirique est basée sur une démarche d'analyse dimensionnelle.

Nous présentons au second paragraphe cette démarche d'analyse dimensionnelle. Dans le troisième paragraphe, nous revenons sur la théorie de similitude. En effet, l'étude des systèmes industriels sur des maquettes (modèles réduits) s'avère un procédé d'ingénierie largement utilisé en pratique malgré sa relative simplicité. La démarche d'analyse dimensionnelle permet d'introduire les règles à respecter pour pouvoir transposer les résultats expérimentaux obtenus sur une maquette au système fluide à l'échelle réelle (prototype) sachant que la similitude géométrique est réalisée. Deux cas d'applications seront explicités aux quatrième et cinquième paragraphes. Ils concernent l'étude par analyse dimensionnelle de la force de traînée exercée par un écoulement sur un corps immergé et la formulation de la perte de charge linéaire en écoulement de conduite.

6.2 Analyse dimensionnelle des équations fondamentales

6.2.1 Principe d'invariance dimensionnelle

La dimension d'une grandeur est une propriété intrinsèque liée à la nature de celle-ci. On distingue pour les systèmes thermomécaniques 4 *dimensions fondamentales* :

- Distance (espace) : L
- Temps (chronologie) : T
- Masse (matière) : M
- Température : Θ

La dimension de toute grandeur globale (extensive) ou locale (intensive) s'exprime par une loi de puissance en fonction de ces dimensions fondamentales comme suit :

$$[\Phi] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \Theta^\lambda \quad \text{Où } \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \lambda \text{ sont des constantes.} \quad (6.1)$$

Cette grandeur s'exprime par son unité dans un système d'unités conformément à sa dimension. Nous citons à titre d'exemple le système international dans lequel les unités des dimensions fondamentales sont les suivantes :

- Pour la distance : le mètre "m"
- Pour le temps : la seconde "s"
- Pour la masse : le kilogramme "kg"
- Pour la température : le degré Kelvin "° k "

Exemple de grandeur intensive : la pression est de dimension $[p] = M L^{-1} T^{-2}$. Son unité dans le SI est le Pascal tel que : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Exemple de grandeur extensive : l'énergie est de dimension $[E] = M L^2 T^{-2}$. Son unité dans le SI est le Joule tel que : $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$

Le principe d'invariance dimensionnelle stipule que les relations entre les grandeurs physiques restent invariantes dans un changement de système d'unités.

6.2.2 Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes

On considère un fluide Newtonien incompressible évoluant dans un domaine D_c . Sa dynamique est décrite par les champs des grandeurs physiques locales p et v_i dans D_c . Du point de vue mathématique, ses grandeurs sont solutions du problème suivant :

$$(A) \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + g_i \\ \oplus \text{ conditions aux limites de } D_c \oplus \text{ conditions initiales} \end{cases} \quad (6-2)$$

Si on choisit les échelles caractéristiques suivantes pour les dimensions fondamentales :

$$L_e \text{ pour la distance} \quad (6-3)$$

$$M_e = \rho L_e^3 \text{ pour la masse} \quad (6-4)$$

$$T_e \text{ pour le temps} \quad (6-5)$$

$$\Theta_e \text{ pour la température} \quad (6-6)$$

Les variables indépendantes d'Euler s'expriment alors :

$$x_i = L_e \bar{x}_i \quad ; \quad t = T_e \bar{t} \quad (6-7)$$

Les composantes de l'accélération gravitationnelle s'écrivent :

$$g_i = \bar{g}_i g \quad \text{avec} \quad \bar{g}_i = -\delta_{i3} \quad \text{dans un repère où } x_3 \text{ est la verticale ascendante} \quad (6-8)$$

Quand aux grandeurs dynamiques, elles s'expriment comme suit :

$$v_i = \bar{v}_i \left(\frac{L_e}{T_e} \right) = \bar{v}_i V_e \quad ; \quad p = \bar{p} (\rho L_e^2 T_e^{-2}) = \bar{p} P_e \quad (6-9)$$

Où \bar{p} et \bar{v}_i sont des grandeurs adimensionnelles. Elles correspondent à des "mesures" dans le nouveau système d'unités défini par (L_e, M_e, T_e) . En partant du système (6-2), on déduit facilement, en remplaçant les variables dimensionnelles par leurs expressions illustrées dans (6-7) et (6-8), que les variables adimensionnelles sont solutions du problème suivant :

$$(\bar{A}) \begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j^2} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \bar{g}_i \\ \oplus \text{ conditions aux limites de } D_c \oplus \text{ conditions initiales} \end{cases} \quad (6-10)$$

On note dans ce système l'apparition de deux nombres adimensionnels :

$$\text{Re} = \frac{V_e L_e}{\nu} \quad (6-11)$$

qui représente un nombre de Reynolds introduit déjà au chapitre 4 (voir paragraphe 4.5.4) . ainsi que le nombre :

$$\text{Fr} = \frac{V_e}{\sqrt{g L_e}} \quad (6-12)$$

appelé *nombre de Froude*. C'est un nombre adimensionnel basique largement utilisé notamment dans l'étude des écoulements à surface libre. Il met en jeu un rapport entre les effets d'inertie et les effets de gravité.

Du point de vue mathématique, pour que le système adimensionnel (\bar{A}) reste invariant dans un changement des échelles (L_e, M_e, T_e) , il faut et il suffit de maintenir les deux nombres adimensionnels de Reynolds et de Froude constants au cours de ce changement entre les deux systèmes.

6.2.3 Analyse dimensionnelle de l'équation de la chaleur

Les transferts thermiques qui peuvent avoir lieu dans ce milieu fluide sont régis par l'équation de la chaleur établie au chapitre 4 (Eq (4-21)). Le problème thermique s'écrit ainsi sous la forme suivante :

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \rho r + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \\ \oplus \text{conditions aux limites de } D_c \oplus \text{conditions initiales} \end{array} \right. \quad (6-13)$$

Afin de simplifier le problème, on suppose qu'il n'y a pas transfert par rayonnement. Ce problème s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$(\bar{B}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_j} = -\left(\frac{\lambda}{\rho C_v V_e L_e} \right) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}_j^2} + \left(\frac{V_e v}{\Theta_e L_e C_v} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right] \\ \oplus \text{conditions aux limites de } D_c \oplus \text{conditions initiales} \end{array} \right. \quad (6-14)$$

On introduit les nombres adimensionnels de Peclet et d'Eckert qui s'écrivent respectivement sous les formes suivantes :

$$Pe = \frac{\rho C_v V_e L_e}{\lambda} \approx \frac{\text{effet de convection thermique}}{\text{effet de diffusion thermique}} \quad (6-15)$$

$$Ec = \frac{V_e^2}{\Theta_e C_v} \approx \frac{\text{énergie cinétique}}{\text{énergie interne}} \quad (6-16)$$

Le nombre de Peclet mesure l'importance relative des transferts de chaleur par convection et par diffusion au sein de l'écoulement du fluide. Il joue dans l'équation de la chaleur un rôle similaire à celui du nombre de Reynolds dans l'équation de la dynamique (6-10).

Enfin, le nombre d'Eckert mesure l'importance relative des variations de l'énergie cinétique et de l'énergie interne au sein de l'écoulement.

Le problème adimensionnel (\bar{B}) s'écrit alors :

$$(\bar{B}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_j} = -\frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}_j^2} + \left(\frac{Ec}{Re} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right] \\ \oplus \text{conditions aux limites de } D_c \oplus \text{conditions initiales} \end{array} \right. \quad (6-17)$$

On note que le rapport $\frac{Ec}{Re}$ qui apparaît dans (6-17) permet de comparer l'importance relative de la dissipation de l'énergie interne par contraintes visqueuses et de son transfert par convection.

Ce système reste alors invariant par changement d'échelle si on maintient le nombre de Peclet ainsi que le rapport $\frac{Ec}{Re}$ constants.

6.3 Procédé de similitude

6.3.1 Principe

L'un des intérêts essentiels de l'analyse dimensionnelle consiste à définir les règles qu'il faut respecter dans une étude d'un système fluide par similitude. C'est à dire, les règles qu'il faut respecter pour pouvoir déduire à partir d'une étude expérimentale sur une maquette les valeurs réelles que l'on mesurerait en vraie grandeur (modèle réel).

D'après l'analyse développée au paragraphe précédent, pour qu'il y ait égalité entre les grandeurs dynamiques adimensionnelles mesurées sur maquette et les grandeurs correspondant sur le prototype, il suffit que les deux nombres adimensionnels de Reynolds (Re) et de Froude (Fr) aient les mêmes valeurs dans les deux expériences.

Quand au problème thermique, il faut avoir en plus l'égalité du nombre de Peclet (Pe) et le rapport adimensionnel ($\frac{Ec}{Pe}$).

6.3.2 Similitude partielle

On considère une étude expérimentale sur maquette où l'on a le même fluide que dans le modèle réel. On peut citer à titre d'exemples l'étude sur un modèle réduit du fonctionnement hydraulique d'un déversoir d'un barrage ou de la force de portance sur un avion en vitesse de croisière.

Si on note C_{sim} le rapport de similitude géométrique et on note avec l'indice m les mesures sur maquette. On aura alors les relations suivantes :

$$L_e^m = c_{sim} L_e \quad (6-18)$$

$$R_e = \frac{V_e L_e}{\nu} \quad (6-19)$$

$$R_e^m = \frac{V_e^m L_e^m}{\nu} \quad (6-20)$$

$$Fr = \frac{V_e}{\sqrt{g L_e}} \quad (6-21)$$

$$Fr^m = \frac{V_e^m}{\sqrt{g L_e^m}} \quad (6-22)$$

La similitude parfaite implique les égalités suivantes :

$$R_e = R_e^m \quad \text{et} \quad Fr = Fr^m \quad (6-23)$$

D'où résultent les relations suivantes :

$$V_e L_e = V_e^m L_e^m \quad \text{et} \quad \frac{V_e}{\sqrt{L_e}} = \frac{V_e^m}{\sqrt{L_e^m}} \quad (6-24)$$

Et par conséquent un rapport de similitude géométrique égal à $C_{sim} = 1$. C'est à dire une maquette de même taille que le modèle réel ce qui est contradictoire.

En pratique on a recours à ce qu'on appelle la *similitude partielle* où on favorise selon le cas à étudier la similitude partielle basée sur le nombre de Reynolds ou sur le nombre de Froude.

Ainsi, dans les deux exemples cités ci-dessus, comme le déversement est un écoulement gravitaire à surface libre, on favorise la similitude partielle basée sur le nombre de Froude. Quand au second exemple où on cherche la force de portance sur un avion qui est induite par le cisaillement du vent au niveau de la surface de l'avion, on favorise la similitude partielle basée sur le nombre de Reynolds.

6.4 Application 1 : force de traînée exercée sur un objet

On se propose dans ce paragraphe d'étudier par analyse dimensionnelle la force de traînée exercée par l'écoulement uniforme d'un fluide visqueux incompressible de viscosité ν indépendante de température et à masse volumique ρ constante, sur un obstacle immergé.

6.4.1 Force de traînée sur un obstacle sphérique

On note D le diamètre de la sphère, V_∞ et P_∞ respectivement la vitesse et la pression à l'infini où l'écoulement est uniforme et non perturbé par la présence de la sphère. On suppose de plus en première approximation l'absence des effets de la gravité.

En recensant tous les paramètres du problème, on s'attend à ce que la force de traînée Tr exercée par l'écoulement sur la sphère soit fonction des 5 paramètres du problème. Elle sera donnée par une relation de la forme :

$$\mathfrak{F}(Tr, \rho, \nu, P_\infty, V_\infty, D) = 0 \quad (6-25)$$

Cette relation s'écrit également sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{Tr}{M_e L_e T_e^{-2}}, \frac{\rho}{M_e L_e^{-3}}, \frac{\nu}{L_e^2 T_e^{-1}}, \frac{P_\infty}{M_e L_e^{-1} T_e^{-2}}, \frac{V_\infty}{L_e T_e^{-1}}, \frac{D}{L_e}\right) = 0 \quad (6-26)$$

Les dimensions fondamentales intervenant sont la masse M , la distance L et le temps T . En choisissant comme échelles caractéristiques :

$$L_e = D \quad (6-27)$$

$$M_e = \rho D^3 \quad (6-28)$$

$$T_e = D V_\infty^{-1} \quad (6-29)$$

La relation (6-26) s'écrit :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\text{Tr}}{\rho V_{\infty}^2 D^2}, 1, \frac{\nu}{D V_{\infty}}, \frac{P_{\infty}}{\rho V_{\infty}^2}, 1, 1\right) = 0 \quad (6-30)$$

Cette relation montre qu'on passe, pour la détermination de Tr, de 5 paramètres à 2 paramètres adimensionnels parmi lesquels on note le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{V_{\infty} D}{\nu} \quad (6-31)$$

On déduit finalement par analyse dimensionnelle que la force de traînée peut s'exprimer par une relation de la forme :

$$\frac{\text{Tr}}{\rho V_{\infty}^2 D^2} = \lambda\left(\text{Re}, \frac{P_{\infty}}{\rho V_{\infty}^2}\right) \quad (6-32)$$

D'autre part, comme la pression intervient dans le bilan de quantité de mouvement (6-2) par son gradient, ce champ est défini à une constante près. Ceci implique que toute translation de la valeur P_{∞} laisse la force de traînée Tr invariante. Il s'en suit alors la non dépendance de Tr de la quantité adimensionnelle $\frac{P_{\infty}}{\rho V_{\infty}^2}$.

Finalement on déduit que la traînée Tr peut être exprimée en fonction uniquement d'un seul nombre adimensionnel comme suit :

$$\frac{\text{Tr}}{\rho V_{\infty}^2 D^2} = \lambda(\text{Re}) \quad (6-33)$$

En pratique, on exprime cette force de traînée sous la forme similaire suivante :

$$\text{Tr} = C_D \left(\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 A \right) \quad \text{avec} \quad C_D = C_D(\text{Re}) \quad (6-34)$$

Où $A = \frac{\pi D^2}{4}$ est la surface apparente de la sphère dans la direction de l'écoulement. Le coefficient C_D s'appelle *le coefficient de traînée*. C'est un coefficient adimensionnel qui dépend

uniquement du nombre de Reynolds. On note enfin l'apparition dans cette expression de la pression dynamique $\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2$.

Ce résultat, à priori empirique, est appuyé par des études analytiques et expérimentales. En effet, un développement analytique* basé sur la théorie des écoulements potentiels montre que pour les écoulements à très faibles nombres de Reynolds ($Re \approx 1$), le coefficient de traînée C_D s'exprime analytiquement comme suit :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (6-35)$$

D'autre part, des travaux expérimentaux montrent que pour les plus grands nombres de Reynolds, la variation de C_D est illustrée par la figure suivante.

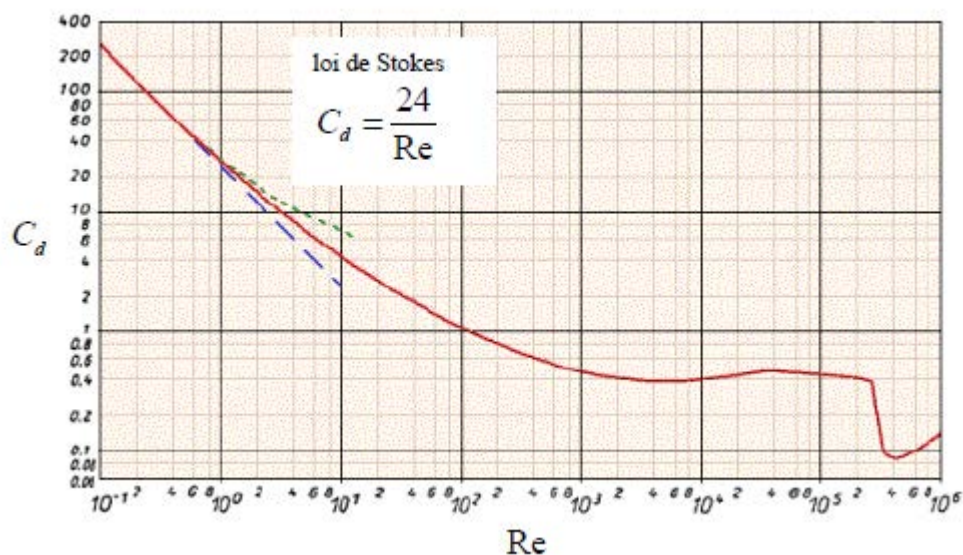


Figure 1 : Coefficient de traînée pour une sphère

Cette figure montre que pour la plage des nombres de Reynolds compris entre 10^3 et 2×10^5 , le coefficient C_D garde une valeur sensiblement constante indépendamment de Re , autour de la valeur 0.44. On remarque également une chute brusque de ce coefficient pour les nombres de Reynolds de l'ordre de 3×10^5 . Cette chute correspond au phénomène de la *crise de traînée**

En résumé, l'analyse dimensionnelle pour cette situation d'étude a permis de simplifier considérablement l'étude en mettant en évidence la dépendance de la traînée d'un seul paramètre adimensionnel qu'est le nombre de Reynolds. Des études (analytiques ou expérimentales) plus approfondies permettent de mieux expliciter une telle relation.

6.4.2 Force de traînée sur des obstacles non sphériques d'usage courant

Un obstacle rigide de forme quelconque immergé dans un écoulement de fluide réel va subir une force globale de contact exercée par cet écoulement. Comme nous l'avons mentionné depuis le chapitre III, connaissant le champ du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sur la surface de l'obstacle et d'après le principe de l'action et la réaction, cette force s'exprime de manière exacte sous la forme :

$$\mathbf{F} = - \int_{\Sigma_c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (6-36)$$

Si on considère que l'écoulement à l'infini est uniforme, la force de traînée exercée par cet écoulement correspond à la projection de \mathbf{F} sur la direction de cet écoulement. De manière empirique, l'expression (6-34) va être extrapolée pour exprimer le module de cette force de traînée qui s'écrit ainsi :

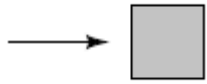
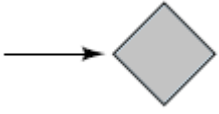
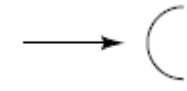
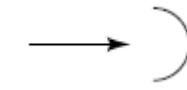
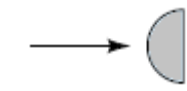

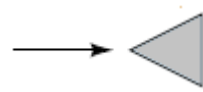

$$\text{Tr} = C_D \left(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 A \right) \quad (6-37)$$

Où A est une surface caractéristique de l'obstacle. C'est une surface de référence choisie selon la nature de l'objet de trois manières générales :

- *La surface frontale* apparente dans la direction de l'écoulement dans le cas des objets épais comme la sphère, le cylindre, une voiture ou un missile.
- *La surface longitudinale* vue à partir de la direction normale à l'écoulement dans le cas des objets minces tels que l'aile d'un avion.
- *La surface mouillée* dans le cas des navires.



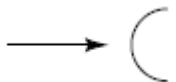
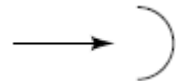
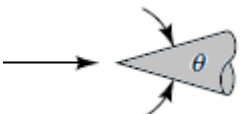

Les tableaux 1 et 2 suivants montrent des mesures expérimentales du coefficient de traînée C_D pour quelques objets d'usage courant respectivement bidimensionnels et tridimensionnels pour une plage des nombres de Reynolds supérieurs à 10^4 .

Tableau 1 : coefficient de traînée pour des objets bidimensionnels*

Objet bidimensionnel		C_D basé sur la surface frontale pour $Re \geq 10^4$
Carré		2.1
		1.6
Demi tube		1.2
		2.3
Demi cylindre		1.2
		1.7
Triangle équilatéral		1.6
		2.0

* Fluid Mechanics, Frank M. White, University of Rhode Island, WCB Mc-GrawHill, Fourth Edition

Tableau 2 : coefficient de traînée pour des objets tridimensionnels*

Objet bidimensionnel		C_D basé sur la surface frontale pour $Re \geq 10^4$						
Cube		1.07						
		0.81						
Calotte hémisphérique		0.4						
		1.4						
Cône		θ°	10	20	30	40	60	90
		C_D	0.3 0	0.4 0	0.5 5	0.6 5	0.8 0	1.1 5
Parachute		1.2						

6.5 Application 2 : Forme universelle d'expression de la perte de charge linéaire dans une conduite

L'écoulement en charge d'un fluide réel s'accompagne d'une perte de charge hydraulique qui traduit la dissipation de son énergie par les effets de frottement. Du point de vue pratique, on distingue deux types de perte de charge :

- *La perte de charge linéaire* : c'est la perte de charge rencontrée dans une conduite régulière. Elle croît linéairement avec la distance décrite par l'écoulement.

- *La perte de charge singulière* : elle correspond à une perte de charge importante qui se produit localement au niveau d'une singularité dans un réseau hydraulique (coude, vanne, élargissement brusque,...) suite à la perturbation de la structure de l'écoulement.

Les grandeurs hydrauliques caractéristiques de ces écoulements utilisées en pratique correspondent à la vitesse et à la pression moyennes sur la section données par les relations suivantes :

$$V = \frac{1}{S} \int_S v ds = \frac{Q_v}{S} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{S} \int_S p ds \quad (6-38)$$

Q_v étant le débit volumique de l'écoulement.

La charge hydraulique sera définie au niveau d'une section S de la conduite par son expression suivante :

$$H = \alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + Z_G \quad (6-39)$$

où Z_G est la cote du centre de masse de la section S donné par :

$$Z_G = \frac{1}{S} \int_S z ds \quad (6-40)$$

et α un coefficient adimensionnel obtenu suite à la prise de la moyenne du terme de la charge cinétique. Il est donné par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{v}{V}\right)^3 ds \quad (6-41)$$

Ce coefficient reste pour un écoulement turbulent de l'ordre de 1.1

Si on considère une conduite horizontale comme le montre la figure suivante :

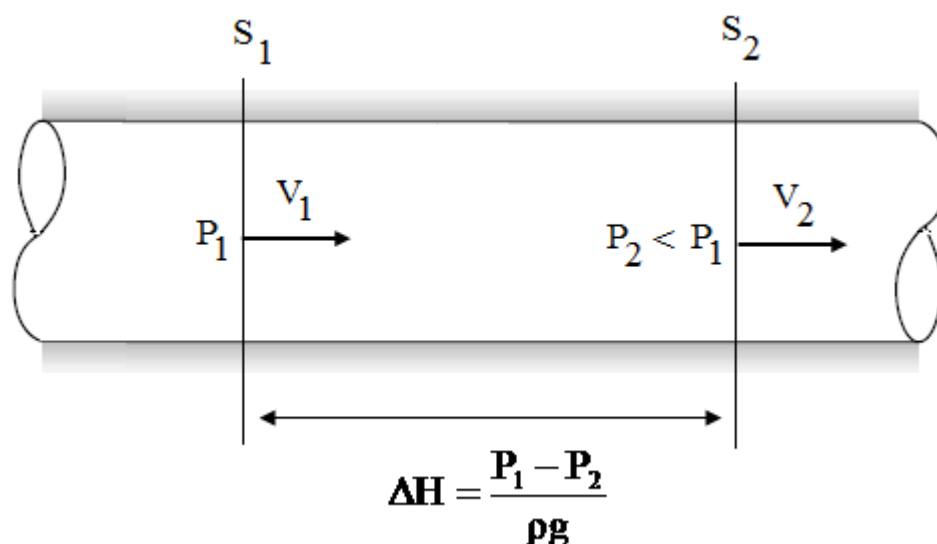


Figure 2 : perte de charge entre deux sections

La perte de charge linéaire se manifeste dans ce cas par une chute de la pression entre les sections S_1 et S_2 :

$$\Delta H_{S_1 \rightarrow S_2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} \quad (6-42)$$

6.5.1 Perte de charge linéaire en conduite lisse

On se propose d'exprimer par analyse dimensionnelle la variation de la pression par unité de longueur $\frac{\Delta P}{L}$ en fonction des paramètres caractéristiques de l'écoulement dans le cas d'une conduite lisse. Ceci revient à déterminer une relation de la forme :

$$\mathfrak{F} \left(\frac{\Delta P}{L}, \rho, \nu, V, D \right) = 0 \quad (6-43)$$

Cette relation s'écrit également sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\mathfrak{F} \left(\frac{\Delta P/L}{M_e L_e^{-2} T_e^{-2}}, \frac{\rho}{M_e L_e^{-3}}, \frac{\nu}{L_e^2 T_e^{-1}}, \frac{V}{L_e T_e^{-1}}, \frac{D}{L_e} \right) = 0 \quad (6-44)$$

Si on choisit comme échelles caractéristiques :

$$L_e = D \quad (6-45)$$

$$M_e = \rho D^3 \quad (6-46)$$

$$T_e = DV^{-1} \quad (6-47)$$

La relation (6-44) s'écrit :

$$\mathfrak{F} \left(\frac{\Delta P/L}{\rho V^2 D^{-1}}, 1, \frac{v}{DV}, 1, 1 \right) = 0 \quad (6-48)$$

On voit apparaître dans cette relation un seul paramètre adimensionnel correspondant au nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{VD}{v} \quad (6-49)$$

Ce qui permet d'exprimer $\frac{\Delta P}{L}$ comme suit :

$$\frac{\Delta P}{L} = \rho \frac{V^2}{D} f(R_e) \quad (6-50)$$

En pratique, on se base sur la relation (6-50) pour établir la formule universelle de la perte de charge linéaire (ou la formule de Darcy-Weisbeg) :

$$\Delta H_{S_1 \rightarrow S_2} = \frac{\Delta P}{\rho g} = \lambda \frac{V^2 L}{2g D} \quad \text{avec } \lambda = \lambda(R_e) \quad (6-51)$$

6.5.1.1 Exemple 1 : Ecoulement de Poiseuille

La relation analytique (4-44) de l'écoulement de Poiseuille développée au chapitre 4 permet d'exprimer analytiquement le gradient de pression longitudinal en situation d'écoulement laminaire comme le montre la relation (4-48) qui s'écrit :

$$\frac{dp}{dz} = - \left(\frac{8\mu}{R^2} \right) V \quad (6-52)$$

On retrouve ainsi dans le cas de l'écoulement laminaire dans une conduite une expression exacte de la perte de charge similaire à la formule (6-51) avec un coefficient de perte de charge qui s'écrit de manière exacte :

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \quad (6-53)$$

6.5.1.2 Exemple 2 : Formulation empirique de Blasius

On note également qu'en régime turbulent en conduite lisse ce coefficient de perte de charge λ s'exprime empiriquement en fonction du nombre de Reynolds à l'aide de la relation de Blasius :

$$\lambda = \frac{0.316}{R_e^{0.25}} \quad (6-54)$$

6.5.2 Perte de charge linéaire en conduite rugueuse

La rugosité de la conduite joue un rôle essentiel dans les effets de frottement qui s'exercent sur l'écoulement en contact avec la paroi, et par conséquent sur la perte de charge. On caractérise cette rugosité par une échelle de longueur caractéristique ε qui diffère selon le matériau et le vieillissement de la conduite.

Si on désire inclure l'effet de la rugosité dans l'expression de la perte de charge linéaire par analyse dimensionnelle, la relation (6-43) va être généralisée pour se mettre sous la forme suivante:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\Delta P}{L}, \rho, \nu, V, D, \varepsilon\right) = 0 \quad (6-55)$$

Et par suite sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\Delta P/L}{M_e L_e^{-2} T_e^{-2}}, \frac{\rho}{M_e L_e^{-3}}, \frac{\nu}{L_e^2 T_e^{-1}}, \frac{V}{L_e T_e^{-1}}, \frac{D}{L_e}, \frac{\varepsilon}{L_e}\right) = 0 \quad (6-56)$$

En choisissant les mêmes échelles caractéristiques de temps, de masse et de longueur, cette relation s'écrit :

$$\mathfrak{F} \left(\frac{\Delta P/L}{\rho V^2 D^{-1}}, 1, \frac{v}{DV}, 1, 1, \frac{\varepsilon}{D} \right) = 0 \quad (6-57)$$

Ce qui permettra enfin d'exprimer la perte linéaire par la même relation (6-51), où le coefficient des pertes de charge va être fonction de deux paramètres adimensionnels :

$$\lambda = \lambda(R_e, \frac{\varepsilon}{D}) \quad (6-58)$$

On note à titre d'exemple la formulation empirique de Colebrook-White qui exprime une telle fonction. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) \right) \quad (6-59)$$

Comme cette relation ne permet pas d'explicitement analytiquement λ , un diagramme (dit diagramme de Moody) construit à la base de cette formulation permet de déduire la valeur de ce coefficient connaissant le couple $(R_e, \frac{\varepsilon}{D})$

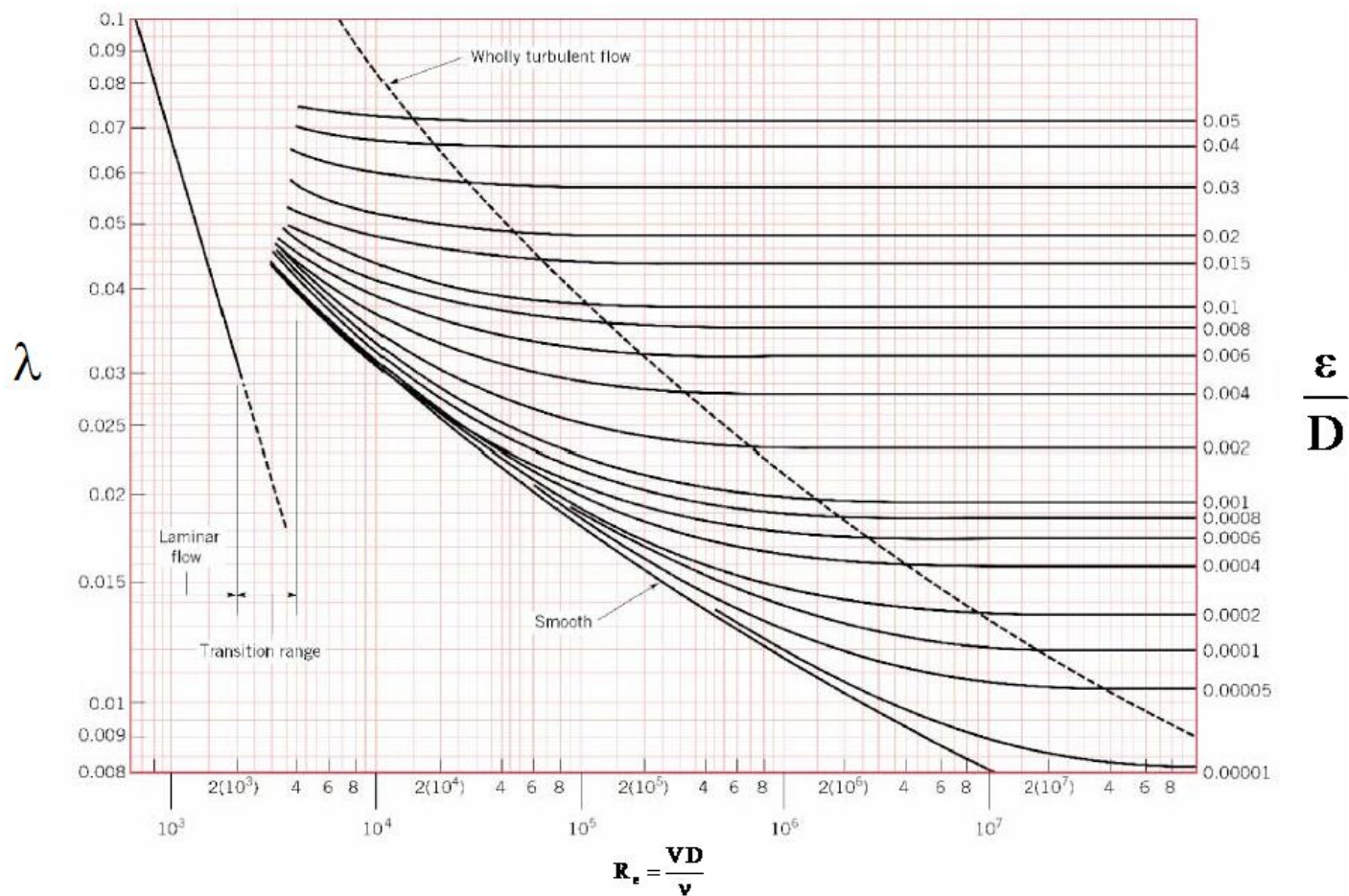


Figure 3 : Diagramme de Moody

Chapitre 7 : Ecoulements potentiels

7.1 Introduction

7.2 Equations fondamentales de la dynamique des écoulements potentiels

7.3 Ecoulements potentiels bidimensionnels

7.4 Etude de quelques solutions élémentaires

7.4.1 Ecoulement uniforme

7.4.2 Ecoulement source ou puits

7.4.3 Tourbillon

7.4.4 Doublet

7.5 Méthode de superposition : étude de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre

7.5.1 Ecoulement potentiel autour d'un cylindre

7.5.2 Effort exercé sur le cylindre - Paradoxe d'Alembert

7.5.3 Ecoulement potentiel autour d'un cylindre en rotation

7.1 Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre de revenir sur la classe des écoulements potentiels que nous avons déjà introduits au chapitre 5. L'étude de cette classe d'écoulements est très utile du point de vue des applications pratiques et ceci pour deux raisons essentielles :

- Dans un grand nombre de cas pratiques les écoulements observés sont caractérisés par des nombres de Reynolds très élevés. Les effets visqueux sont alors dominés par les effets inertiels et l'hypothèse d'écoulement de fluide parfait demeure satisfaite en première approximation conformément aux résultats de l'analyse dimensionnelle développée au chapitre précédent.
- D'autre part, le théorème de Lagrange que nous avons vu au chapitre 5 stipule que pour un fluide parfait barotrope, si son écoulement est irrotationnel à un instant donné, il demeure irrotationnel aux instants ultérieurs. Comme l'écoulement d'un fluide autour d'un objet est généré généralement suffisamment loin à partir d'un état de fluide au repos ou en mouvement uniforme. Il en résulte que l'écoulement maintient une structure irrotationnelle au voisinage de l'objet indépendamment de la particularité géométrique de ce dernier.

La description mathématique de cette classe d'écoulements se ramène à une équation aux dérivées partielles linéaire de type Laplace. Cette simplification permet d'avoir recours à toutes les possibilités de résolution analytique développées pour l'intégration de ce type d'équation.

7.2 Equations fondamentales de la dynamique des écoulements potentiels

Conformément à ce que nous avons développé au chapitre précédent d'analyse dimensionnelle, l'hypothèse d'un nombre de Reynolds infini nous permet de déduire à partir du système (6-10) (voir parag. 6.2.2 au chapitre 6) les équations fondamentales décrivant l'écoulement potentiel sous leurs formes adimensionnelles. Le nouveau système dit d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0 \quad (7-1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{g}_i \quad (7-2)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

- En contact avec une paroi solide animée d'une vitesse $\bar{\mathbf{W}}$: condition de glissement

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{n} \quad (7-3)$$

- A l'infini : les conditions de l'écoulement non perturbé par la présence de l'obstacle

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}}_\infty \quad \text{et} \quad \bar{p} = \bar{P}_\infty \quad (7-4)$$

S'ajoute à ces équations la condition d'irrotationnalité :

$$\nabla \wedge \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (7-5)$$

Cette condition nous a permis d'introduire (voir l'équation (5-18) au chapitre 5) le potentiel scalaire de vitesse $\bar{\Phi}$ d'où dérive la vitesse :

$$\bar{\mathbf{v}} = \nabla \bar{\Phi} \quad (7-6)$$

En injectant (7-6) dans l'équation de conservation de la masse (7-1), nous déduisons l'équation de Laplace régissant le potentiel de vitesse :

$$\Delta \bar{\Phi} = 0 \quad (7-7)$$

Le problème se ramène alors à la résolution de l'équation linéaire de Laplace compte tenu des conditions aux limites (7-3) et (7-4) .

Connaissant $\bar{\Phi}$, nous pouvons déduire d'après (7-6) le champ de vitesse. D'autre part, les hypothèses vérifiées dans ce cas d'écoulement (fluide parfait barotrope et écoulement irrotationnel) nous permettent d'utiliser la deuxième forme du théorème de Bernoulli pour déduire la pression. L'hydrodynamique de l'écoulement potentiel sera ainsi intégralement décrite.

Nous rappelons que la deuxième forme du théorème de Bernoulli stipule qu'à un instant t donné, la quantité :

$$\mathfrak{I}(t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (7-8)$$

est constante en tout point du domaine de l'écoulement (voir parag. 5.3.3 au chapitre 5).

7.3 Écoulements potentiels bidimensionnels

Nous avons déjà vu au chapitre 2 un autre champ scalaire qu'est la fonction courant ψ . En effet, nous avons introduit pour les écoulements bidimensionnels de fluides incompressibles la fonction courant ψ à partir de laquelle les composantes du vecteur vitesse se déduisent par le biais des équations (2-40) (voir chapitre 2). Elles s'écrivent :

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \quad (7-9)$$

$$\bar{v} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \quad (7-10)$$

Si de plus l'écoulement est irrotationnel, comme il est bidimensionnel dans le plan (xy), l'irrotationnalité se réduit à une seule équation :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (7-11)$$

En injectant les expressions (7-9) et (7-10) dans l'équation (7-11), nous déduisons que la fonction courant obéit également à l'équation de Laplace :

$$\Delta \bar{\Psi} = 0 \quad (7-12)$$

Nous déduisons alors que les écoulements potentiels plans admettent à la fois le potentiel Φ et la fonction courant ψ qui sont toutes les deux des harmoniques (solutions de l'équation de Laplace).

D'autre part, les équations (7-6), (7-9) et (7-10) montrent que le potentiel Φ et la fonction courant ψ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \quad (7-13)$$

Nous déduisons alors que Φ et ψ sont des fonctions harmoniques conjuguées.

Cette propriété mathématique nous permet dans un premier temps de montrer que les courbes d'iso-valeurs de Φ et de ψ constituent un réseau orthogonal appelé *réseau hydrographique*.

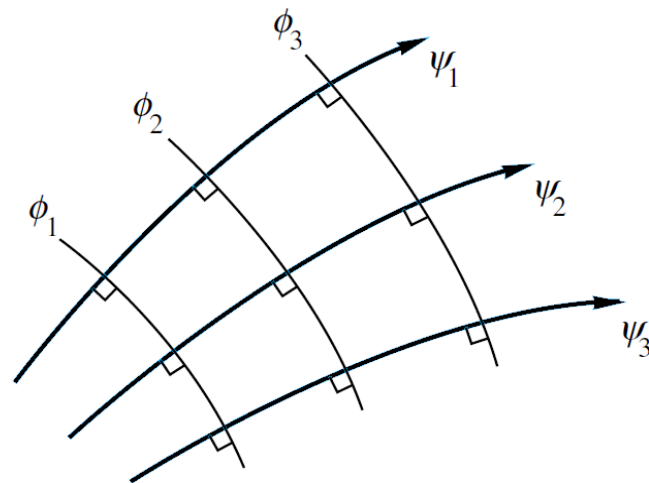


Figure 1 : Réseau hydrographique orthogonal

Elle nous permet également de définir, dans un deuxième temps, le potentiel complexe $f(z)$ comme une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ définie par :

$$f(z) = \Phi(x, y) + i \Psi(x, y) \quad (7-14)$$

D'après la théorie des fonctions holomorphes, nous définissons autan la vitesse complexe $w(z)$ par dérivation du potentiel complexe $f(z)$. Elle s'écrit compte tenu de (7-13) :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = u(x, y) - i v(x, y) \quad (7-15)$$

La connaissance du potentiel complexe $f(z)$ nous permet alors de remonter à toutes les caractéristiques de la dynamique de l'écoulement potentiel. Réciproquement, toute fonction holomorphe peut jouer le rôle de potentiel complexe d'un écoulement potentiel plan.

D'après la linéarité du problème, la superposition de deux fonctions potentielles complexes permet de définir une troisième configuration d'écoulement. En pratique, nous disposons d'une série d'écoulements potentiels élémentaires dont les fonctions potentiels complexes sont bien connues et répertoriées. L'étude d'une nouvelle situation d'écoulement s'approche par une superposition de quelques unes parmi ces potentiels élémentaires. Une telle démarche se base en grande partie sur l'intuition physique.

7.4 Etude de quelques solutions élémentaires

7.4.1 Ecoulement uniforme

Soit le potentiel complexe :

$$f(z) = a z \quad \text{avec} \quad a = Ue^{-i\alpha} \quad (7-16)$$

L'écoulement potentiel correspondant est un écoulement uniforme à la vitesse U faisant un angle α avec l'axe des x . En adoptant l'écriture trigonométrique $z = re^{i\theta}$, la partie imaginaire de f s'écrit :

$$\text{Im}(f(z)) = U r \sin(\theta - \alpha) \quad (7-17)$$

les lignes de courant définies par la relation $\Psi = \text{cte}$ sont données par l'équation :

$$\theta = \alpha + k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7-18)$$

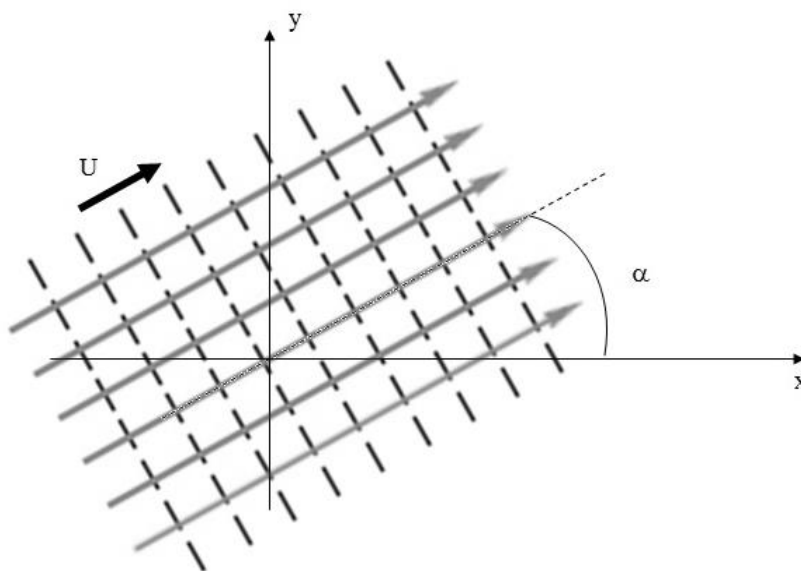


Figure 2 : Ecoulement uniforme

7.4.2 Ecoulement source ou puits

Soit le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \text{Log } z \quad (7-19)$$

Où Q est une constante réelle. Ce potentiel correspond à un écoulement source ($Q > 0$) ou puits ($Q < 0$) de débit Q situé à l'origine. Ce potentiel s'écrit également :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} r + i \left(\frac{Q\theta}{2\pi} \right) \quad (7-20)$$

Les lignes de courant sont alors des droites concourantes et les surfaces équipotentiels sont des cercles concentriques à l'origine définies respectivement par :

$$\theta = \text{Cte} \quad \text{et} \quad r = \text{Cte} \quad (7-21)$$

Le réseau hydrographique se présente alors comme suit :

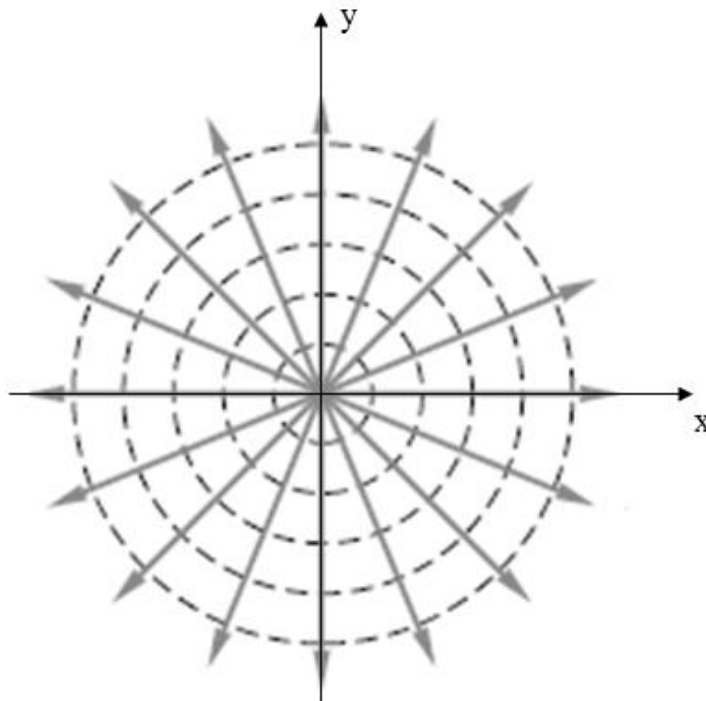


Figure 3 : Ecoulement source

La vitesse complexe s'écrit :

$$\omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta} \quad (7-22)$$

Le champ de vitesse est alors radial :

$$U_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (7-23)$$

Cette vitesse montre une singularité à l'origine où elle devient infinie. La conservation du débit s'écrit :

$$\int_C U_r r d\theta = Q = \text{Cte} \quad (7-24)$$

Où C est un contour fermé incluant la source ou le puits. Ce résultat peut être généralisé à une source ou puits placée en un point z_0 . Le potentiel complexe s'écrit alors dans ce cas :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \text{Log}(z - z_0) \quad (7-25)$$

La vitesse complexe est donnée par la relation suivante :

$$\omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{(z - z_0)} \quad (7-26)$$

7.4.3 Tourbillon

Le tourbillon, comparé à un écoulement source ou puits, est un écoulement potentiel où les fonctions courant et potentiels s'échangent de rôles. Son potentiel complexe s'écrit :

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log}(z - z_0) \quad (7-27)$$

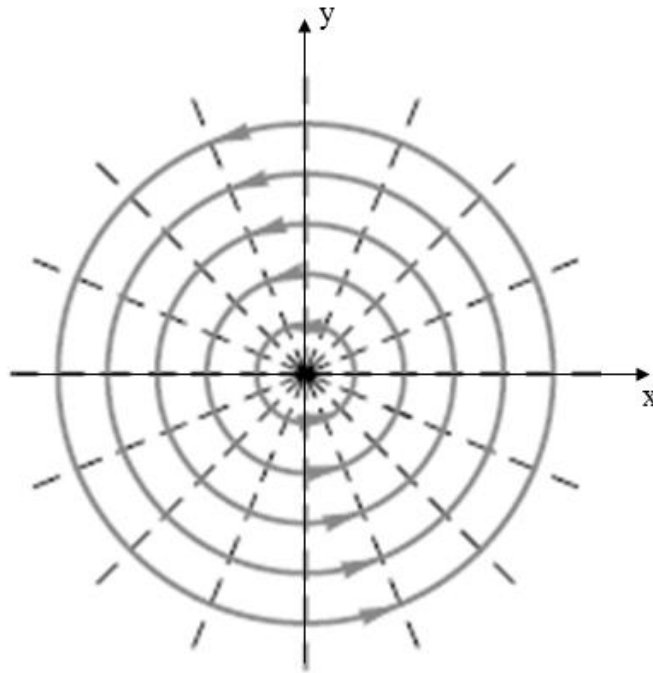


Figure 4 : Ecoulement tourbillon

Dans l'expression (7-27), Γ est une constante réelle caractéristique du tourbillon. Elle correspond à la circulation du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant fermée.

Les lignes de courant et les surfaces équipotentielles sont alors définies respectivement par :

$$r = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \theta = \text{Cte} \quad (7-28)$$

La vitesse complexe s'écrit :

$$\omega(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z - z_0)} \quad (7-29)$$

La conservation de la circulation pour cet écoulement s'écrit :

$$\int_{\text{Ligne de courant fermée}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \Gamma = \text{Cte} \quad (7-30)$$

Cette conservation s'écrit alors d'après (7-29) et (7-30) :

$$v_r = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (7-31)$$

Ce qui montre qu'il y aura une singularité à l'origine où la vitesse devient infinie.

7.4.4 Doublet

Soit l'écoulement résultant de la superposition d'une source et d'un puits de même débit Q placés en deux points symétriques par rapport à l'origine O distants d'une distance $2a$.

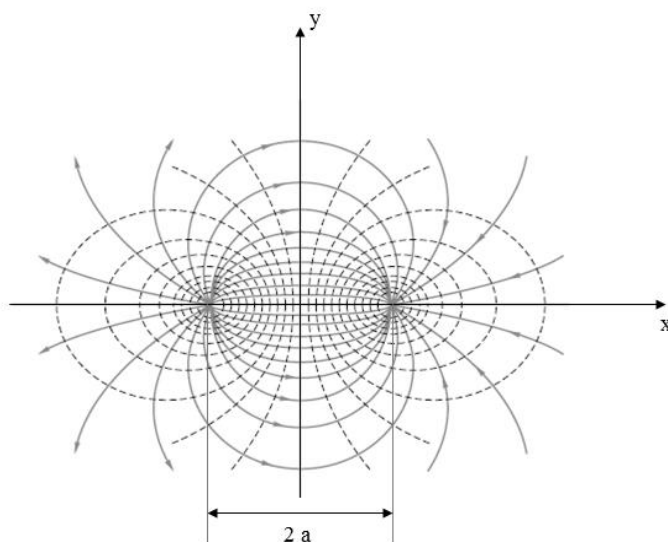


Figure 5 : Superposition source - puits

Le potentiel caractéristique de cet écoulement obtenu par superposition s'écrit :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} [\text{Log}(z+a) - \text{Log}(z-a)] \quad (7-32)$$

Il permet d'obtenir le réseau hydrographique montré à la figure 5 ci-dessus.

Si on fait tendre la distance a vers 0 tout en gardant le produit aQ constant :

$$\frac{aQ}{\pi} = k = \text{Cte} \quad (7-33)$$

Un développement limité à l'ordre 2 permet d'approximer ce potentiel comme suit :

$$f(z) \approx \frac{aQ}{\pi z} = \frac{k}{z} \quad (7-34)$$

Cet écoulement potentiel correspond à un doublet centré à l'origine dont le réseau hydrographique se montre comme suit :

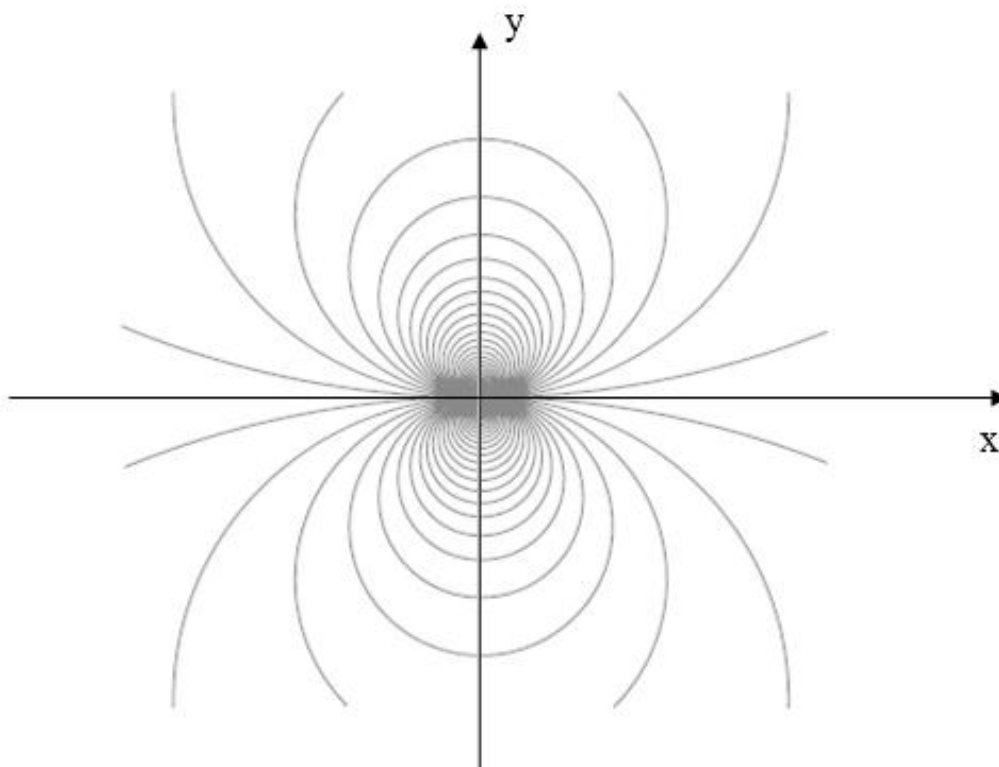


Figure 6 : Ecoulement doublet

7.5 Méthode de superposition : étude de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier le possible écoulement potentiel autour d'un cylindre, fixe ou en rotation autour de son axe, placé dans un écoulement uniforme.

7.5.1 Ecoulement potentiel autour d'un cylindre

D'après (7-16) et (7-34), le potentiel obtenu par la superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet placé à l'origine peut se mettre sous la forme :

$$f(z) = U_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (7-35)$$

La vitesse complexe correspondante est alors :

$$\omega(z) = U_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \quad (7-36)$$

Un calcul élémentaire montre que les fonctions Φ et Ψ s'écrivent :

$$\Phi = U_{\infty} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta \quad (7-37)$$

$$\Psi = U_{\infty} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta \quad (7-38)$$

Nous déduisons les résultats suivants :

- L'expression (7-35) du potentiel complexe montre qu'à l'infini ($z \rightarrow \infty$) l'écoulement est uniforme de vitesse U_{∞} et qu'au voisinage de l'origine ($z \rightarrow 0$), il s'identifie à l'écoulement d'un doublet.
- L'expression (7-38) montre qu'il existe une ligne de courant particulière correspondant à la valeur $\Psi = 0$ constituée par l'axe des abscisses (ox) et le cercle de rayon $r = a$ centré à l'origine.
- L'expression (7-36) de la vitesse complexe montre que les deux points d'intersection de ce cercle de rayon a et l'axe (ox) sont des points d'arrêt ($\omega(z = \pm a) = 0$).

Nous identifions cet écoulement à l'écoulement potentiel autour d'un cylindre centré en O comme le montre la figure suivante.

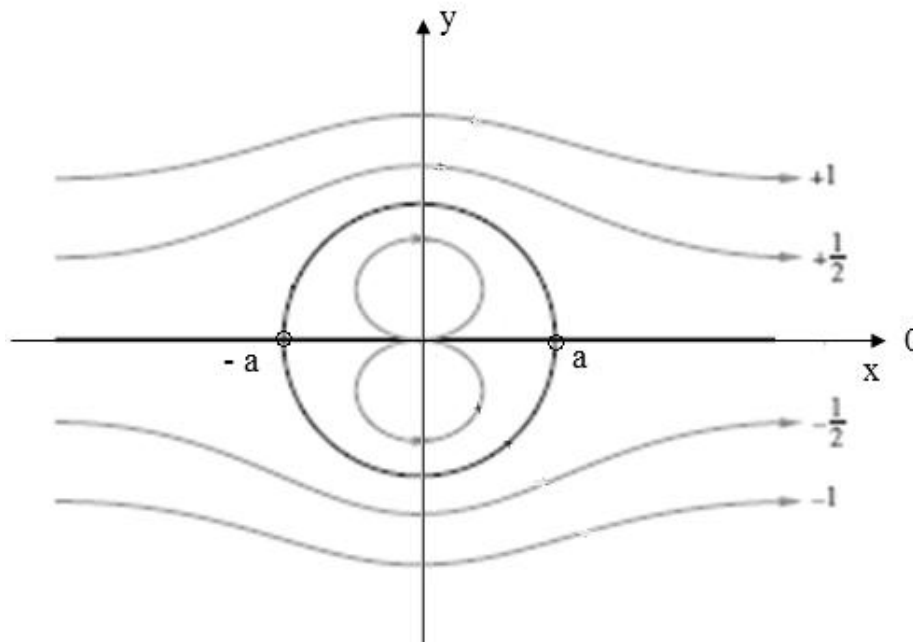


Figure 7 : Ecoulement autour d'un cylindre

Les particules fluides qui se trouvent initialement à l'intérieur du cercle de rayon a sont condamnées à y rester quelque soit le temps ultérieur.

7.5.2 Effort exercé sur le cylindre - Paradoxe d'Alembert

En partant de la relation (7-38), nous déduisons les expressions des composantes polaires du champ de vitesse de l'écoulement autour du cylindre qui s'écrivent :

$$u_r(r, \theta) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad (7-39)$$

$$u_\theta(r, \theta) = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad (7-40)$$

Compte tenu des propriétés de stationnarité, d'irrotationnalité et de fluide parfait de cet écoulement, le théorème de Bernoulli permet de déduire dans ce cas la pression à partir de la relation suivante :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_\infty}{\rho g} + \frac{U_\infty^2}{2g} \quad (7-41)$$

Il en résulte que :

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho(U_{\infty}^2 - v^2) \quad (7-42)$$

Ce résultat montre, compte tenu de l'imperméabilité du cylindre ($u_r(r = a, \theta) = 0$) et (7-38), que la pression est distribuée sur le cylindre selon la relation suivante :

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 [1 - 4 \sin^2 \theta] \quad (7-43)$$

Cette répartition montre que la pression est maximale sur le cylindre au niveau des points d'arrêt. Elle est souvent décrite par l'intermédiaire d'un coefficient adimensionnel dit coefficient de pression C_p donné par :

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (7-44)$$

L'effort exercé par l'écoulement potentiel sur le cylindre est un effort de pression qui s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{eclt} \rightarrow \text{cylindre}} = \int_{\text{cylindre}} p(r = a, \theta) \mathbf{a}_{\mathbf{u}_r} d\theta \quad (7-45)$$

Comme la distribution de la pression sur le cylindre est symétrique par rapport à θ , Cet effort est ainsi nulle.

Ce résultat stipule l'absence de tout effort exercé par l'écoulement potentiel sur le cylindre. Ceci implique qu'un cylindre se déplaçant dans un fluide au repos supposé parfait ne subit aucun effort de traînée, ce qui est évidemment contredit par les simples observations de la vie courante. Ce paradoxe est appelé en mécanique des fluides *le paradoxe d'Alembert*.

7.5.3 Écoulement potentiel autour d'un cylindre en rotation

Si on superpose au potentiel précédent (7-35) un tourbillon à l'origine de circulation caractéristique Γ . Le nouveau potentiel résultant s'écrit alors :

$$f(z) = U_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log } z \quad (7-46)$$

La vitesse complexe correspondante est :

$$\omega(z) = U_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad (7-47)$$

Nous vérifions que ce nouveau écoulement garde le cercle de rayon a comme ligne de courant. En effet, si on se place sur ce cercle ($z = a e^{i\theta}$) ce potentiel s'écrit :

$$f(z) = (2a \cos\theta U_{\infty} + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}) - i \left(\frac{\Gamma \text{Log } a}{2\pi} \right) \quad (7-48)$$

Cependant concernant les points d'arrêt, trois cas s'envisagent. En effet, ces points sont solutions de l'équation $\omega = 0$, ce qui nous ramène à résoudre :

$$z^2 - \left(\frac{i\Gamma}{2\pi U_{\infty}} \right) z - a^2 U_{\infty} = 0 \quad (7-49)$$

- Si $|\Gamma| < 4\pi a U_{\infty}$: cette équation admet deux solutions conjuguées

$$z = a e^{\pm i\gamma} \quad \text{avec} \quad \sin \gamma = \frac{\Gamma}{4\pi a U_{\infty}} \quad (7-50)$$

L'écoulement admet alors deux points d'arrêt sur le cercle de rayon a symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Voir figure 8.

- Si $|\Gamma| = 4\pi a U_{\infty}$: cette équation admet une solution double $z = i a$. L'écoulement admet alors un unique point d'arrêt sur le cercle de rayon a d'affixe z . Voir figure 9.

- Si $|\Gamma| > 4\pi a U_{\infty}$: cette équation admet deux solutions non situées sur le cercle dont une seule est à l'extérieur. L'écoulement extérieur admet dans ce cas un unique point d'arrêt comme le montre la figure 10

Ces situations d'écoulement potentiel s'approchent de l'écoulement observé autour d'un cylindre placé dans un écoulement uniforme et animé d'une rotation autour de son axe à la vitesse

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi a^2}$$

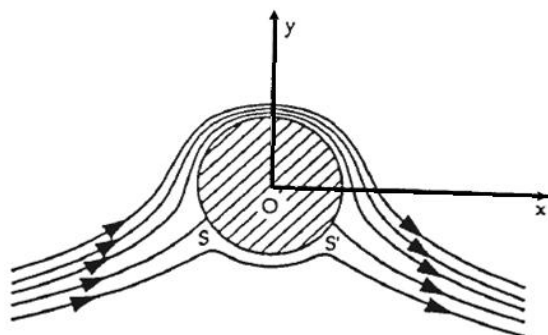


Figure 8 : $|\Gamma| < 4\pi a U_\infty$

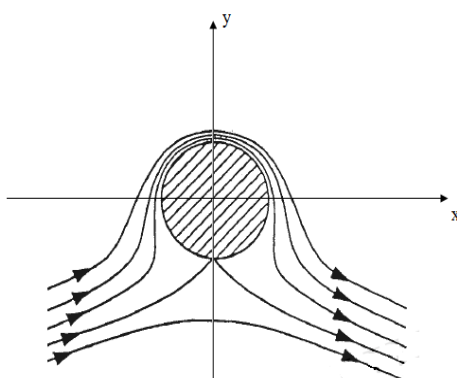


Figure 9 : $|\Gamma| = 4\pi a U_\infty$

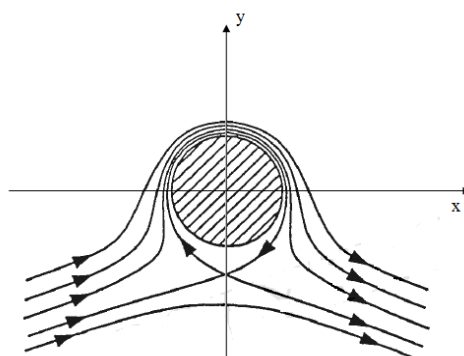


Figure 10 : $|\Gamma| > 4\pi a U_\infty$

Chapitre 8 : Couche limite

8.1 Introduction

8.2 Approche par la méthode des développements raccordés

8.2.1 Ecoulement extérieur : problème singulier

8.2.2 Ecoulement intérieur : Equations de Prandtl

8.2.3 Etablissement de l'équation de la fonction courant

8.3 Grandeurs caractéristiques d'une couche limite

8.3.1 Epaisseurs caractéristiques

8.3.2 Coefficient de frottement pariétal

8.4 Couche limite sur plaque plane sans gradient de pression : solution de Blasius

8.4.1 Solution affine

8.4.2 Grandeurs caractéristiques

8.1 Introduction

Nous avons mentionné dans les chapitres précédents que la plupart des écoulements rencontrés dans les applications pratiques, aussi bien en écoulements confinés comme en hydraulique en charge qu'en écoulements extérieurs tels qu'en aérodynamique ou en hydrodynamique navale, se produisent à des nombres de Reynolds très élevés. Pour ce fixer les idées, nous citons à titre d'exemple qu'un écoulement de l'eau dans une conduite de 1 m de diamètre à une vitesse de 1 m/s se produit à un nombre de Reynolds égal à 10^6 . L'écoulement également autour d'un objet de dimension caractéristique 1 m se déplaçant dans l'air ambiante à une vitesse de 100 m/s est caractérisé par un nombre de Reynolds égal à 7×10^6 (la viscosité cinématique de l'air ambiante est voisine de 1.4×10^{-5} m²/s). Malgré que les fluides mis en jeu dans ces écoulements sont réels, les effets visqueux sont alors dominés par les effets inertiels et l'hypothèse de fluide parfait reste assez valable pour décrire en première approximation les écoulements dans de tels systèmes réels.

Cependant, cette approximation reste insuffisante pour décrire tous les mécanismes qui se produisent dans un écoulement en présence d'une structure solide et conduit à des résultats incohérents avec les observations expérimentales. Nous pouvons mentionner à titre d'exemple le résultat paradoxal que nous avons vu au chapitre précédent lorsqu'un cylindre est animé d'un mouvement de translation uniforme dans un fluide parfait au repos. Il sera en effet soumis à une force de traînée nulle ce que contredisent formellement les simples observations de la vie courante.

D'un point de vue physique, c'est la condition d'adhérence entre un fluide réel et une paroi qui est à l'origine de cette incohérence. Cette condition est en effet substituée par une condition de glissement pour un fluide parfait ce qui nous éloigne de la réalité.

Dans le cas des fluides réels, la condition de non glissement en contact avec une paroi est toujours vérifiée même si l'écoulement se produit loin de la paroi à grande vitesse. Une telle contrainte impose le développement au voisinage immédiat de la paroi d'une zone de l'écoulement où les effets visqueux sont prépondérants. Cette zone de l'écoulement appelée *couche limite* est caractérisée par des forts gradients transversaux de vitesse (comparés aux gradients longitudinaux) suite à la grande variation de la vitesse en s'éloignant de la paroi. Ceci engendre des taux de déformations intenses et l'écoulement demeure fortement rotationnel dans cette couche même si l'écoulement extérieur maintient un comportement irrotationnel. Une description raffinées de la structure de l'écoulement dans cette couche limite avec une démarche de raccordement avec l'écoulement observé à l'extérieur

s'avère nécessaire pour décrire de manière cohérente l'écoulement de fluide réel en présence d'une paroi solide.

Une description de la structure de l'écoulement dans cette couche ainsi que ses paramètres caractéristiques constituent l'objet de ce chapitre.

8.2 Approche par la méthode des développements raccordés

Pour mieux mettre en évidence les mécanismes qui se produisent dans la couche limite, nous considérons le cas simplifié d'un écoulement non pesant stationnaire parallèle ($U_e(x)$, $p_e(x)$) d'un fluide réel incompressible de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν , dans lequel sera placée dans la direction de l'écoulement une plaque plane semi-infinie. Nous notons u et v les composantes longitudinale (direction x) et transversale (direction y) de l'écoulement.

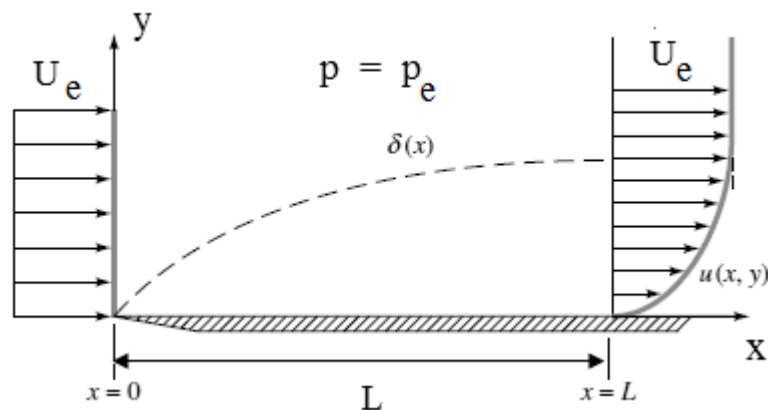


Figure 1 : couche limite sur plaque plane

La présence de la plaque ne va pas ainsi perturber la structure de l'écoulement à l'infini tout en imposant une condition d'adhérence du fluide à son contact. L'écoulement extérieur est susceptible de subir des accélérations longitudinales. Il admet à l'infini les valeurs limites (U_∞ , p_∞).

8.2.1 Écoulement extérieur : problème singulier

L'écoulement autour de la plaque est décrit par les équations de Navier-Stokes qui se réduisent dans cette situation bidimensionnelle à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8-1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (8-2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (8-3)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

– Au contact avec la paroi ($x \geq 0$ et $y = 0$) :

$$u = 0 \text{ et } v = 0 \quad (8-4)$$

– A l'infini ($y \rightarrow \infty$) :

$$u = U_\infty ; v = 0 ; p = p_\infty \quad (8-5)$$

Pour décrire l'écoulement autour de la plaque à une distance L du bord d'attaque, nous introduisons les échelles suivantes :

$$L_0 = L : \text{Echelle de longueur} \quad (8-6)$$

$$T_0 = \frac{L}{U_\infty} : \text{Echelle de temps} \quad (8-7)$$

$$M_0 = \rho L^3 : \text{Echelle de masse} \quad (8-8)$$

Les variables spatiales et hydrodynamiques adimensionnelles caractérisant cet écoulement seront alors :

$$\bar{x} = \frac{x}{L} ; \quad \bar{y} = \frac{y}{L} ; \quad \bar{u} = \frac{u}{U_\infty} ; \quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty} \quad \text{et} \quad \bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho U_\infty^2} \quad (8-9)$$

Le système de Navier-Stokes précédent se met ainsi sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (8-10)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (8-11)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (8-12)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

– Au contact avec la paroi ($\bar{x} \geq 0$ et $\bar{y} = 0$) :

$$\bar{u} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{v} = 0 \quad (8-13)$$

– A l'infini ($\bar{y} \rightarrow \infty$) :

$$\bar{u} = 1 ; \quad \bar{v} = 0 ; \quad \bar{p} = 1 \quad (8-14)$$

Le nombre de Reynolds qui figure dans (8-11) et (8-12) est exprimé en fonction des échelles caractéristiques de l'écoulement selon :

$$\text{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (8-15)$$

Comme la plaque est semi-infinie, ce nombre de Reynolds croît indéfiniment. Lorsqu'il atteint des valeurs très grandes, les effets inertiels seront dominants devant les effets visqueux. Le système de Navier-Stokes adimensionnel se réduit dans ce cas pour donner les équations d'Euler :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (8-16)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (8-17)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (8-18)$$

Ce système admet comme solution celle correspondant à l'écoulement extérieur :

$$\bar{u} = \bar{u}_e \quad ; \quad \bar{v} = 0 \quad ; \quad \bar{p} = \bar{p}_e \quad (8-19)$$

Cependant, cette solution est incohérente avec la condition aux limites (8-4) de non glissement. D'un point de vue mathématique, ce résultat montre que le système d'Euler dans cette situation d'écoulement admet une singularité aux points de contact avec la plaque. La solution valable dans tout le domaine de l'écoulement n'est pas définie en ces points.

D'un point de vue physique, il existe au voisinage de la plaque une zone (évanescence lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini) où les équations d'Euler ne sont plus valables. Les termes visqueux qui étaient éliminés en première approximation ne sont plus négligeables dans cette région, ils seront prépondérants et vont agir dans le sens d'atténuer rapidement la vitesse tangentielle de l'écoulement dans cette zone pour atteindre une valeur nulle sur la paroi.

Une description de l'écoulement en présence de la plaque plane par la méthode des développements raccordés consiste à la recherche de solutions pour deux problèmes distincts qui vont être raccordées en seconde étape.

Pour les grands nombres de Reynolds l'écoulement est décomposé en deux contributions :

- *Écoulement extérieur* : rencontré dès que nous nous éloignons de la plaque plane. Dans cet écoulement les effets visqueux sont négligeables et l'approximation de fluide parfait régi par les équations d'Euler reste valable. La solution $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$ et $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$ dite extérieure obtenue par la résolution de ce système d'Euler coïncide dans le cas d'écoulement que nous avons envisagé avec $U_e(x)$ et $p_e(x)$.
- *Écoulement intérieur* : $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$ correspondant à la mince région de couche limite en contact avec la plaque. Une nouvelle approximation dans laquelle les termes visqueux

ne sont plus négligés et basée sur l'introduction de nouvelles échelles caractéristiques va être adoptée pour cet écoulement intérieur.

Le raccordement entre les écoulements intérieur et extérieur s'exprime de manière schématique par les conditions suivantes :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{\bar{y} \rightarrow 0} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{U}_e(\bar{x}) \quad (8-20)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad (8-21)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{\bar{y} \rightarrow 0} \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{p}_e(\bar{x}) \quad (8-22)$$

8.2.2 Écoulement intérieur : Equations de Prandtl

La structure de l'écoulement de couche limite est fortement anisotrope. Elle est caractérisée par des taux de déformation dans la direction transversale beaucoup plus importants que les taux de déformation dans la direction longitudinale. Il serait ainsi plus adéquat de maintenir les échelles caractéristiques L et U_∞ pour la longueur et la vitesse longitudinales, et d'introduire des nouvelles échelles transversales de longueur δ et de vitesse V_e . Les variables spatiales et hydrodynamiques adimensionnelles dans la couche limite s'écrivent alors compte tenu de ce nouveau scaling comme suit :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} ; \quad \tilde{y} = \frac{y}{\delta} ; \quad \tilde{u} = \frac{u}{U_\infty} ; \quad \tilde{v} = \frac{v}{V_e} \quad \text{et} \quad \bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho U_\infty^2} \quad (8-23)$$

En insérant ces nouvelles variables adimensionnelles dans les équations de Navier-Stokes (8-10)-(8-12), il s'en suit :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{L}{\delta} \frac{V_e}{U_\infty} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (8-24)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{L V_e}{\delta U_\infty} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{L^2}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (8-25)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{L V_e}{\delta U_\infty} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\left(\frac{L U_\infty}{\delta V_e} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{L^2}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (8-26)$$

Avec la condition à la paroi :

$$\tilde{u}(\tilde{x} \geq 0, \tilde{y} = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{v}(\tilde{x} \geq 0, \tilde{y} = 0) = 0 \quad (8-27)$$

Les nouvelles échelles δ et V_e ne sont pas encore connues. Pour les déterminer, nous utilisons le *principe de moindre dégénérescence*. Ce principe consiste à la simplification du système adimensionnel (8-24)-(8-26) tout en gardant le maximum de termes. D'un point de vue physique, cette démarche consiste à obtenir un système simplifié décrivant l'écoulement tout en maintenant une prise en compte des divers phénomènes physiques mis en jeu.

Ce principe nous conduit aux relations suivantes entre les différentes échelles caractéristiques de l'écoulement :

$$\text{i.} \quad \frac{L V_e}{\delta U_\infty} \approx 1 \quad (8-28)$$

Si cette relation n'est pas satisfaite, le système (8-24)-(8-26) dégénère vers un système monodimensionnel et sera incapable de satisfaire à la fois la condition (8-27) d'adhérence à la paroi et la condition (8-20) de raccordement avec l'écoulement extérieur.

$$\text{ii.} \quad \frac{1}{\text{Re}} \frac{L^2}{\delta^2} \approx 1 \quad (8-29)$$

Cette relation permet de ne pas négliger le phénomène de diffusion transversale de la quantité de mouvement par les effets visqueux. Cet effet est loin d'être négligeable dans la couche limite et demeure de même ordre de grandeur que l'effet d'inertie.

Il s'en suit de ces conditions que les échelles caractéristiques transversales dans la couche limite sont reliées aux échelles longitudinales par l'intermédiaire du nombre de Reynolds comme le montrent les expressions suivantes :

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{et} \quad V_e = \frac{U_\infty}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (8-30)$$

D'après ces résultats, le système de Navier-Stokes dans la couche limite se simplifie tout en obéissant au principe de moindre dégénérescence. Il se réduit à la forme asymptotique suivante :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (8-31)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (8-32)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \quad (8-33)$$

Avec les conditions (8-27) d'adhérence à la paroi et (8-20)-(8-22) de raccordement avec l'écoulement extérieur. Les équations de ce système s'appellent *les équations de Prandtl* décrivant la dynamique de la couche limite.

L'équation (8-33) montre que la pression est uniforme sur la section transversale et est fonction uniquement de la position longitudinale :

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \overline{p_e(\bar{x})} \quad (8-34)$$

Le champ de pression ne subit pas ainsi une perturbation à la traversée entre l'écoulement extérieur et la couche limite. Une variation de la pression $\overline{p_e(\bar{x})}$ dans l'écoulement extérieur sera entièrement transmise à la couche limite. Comme l'écoulement extérieur est approximé par l'hypothèse de l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait, le théorème de Bernoulli permet d'établir la relation différentielle suivante :

$$U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} = 0 \quad (8-35)$$

Qui se met sous la forme adimensionnelle :

$$-\frac{d\overline{p_e}}{dx} = \overline{U_e} \frac{d\overline{U_e}}{dx} \quad (8-36)$$

Les équations générales de la couche limite dynamique se résument par conséquent dans les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \overline{U_e} \frac{d\overline{U_e}}{d\overline{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \end{array} \right. \quad (8-37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \overline{U_e} \frac{d\overline{U_e}}{d\overline{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \end{array} \right. \quad (8-38)$$

Avec les conditions aux limites et de raccord suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(\tilde{x} \geq 0, \tilde{y} = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{v}(\tilde{x} \geq 0, \tilde{y} = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (8-39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \overline{U_e}(\overline{x}) \end{array} \right. \quad (8-40)$$

Nous voyons que l'écoulement extérieur n'intervient dans les équations (8-37)-(8-40) que par le biais du champ de vitesse $\overline{U_e}(\overline{x})$.

En l'absence d'un gradient de pression longitudinal, l'équation (8-38) se réduit à un équilibre entre convection inertielle et diffusion visqueuse : La quantité de mouvement qui atteint par transport convectif une position \overline{x} est distribuée instantanément par les effets visqueux dans le plan transversal.

Ces équations sont établies pour la plaque plane mais elles restent valables quelque soit la géométrie de la paroi en introduisant l'abscisse curviligne.

8.2.3 Etablissement de l'équation de la fonction courant

Conformément aux résultats établis ci-dessus, l'écoulement de couche limite est généralement fortement rotationnel. Cependant, il maintient une structure plane en présence d'une plaque plane ou même curviligne bidimensionnelle. Nous pouvons alors définir pour cet écoulement une fonction courant adimensionnelle $\tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ telle que :

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} \quad \text{et} \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} \quad (8-41)$$

En partant de (8-38), cette fonction courant est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2} = \overline{U_e} \frac{d\overline{U_e}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^3} \quad (8-42)$$

Avec les conditions aux limites et de raccordement suivantes :

$$\tilde{\psi}(\tilde{x} \geq 0, 0) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x} \geq 0, 0) = 0 \quad (8-43)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \overline{U_e}(\tilde{x}) \quad (8-44)$$

Une intégration de ce système d'équations va être développée au paragraphe 8.4 dans le cas de l'absence d'un gradient de pression longitudinal.

8.3 Grandeurs caractéristiques d'une couche limite

8.3.1 Epaisseurs caractéristiques

a. Épaisseur locale $\delta_{0,99}$:

Nous avons déjà établi précédemment que l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de grandeur $\frac{L}{\sqrt{Re}}$. Une épaisseur locale plus précise notée $\delta_{0,99}$ est également utilisée pour estimer l'épaisseur de la couche limite localement à une position longitudinale donnée. Cette épaisseur est purement conventionnelle et ne se base sur aucun argument physique. Elle est définie telle que :

$$u(x, y = \delta_{0,99}) = 0.99 U_e(x) \quad (8-45)$$

Nous définissons de manière similaire l'épaisseur $\delta_{0,999}$.

b. Épaisseur de déplacement δ_1 :

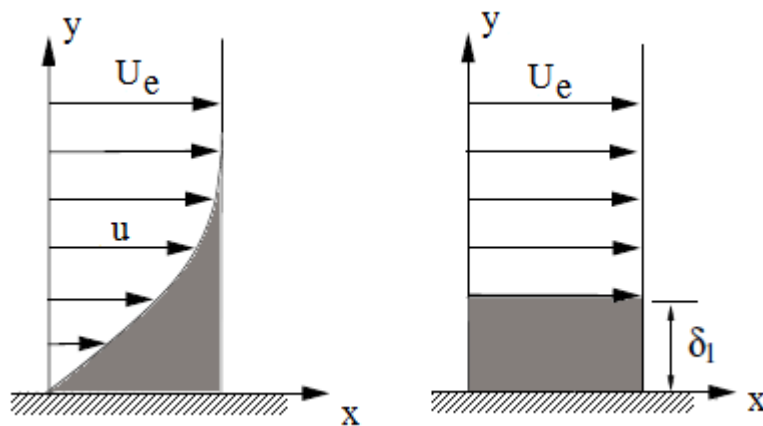


Figure 2 : signification de l'épaisseur de déplacement δ_1

la présence de la plaque plane dans l'écoulement induit un déficit de débit, de flux de quantité de mouvement et d'énergie par comparaison à la situation où elle est absente. Le déficit du débit par unité de largeur peut être estimé (comme le montre la figure 2 ci-dessus) par l'expression suivante :

$$\Delta Q = \int_0^{\infty} U_e \, dy - \int_0^{\infty} u \, dy \quad (8-46)$$

L'épaisseur de déplacement δ_1 est définie telle que $\Delta Q = U_e \delta_1$, elle s'écrit alors :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (8-47)$$

Cette épaisseur qui a une signification physique est du même ordre de grandeur que $\frac{L}{\sqrt{Re}}$.

c. Épaisseur de quantité de mouvement δ_2 :

L'épaisseur δ_2 caractérise le déficit du flux de quantité de mouvement par unité de largeur induit par les effets de cisaillement dans la couche limite. Cette épaisseur est donnée par la relation suivante :

$$\delta_2 (\rho U_e) U_e = \int_0^{\infty} (\rho U_e) u \, dy - \int_0^{\infty} (\rho u) u \, dy \quad (8-48)$$

D'où nous déduisons son expression :

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (8-49)$$

d. Épaisseur de l'énergie δ_3 :

De manière similaire, l'épaisseur δ_3 caractérise le déficit du flux de l'énergie cinétique de l'écoulement par unité de largeur induit par les effets visqueux. Cette épaisseur est donnée par la relation suivante :

$$\delta_3 \left(\frac{1}{2} \rho U_e^2 \right) U_e = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} \rho U_e^2 \right) u \, dy - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) u \, dy \quad (8-50)$$

Il s'en suit :

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u^2}{U_e^2} \right) dy \quad (8-51)$$

Les intégrales intervenant dans les expressions de ces différentes épaisseurs sont toujours convergentes. Ces épaisseurs jouent un rôle important dans les calculs pratiques de la couche limite laminaire et même de la couche limite turbulente.

8.3.2 Coefficient de frottement pariétal

La prise en compte de la couche limite permet de reproduire la force de traînée exercée par l'écoulement sur une paroi. Ce qui résout le paradoxe de l'absence de la force de traînée exercée sur un corps solide placé dans un écoulement prévue par la théorie des écoulements potentiels que nous avons mentionné au chapitre précédent (paradoxe de D'Alembert).

Nous définissons le coefficient local de frottement pariétal $C_p(x)$ par :

$$C_p(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho U_e^2(x)} \quad (8-52)$$

Où $\tau_w(x)$ est la contrainte de cisaillement à la paroi à la position x . Comme le tenseur des contraintes de cisaillement à la paroi se réduit à sa composante tangentielle, il s'en suit :

$$\tau_w(x) = \tau_{xy}(x, y=0) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(x, y=0) \quad (8-53)$$

Compte tenu des expressions (8-15) du nombre de Reynolds et (8-30) de l'échelle caractéristique de l'épaisseur δ de la couche limite, le coefficient pariétal de frottement se met en fonction des variables adimensionnelles sous la forme :

$$C_p = \frac{2}{U_e^2} \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}=0) \quad (8-54)$$

8.4 Couche limite sur plaque plane sans gradient de pression : solution de Blasius

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier le cas intéressant de la couche limite qui se développe sur une plaque plane semi-infinie placée dans un écoulement amont uniforme à gradient de pression longitudinal nul, de vitesse U_∞ et de pression p_∞ . La solution de l'écoulement extérieur dans ce cas est triviale :

$$u(x, y) = U_e(x) = U_\infty ; v(x, y) = 0 ; p(x, y) = p_e(x) = p_\infty \quad (8-55)$$

ou sous forme adimensionnelle :

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = 1 ; \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 ; \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = 1 \quad (8-56)$$

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \end{array} \right. \quad (8-57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \end{array} \right. \quad (8-58)$$

Avec les conditions aux limites et de raccord suivantes :

$$\tilde{y} = 0 ; \tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{y} = \infty ; \tilde{u} = 1 \quad (8-59)$$

Ce qui revient en introduisant la fonction courant à résoudre le problème sous la forme dimensionnel:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (8-60)$$

Avec les conditions aux limites et de raccord suivantes :

$$\psi(x, y=0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y=0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, y=\infty) = U_\infty y \quad (8-61)$$

8.4.1 Solution affine

L'obstacle solide dans cette situation n'a aucune échelle de longueur caractéristique. Nous nous attendons à trouver une solution de ce problème dite "*affine*" ou "*auto-semblable*".

La démarche d'établissement d'un comportement affine pour un système fluide aboutit dans un grand nombre de cas à des résultats très intéressants. Comme se présente le cas envisagé ici. Il s'agit de trouver un profil de la vitesse adimensionnelle dans cette couche limite indépendant de la position longitudinale x sur l'obstacle. Ce profil se présente comme suit :

$$\tilde{u} = \frac{u}{U_\infty} = \varphi(\eta) \quad (8-62)$$

où φ est une fonction donnée et η est une variable de similitude qui à priori s'exprime de la façon la plus générale comme :

$$\eta = \eta(x, y, \nu, U_\infty) \quad (8-63)$$

Pour établir ce profil, nous nous proposons de suivre une démarche purement physique sachant qu'il est possible d'aboutir au même résultat en ayant recours à un raisonnement mathématique basé sur les propriétés d'invariance du système d'équations (8-60) - (8-61).

Compte tenu des paramètres du problème, la fonction courant ψ solution de ce système sera donnée par une relation de la forme :

$$\mathfrak{F}(\psi, x, y, \nu, \rho) = 0 \quad (8-64)$$

qui s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\mathfrak{S} \left(\frac{\Psi}{L_e^2 T_e^{-1}}, \frac{x}{L_e}, \frac{y}{L_e}, \frac{v}{L_e^2 T_e^{-1}}, \frac{\rho}{M_e L_e^{-3}} \right) = 0 \quad (8-65)$$

Si on choisit les échelles caractéristiques :

$$L_e = \frac{v}{U_\infty} \quad (8-66)$$

$$M_e = \rho L_e^3 \quad (8-67)$$

$$T_e = \frac{L_e}{U_\infty} \quad (8-68)$$

La relation précédente se réduit à :

$$\mathfrak{S} \left(\frac{\Psi}{v}, \frac{x U_\infty}{v}, \frac{y U_\infty}{v} \right) = 0 \quad (8-69)$$

Nous avons déjà vu qu'une description cohérente de la couche limite nécessite l'introduction de deux échelles de longueur : une échelle longitudinale L correspondant ici à la position x et une échelle transversale δ (voir (8-30)) caractéristique de son épaisseur. Le nombre de Reynolds (8-15) s'écrit dans ce cas :

$$\text{Re}(x) = \frac{U_\infty x}{v} \quad (8-70)$$

Il s'en suit alors :

$$\delta(x) = \frac{x}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{x v}{U_\infty}} \quad (8-71)$$

Par raisonnement purement physique, l'introduction de la nouvelle échelle transversale δ dans la relation (8-69) nous mène à chercher une solution de la forme générale :

$$\mathfrak{S} \left(\frac{\Psi}{U_\infty \delta(x)}, \frac{x U_\infty}{v}, \frac{y}{\delta(x)} \right) = 0 \quad (8-72)$$

Pour que la solution cherchée soit auto-semblable, il faut que la relation (8-72) soit indépendante de la variable $\frac{xU_\infty}{\nu}$. Ceci revient à chercher une fonction courant ψ qui s'écrit sous la forme auto-semblable :

$$\frac{\psi}{U_\infty \delta(x)} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \quad (8-73)$$

Nous voyons apparaître la variable de similitude :

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}}} \quad (8-74)$$

Soit alors :

$$\psi = \sqrt{\nu U_\infty x} f(\eta) \quad (8-75)$$

En reportant cette expression auto-semblable de la fonction courant dans le système (8-60) - (8-61), nous obtenons l'équation différentielle ordinaire suivante régissant la fonction f :

$$f f'' + 2f''' = 0 \quad (8-77)$$

Les conditions aux limites vérifiées par f se déduisent à partir de (8-61) :

$$f(\eta=0) = f'(\eta=0) = 0 \quad ; \quad f'(\eta=\infty) = 1 \quad (8-78)$$

Cette équation différentielle appelée *équation de Blasius* se résout numériquement. A partir de la solution obtenue, les composantes de la vitesse dans la couche limite se déduisent comme suit :

$$\tilde{u} = \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \psi}{\partial y} = f'(\eta) \quad (8-79)$$

$$\tilde{v} = -\frac{1}{V_e} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}[\eta f'(\eta) - f(\eta)] \quad (\text{voir (8-30)}) \quad (8-80)$$

Quant à la contrainte de cisaillement, elle s'écrit :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \sqrt{v} U_{\infty}^{(3/2)} \frac{1}{\sqrt{x}} f''(\eta) \quad (8-81)$$

La fonction f' représente le profil affine de la vitesse dans la couche limite qui se développe sur plaque plane sans gradient de pression extérieur.

La figure 3 ci-dessous montre ce profil affine comparé à des résultats expérimentaux obtenus pour différents nombres de Reynolds. Cette figure montre une concordance satisfaisante entre la solution de Blasius que nous venons de développer et les observations expérimentales.

Nous notons que l'expérience montre également que cette structure d'écoulement est maintenue jusqu'à un nombre de Reynolds limite :

$$Re^{lim} \approx 3 \times 10^5 \quad (8-82)$$

Au delà de cette valeur critique l'écoulement de couche limite bascule vers un état turbulent où cette solution n'est plus valable.

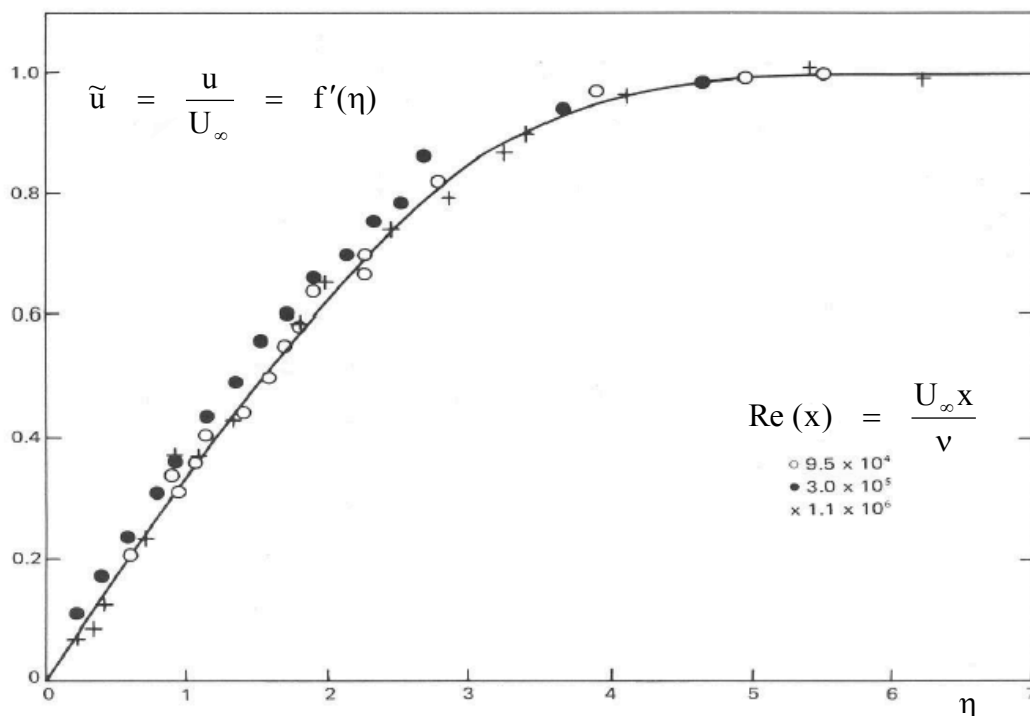


Figure 3 : profil affine de Blasius de la vitesse dans une couche limite

(Physical Fluid Dynamic, D. J. Tritton, Oxford Science Publications, 1988)

8.4.2 Grandeurs caractéristiques

D'après les résultats établis ci-dessus, la contrainte de cisaillement à la paroi a pour valeur :

$$\tau_w = \rho \sqrt{\nu} U_\infty^{(3/2)} \frac{1}{\sqrt{x}} f''(0) \quad (8-83)$$

L'un des résultats obtenu suite à la résolution numérique de l'équation de Blasius est :

$$f''(0) = 0.332 \quad (8-84)$$

Le coefficient de frottement pariétal défini par la relation (8-52) s'écrit alors :

$$C_p(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{\text{Re}(x)}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}(x)}} \quad (8-85)$$

Concernant les épaisseurs caractéristiques, l'épaisseur $\delta_{0.99}$ est telle que :

$$\tilde{u}(x, y = \delta_{0.99}) = 0.99 \quad (8-86)$$

D'après le profil affine de la vitesse (8-79), nous avons à cette épaisseur $f'(\eta) = 0.99$. Ce qui lui correspond une valeur de η sensiblement égale à 5. D'où :

$$\delta_{0.99} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 5 \quad (8-87)$$

Ce qui nous donne une épaisseur :

$$\delta_{0.99} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (8-88)$$

Les épaisseurs de déplacement δ_1 (8-47) et de quantité de mouvement δ_2 (8-49) s'expriment également compte tenu du profil affine (8-79) de la vitesse et de l'expression (8-74) de la variable de similitude η comme suit :

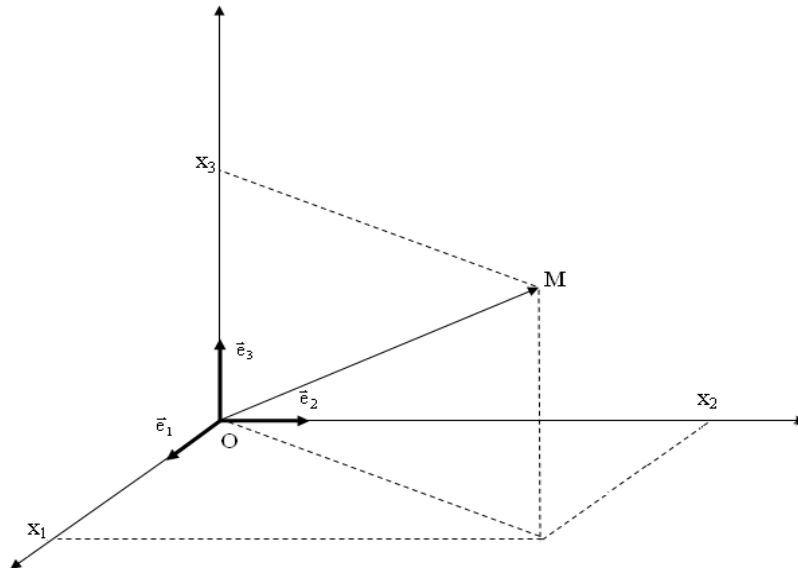
$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^\infty (1 - f'(\eta)) d\eta = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (8-89)$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^\infty f'(\eta) (1 - f'(\eta)) d\eta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (8-90)$$

Ces résultats sont d'une importance considérable dans les applications pratiques.

Annexe 1 : Equations en coordonnées cartésiennes

1.1 Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cartésiennes



Les coordonnées d'un point M sont x_i ($i = 1, 2, 3$), elles correspondent aux composantes du vecteur \mathbf{OM} dans la base orthonormée \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$).

Selon la convention d'Einstein, le vecteur \mathbf{OM} s'écrit

$$\mathbf{OM} = x_i \mathbf{e}_i \quad (\text{I-1})$$

Un déplacement élémentaire :

$$d\mathbf{l} = dx_i \mathbf{e}_i \quad (\text{I-2})$$

1.1.1 Pseudo-tenseur d'orientation

L'ensemble des tenseurs à l'ordre 3 a la structure d'un espace vectoriel réel de dimension 3^3 . Cet espace peut être généré à l'aide de la base $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \mid i, j, k = 1, 2, 3\}$ déduite à partir de la base \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$). Un tenseur \mathbf{T} à l'ordre 3 s'écrit ainsi à l'aide de ses composantes :

$$\mathbf{T} = T_{ijk} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \quad (\text{I-3})$$

On définit le pseudo-tenseur d'orientation le tenseur d'ordre 3 :

$$\boldsymbol{\theta} = \varepsilon_{ijk} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \quad (\text{I-4})$$

dont les composantes ε_{ijk} sont des fonctions alternées des indices $i ; j ; k$ tel que $\delta_{123} = 1$:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I-5})$$

Les composantes de ce tenseur vérifient les relations suivantes :

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \quad (\text{I-6})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pjk} = 2\delta_{ip} \quad (\text{I-7})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \quad (\text{I-8})$$

1.1.2 Opérateurs vectoriels

1.1.2.1 Champ scalaire

$$\varphi = \varphi(x_i) \quad (\text{I-9})$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\text{I-10})$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \quad (\text{I-11})$$

1.1.2.2 Champ vectoriel

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i \quad (\text{I-12})$$

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{I-13})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\text{I-14})$$

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (\text{I-15})$$

$$\text{Rot}(\mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} = (\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}) \mathbf{e}_i \quad (\text{I-16})$$

1.1.2.3 Champ de tenseurs à l'ordre 2

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{I-17})$$

$$\nabla \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (\text{I-18})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (\text{I-19})$$

$$\Delta \mathbf{T} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{T}) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{I-20})$$

1.1.3 Propriétés intégrales

On considère une surface fermée Σ délimitant un volume τ et une ligne fermée C délimitant une surface S . \mathbf{A} un champ vectoriel et φ un champ scalaire.

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\tau \quad (\text{1-21})$$

$$\iint_{\Sigma} \varphi \mathbf{n} \, ds = \iiint_{\tau} \nabla \varphi \, d\tau \quad (1-22)$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} \wedge \mathbf{A} \, ds = \iiint_{\tau} \nabla \wedge \mathbf{A} \, d\tau \quad (1-23)$$

$$\iint_{\Sigma} \nabla \wedge \mathbf{A} \, ds = \int_C \mathbf{A} \cdot d\vec{r} \quad (1-24)$$

1.2 Equations de Navier-Stockes

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (I-25)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + g_i \quad (I-26)$$

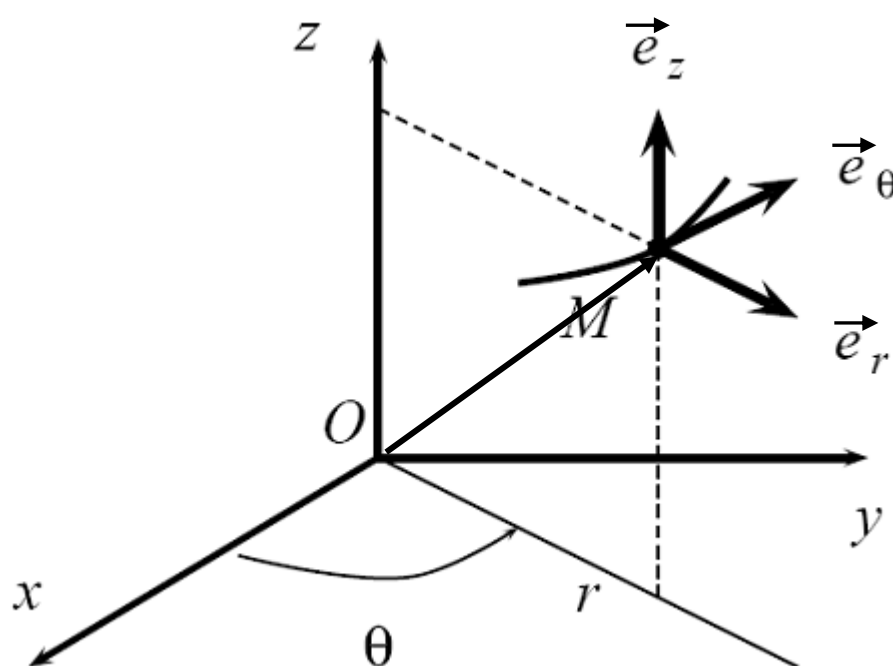
1.3 Equation de la chaleur

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = \Delta T + \rho r + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (I-27)$$

Annexe 2 : Equations en coordonnées cylindriques

2.1 Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cylindriques

2.1.1 Expression des coordonnées



$$\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (\text{II-1})$$

$$d\mathbf{l} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z \quad (\text{II-2})$$

2.1.2 Opérateurs vectoriels

2.1.2.1 Champ scalaire

$$\varphi = \varphi(r, \theta, z) \quad (\text{II-3})$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{II-4})$$

$$\Delta\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (\text{II-5})$$

2.1.2.2 Champ vectoriel

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z \quad (\text{II-6})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial\theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{II-7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{II-8})$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \mathbf{e}_r \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial v_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

2.1.2.3 Champ de tenseurs à l'ordre 2

$$\mathbf{T} = T_{ij}(r, \theta, z) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{II-9})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

2.2 Equations de Navier-Stockes

Conservation de la masse :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-11})$$

Conservation de la quantité de mouvement :

➤ Projection sur (O, \mathbf{e}_r) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r} v_\theta^2 \right) = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + g_r \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

➤ Projection sur (O, \mathbf{e}_θ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} v_r v_\theta \right) = \\ - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + g_\theta \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

➤ Projection sur (O, \mathbf{e}_z) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + g_z \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$