Université Sultane Moulay Slimane

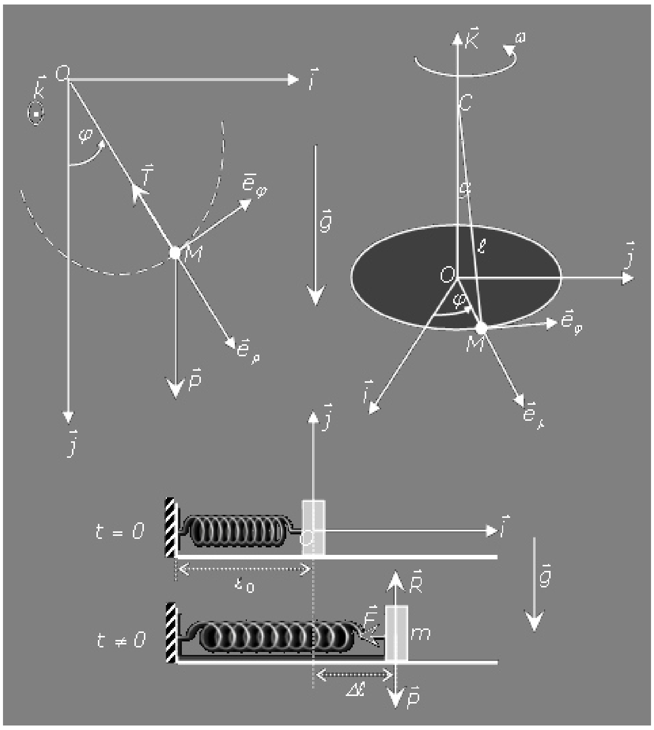
Faculté Polydisciplinaire

Béni Méllal

FILIÈRE :SMP/SMC/SMA

MODULE : M1/M1/M4

Cours de mécanique du Point Matériel



Préparé par Mohamed LAMSAADI

Année universitaire 2012-2016

Avant Propos

La mécanique du point est l'étude cinématique ou dynamique du mouvement des points matériels. La cinématique permet d'étudier les relations entre les paramètres du mouvement (position, vitesse, accélération, etc.), alors que la dynamique permet de prédire l'évolution de ces paramètres en connaissant les causes du mouvement. Celles-ci peuvent être les interactions de contact comme le frottement et la poussée, ou à distance comme l'attraction gravitationnelle et les interactions électromagnétiques. Toutes ces interactions sont modélisées par un objet physique unique: la force. Ainsi, en connaissant la force subie par le point matériel à tout moment, il est possible de prédire le mouvement.

Pour cela il est nécessaire de définir un référentiel, c'est-à-dire un repère de l'espace et une référence pour le temps (une horloge). Un point matériel est alors la donnée de quatre paramètres : trois coordonnées (x,y,z) permettant de le repérer dans l'espace, et une masse m. En pratique, cet objet représente soit un objet de petite taille (particule, petite bille, etc.), soit un objet de grande taille pour lequel on néglige les effets dus à cette taille, comme la rotation sur lui-même. Dans tous les cas, on appelle cet objet le mobile. On s'intéresse alors uniquement au mouvement du centre d'inertie ou barycentre de ce mobile.

Il est intéressant d'étudier un tel mouvement dans les cas statique et dynamique. D'une part, un point matériel est immobile dans un référentiel $\mathfrak{R}$ si sa vitesse est nulle dans $\mathfrak{R}$. D'autre part, si la somme des forces s'exerçant sur le mobile est nulle, celui-ci a un mouvement rectiligne uniforme. Si ce n'est pas le cas, il existe une accélération qui entraîne une modification de la vitesse. Ceci est étudié en détails dans le chapitre de la dynamique du point. Dans ces deux cas, on peut résumer les principales caractéristiques du comportement de tels mobiles par les lois du mouvement de Newton. Celles-ci montrent par exemple que dans le vide, tous les objets en chute libre présentent le même mouvement (ceci devient faux lorsque intervient le frottement de l'air).

La mécanique du point, malgré son apparente simplicité, permet d'établir des comportements généraux importants comme le mouvement à force centrale, la mécanique du solide, la mécanique des fluides et la mécanique des milieux continus.

Ce polycopié représente un support de cours de mécanique du point matériel. Il est destiné aux étudiants du premier semestre des filières SMP, SMC et SMA. On *souhaite que les étudiants trouveront dans ce support un bon outil de travail qui leur permettra de combler les éventuelles lacunes qui peuvent avoir lieu lors de la prise des notes pendant l'explication du cours ou des travaux dirigés par leurs enseignants.*

Ce polycopié n'est qu'un complément de cours. Il ne pourra, en aucune façon, dispenser l'étudiant de sa présence en cours.

Sommaire

Chapitre I	**Rappels et Compléments Mathématiques**

Dans ce chapitre on donne quelques outils mathématiques nécessaires au développement des calculs lors de l'étude du mouvement d'un point matériel.

I. Notion de vecteurs
I. 1. Définition

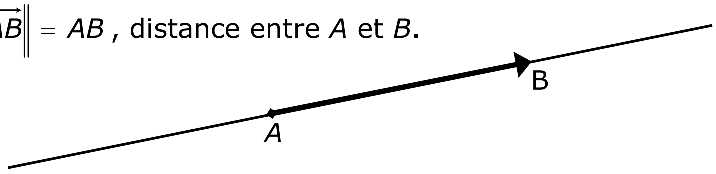
Le vecteur est une grandeur qu'on ne peut caractériser que par les quatre propriétés suivantes :

- module (intensité, norme)
- support (direction)
- sens
- origine et extrémité

On distingue trois types de vecteurs :

Exemples:

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur d'origine A et d'extrémité B, de sens de A vers B, son support est la droite (AB) et de module $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$, distance entre A et B.



I. 2. Vecteur lié

Un vecteur lié est un vecteur dont le support et le point d'application sont fixes. Ce vecteur n'a qu'une représentation possible.

Exemples : Vecteur vitesse, forces appliquées à un point matériel.

I. 3. Vecteur glissant

Un vecteur glissant est un vecteur caractérisé par son module, son sens et son support. On peut glisser ce vecteur sur son support sans changer son effet physique.

I. 4. Vecteur libre

Un vecteur libre est un vecteur dont le support et le point d'application ne sont pas fixes. Il existe alors une infinité de point de configuration de ce vecteur dans l'espace. Toutes ces représentations vectorielles sont équipollentes à ce vecteur.

Remarques :

- Toutes les grandeurs vectorielles dépendent de repères d'observation (exemples : vitesse, accélération…).
- Les grandeurs scalaires ne dépendent pas des repères d'observation (exemple : masse, température…).

II. Repérage d'un point matériel dans l'espace et dans le temps

La connaissance du mouvement d'un point matériel revient à la connaissance de sa position en fonction du temps.

II.1. Repérage de l'espace du temps

Il est indiqué par une horloge et dont l'unité de mesure du temps est la seconde (s).

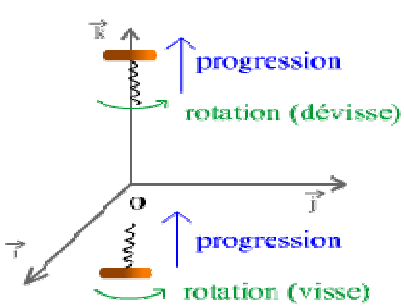
II.2. Repérage de l'espace des positions

Il est défini par un repère et un système de coordonnées.

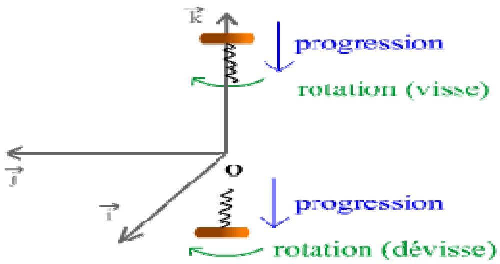
Un repère d'espace ou trièdre est un ensemble de trois axes non coplanaires (n'appartiennent pas au même plan) (Ox), (Oy) et (Oz). Le point O est appelé origine du repère noté $\Re(O, x, y, z)$. Si les axes (Ox), (Oy) et (Oz) sont perpendiculaires (normaux) deux à deux ((Ox)$\perp$(Oy), (Ox)$\perp$(Oz) et (Oy)$\perp$(Oz)), le repère $\Re$ est dit trirectangle. Si les axes (Ox), (Oy) et (Oz) obéissent à la règle du tire-bouchon, le repère $\Re$ est dit trirectangle direct.

Règle du tire-bouchon :

Le tire-bouchon se déplace dans le sens des $z > 0$, quand l'axe (Ox) est amené à se déplacer vers l'axe (Oy).



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **:** trièdre direct



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **:** trièdre indirect

Remarque : l'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère du temps constitue un référentiel.

II.3. Notion de base d'un repère d'espace

Sur chaque axe du repère $\mathfrak{R}(O, x, y,z)$, on définit un vecteur unitaire (de module égale à 1) indiquant l'orientation de l'axe.

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ des vecteurs unitaires portés, respectivement, par les axes (Ox), (Oy) et (Oz). Donc le système ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) forme une base orthonormée directe du repère $\mathfrak{R}(O, x, y,z)$.

Dans tout ce qui suit on s'intéressera aux bases orthonormées directes, c'est-à-dire les vecteurs de cette base sont orthogonaux entre eux, unitaires et forment un trièdre direct.

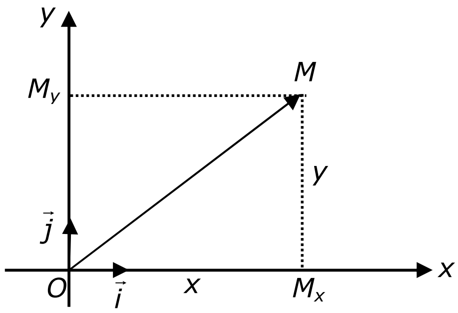
Remarque :

Tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace vectoriel s'exprime d'une manière unique dans une base. Si ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) est une base, alors $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, v_1, v_2 et v_3 sont les composantes de $\vec{v}$, respectivement suivant $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

II.4. Représentation d'un vecteur

II.4.1. *Dans le plan*

Soit (xoy) un plan muni de la base ($\vec{i}, \vec{j}$) et soit M un point appartenant à ce plan.



M_x :Projection orthogonale de M sur l'axe (Ox).

M_y :Projection orthogonale de M sur l'axe (Oy).

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} = \overline{OM_x}\vec{i} + \overline{OM_y}\vec{j}$$

$$\overline{OM_x} = x \text{ , } \overline{OM_y} = y$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j}} = (x \quad y)_{\vec{i},\vec{j}}$$

x et y sont les composantes de M. On écrit donc $M(x,y)$.

II.4.2. *Dans l'espace*

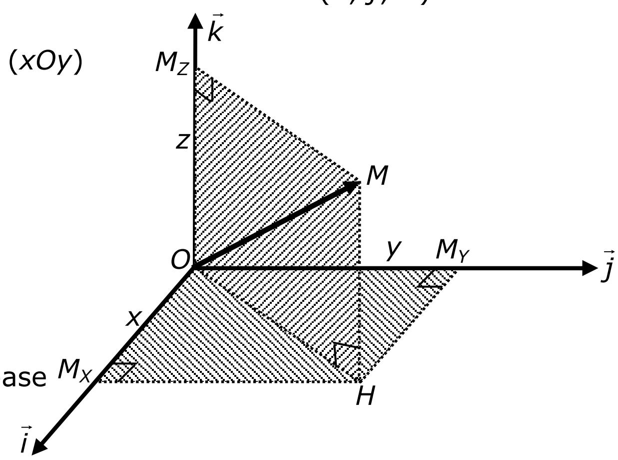
Soit $\mathfrak{R}(O, x, y,z)$un repère muni de la base orthonormée directe ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) et soit M un point de l'espace.

H : Projection orthogonale de M sur le plan (xOy)

$(MH)//(Oz)$, $(MH) \perp (xOy)$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} = (x \quad y \quad z)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$$



x, y, z sont les coordonnées de M dans la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Donc on écrit $M(x,y,z)$.

III. Opérations sur les vecteurs

Soient $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ et $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$ trois vecteurs quelconques de l'espace exprimés dans la base orthonormée directe ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

III.1. Addition

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}$$

III.2. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

$$\lambda\vec{u} = \lambda u_1\vec{i} + \lambda u_2\vec{j} + \lambda u_3\vec{k}$$

III.3. Produit scalaire

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le scalaire défini par :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2$$

Le module du vecteur $\vec{u}$ sera défini par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut être défini par :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right)$$

L'angle formé entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = Ar\cos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = Ar\cos\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}\right)$$

<u>Remarques</u> :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- $\vec{u} \bullet \vec{i} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})(1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) = u_1$, $\quad \vec{u} \bullet \vec{j} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})(0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}) = u_2$

$\vec{u} \bullet \vec{k} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})(0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}) = u_3$

- Si $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ un vecteur non nul, on peut lui faire associer un vecteur unitaire $\vec{B}$ défini par : $\vec{B} = \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \dfrac{A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}}{\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2}}$
- Le produit scalaire est invariant par tout changement de base. C'est-à-dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont exprimés dans deux bases différentes ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) et ($\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$) :

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} = u_1'\vec{i}' + u_2'\vec{j}' + u_3'\vec{k}'$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = v_1'\vec{i}' + v_2'\vec{j}' + v_3'\vec{k}'$

on aura $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = u_1'v_1' + u_2'v_2' + u_3'v_3'$. Alors on dit que le produit scalaire constitue une propriété qui décrit la conservation de la longueur dans l'espace.

- Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques, il faut exprimer ces deux vecteurs dans la même base.

III.4. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et caractérisé par :

- son module : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \left|\sin\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right)\right|$
- sa direction est perpendiculaire au plan formé à la base de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$)
- son sens est tel que le trièdre ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$) est direct.

Ce produit vectoriel peut être exprimé par :

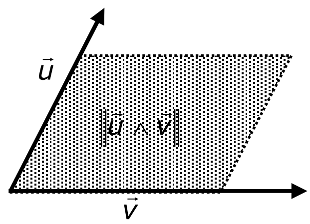
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & & v_1 \\ u_2 & \wedge & v_2 \\ u_3 & & v_3 \end{vmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

<u>Propriétés</u> :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (anti commutatif)
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
- $\lambda\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ (non associatif)

<u>Remarques</u> :

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls : $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} // \vec{v}$.
- Pour la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on a :

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{i} \bullet \vec{k} = \vec{j} \bullet \vec{k} = 0 ,\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} ,\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} ,\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

<u>Exemple</u> :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \wedge & 1 \\ 0 & & 0 \end{vmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} = (0 \times 0 - 0 \times 1)\vec{i} - (1 \times 0 - 0 \times 0)\vec{j} + (1 \times 1 - 0 \times 0)\vec{k} = \vec{k}$$

III.5. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est un vecteur défini par :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$$

et appartenant au plan $(\vec{v}, \vec{w})$.

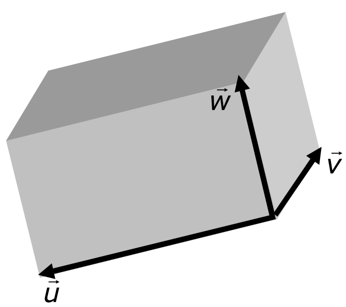
III.6. Produit mixte

Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, dans cet ordre, est un scalaire noté $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et défini par :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Toute permutation circulaire des vecteurs $\vec{u} \to \vec{v} \to \vec{w}$ laisse invariant le produit mixte c'est-à-dire $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$.

$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})|$ est le volume du parallélépipède formé par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



IV. Fonction vectorielle

IV.1. Cas d'une fonction à une seule variable

IV.1.1. *Définition*

A chaque variable x, on fait associer un vecteur $\vec{u}$, alors on définit une fonction vectorielle $\vec{u}(x)$ c'est-à-dire $x \to \vec{u}(x)$

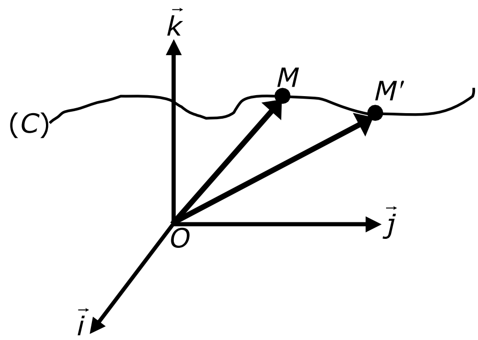
Dans une base orthonormée directe ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), $\vec{u}(x)$ est défini par les trois composantes qui dépendent de x : $\vec{u}(x) = u_1(x)\vec{i} + u_2(x)\vec{j} + u_3(x)\vec{k}$

IV.1.2. *Dérivée totale par rapport à une variable*

Soit $\vec{u}$ une fonction vectorielle qui dépend d'une variable donnée, par exemple le temps t, tel que $\vec{u}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$, O étant un point fixe et M un point matériel décrivant une trajectoire (C) quand le temps varie.

À l'instant $t + \Delta t$ le point M occupe la position M' c'est-à-dire

$\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) = \vec{u}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OM'}$



La dérivée de $\vec{u}(t)$ par rapport à t est un vecteur défini par :

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$$

On a $\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$, donc

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Si Δt tend ver 0, M' est très proche de M et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sera tangent en M à la courbe (C) et par conséquent le vecteur $\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$ deviendra tangent en M à cette courbe.

<u>Remarque</u> :

La dérivée $\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$ n'a de sens que dans un référentiel. Alors on écrit $\frac{d\vec{u}(t)}{dt / \Re}$, lorsqu'on dérive $\vec{u}$ dans $\Re$, tout en gardant les vecteurs de la base de $\Re$ comme des constantes.

IV.1.3. *Propriétés de la dérivée*

- $\vec{u} = \overrightarrow{cte} / \Re \to \frac{d\vec{u}}{dt / \Re} = \vec{0}$
- $\|\vec{u}(t)\| = cte \neq 0 \to \frac{d\vec{u}(t)}{dt / \Re} \perp \vec{u}(t)$
- $\frac{d[\vec{u}(t) + \vec{v}(t)]}{dt / \Re} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt / \Re} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt / \Re}$
- $\frac{d[\alpha\vec{u}(t) + \beta\vec{v}(t)]}{dt / \Re} = \alpha \frac{d\vec{u}(t)}{dt / \Re} + \beta \frac{d\vec{v}(t)}{dt / \Re}$ (α et β sont des constantes)
- $\frac{d[f(t)\vec{u}(t)]}{dt / \Re} = f(t)\frac{d\vec{u}(t)}{dt / \Re} + \vec{u}(t)\frac{f(t)}{dt}$ ($f(t)$ est une fonction scalaire)
- $\frac{d[\vec{u}(t)\vec{v}(t)]}{dt / \Re} = \vec{v}(t)\frac{d\vec{u}(t)}{dt / \Re} + \vec{u}(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt / \Re}$
- $\frac{d[\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)]}{dt / \Re} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt / \Re} \wedge \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \wedge \frac{d\vec{v}(t)}{dt / \Re}$

IV.1.4. *Différentielle totale*

La différentielle totale d'une fonction vectorielle à une seule variable t, $\vec{u}(t)$ est exprimée par :

$$d\vec{u}(t) = \vec{u}(t + dt) - \vec{u}(t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t / \Re} dt$$

(dans le cas d'une fonction vectorielle à une seule variable on a $\frac{d\vec{u}}{dt / \Re} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t / \Re}$)

IV.2. Cas d'une fonction à plusieurs variables

Les fonctions vectorielles à n variables peuvent être considérées comme les données de p fonctions scalaires de n variables :

$$\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{f}(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

IV.2.1. *Dérivée partielle par rapport à une seule variable*

La dérivée partielle de $\vec{f}$ par rapport à une variable x_j est la dérivée par rapport à cette variable tout en considérant les autres variables ($x_i, i \neq j$) comme des constantes. Elle est notée : $\left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}\right)_{\substack{x_i = cte \\ i \neq j}}$

IV.2.2. *Différentielle totale*

La différentielle totale d'une fonction vectorielle à *n* variables, $\vec{f}(x_1, x_2, ..., x_n)$ est exprimée par :

$$d\vec{f} = \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_i = cte \\ i \neq 1}} dx_1 + \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_2}\right)_{\substack{x_i = cte \\ i \neq 2}} dx_2 + ... + \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}\right)_{\substack{x_i = ct \\ i \neq n}} dx_n$$

<u>Exemple</u> :

Soit $\vec{f}(x, y, z)$ une fonction vectorielle à trois variables définie par :

$$\vec{f}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}.$$

$$d\vec{f} = \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right)_{y,z = cte} dx + \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\right)_{x,z = cte} dy + \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}\right)_{x,y = ct} dz$$

On a $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = 2x\vec{i} + z\vec{k}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \vec{j}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = x\vec{k}$ alors $d\vec{f} = 2xdx\vec{i} + dy\vec{j} + (zdx + xdz)\vec{k}$

V. Equations différentielles

V.1. Equations différentielles du 1er ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une relation sous la forme :

$$f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0$$

avec *x* une fonction de *t*.

<u>Exemple</u> : $\frac{dx}{dt} + 3x - t^2 = 0$

La résolution de cette équation revient à exprimer *x* en fonction de *t* en tenant compte des conditions imposées (conditions initiales).

V.2. Quelques types d'équations différentielles du 1er ordre

V.2.1. *Equations différentielles à variables séparées (ou séparables)*

Si $f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0$ peut se mettre sous la forme $\frac{dx}{dt} = \frac{h(t)}{g(x)}$ où $h(t)$ est une fonction uniquement de *t* et $g(x)$ une fonction uniquement de *x*, on dit que l'on a une équation différentielle à variables séparées.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h(t)}{g(x)} \rightarrow g(x)dx = h(t)dt \rightarrow \int h(t)dt = \int g(x)dx \Rightarrow H(t) = G(x) + C$$

H et *G* sont respectivement les fonctions primitives de *h* et *g*.

<u>Exemple</u> :

$$\frac{dx}{dt} - \frac{1-x}{1+t} = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1-x}{1+t} \rightarrow \frac{dx}{1-x} = \frac{dt}{1+t} \Rightarrow ln\frac{1}{|1-x|} = ln(1+t) + C$$

Si $x(t = 0)=0$, on aura $C = 0$ et on obtient $x = 1 \pm \frac{1}{1+t}$

V.2.2. *Equations différentielles homogènes*

Si $f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0$ peut s'écrire sous la forme $\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$, alors cette équation est dite homogène.

Exemple :

$$tx\frac{dx}{dt}-\left(t^2+x^2\right)=0 \rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}{\frac{x}{t}}$$

Si on pose $u=\frac{x}{t}$, on trouve $\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}=\frac{1+u^2}{u} \Rightarrow u+t\frac{du}{dt}=\frac{1+u^2}{u} \rightarrow t\frac{du}{dt}=\frac{1}{u}$

$\rightarrow \frac{dt}{t}=udu \Rightarrow \frac{u^2}{2}=ln(t)+C \Rightarrow x^2=u^2t^2=(2\,ln(t)+C)t^2 \Rightarrow x=t\sqrt{2\,ln(t)+C}$

V.2.3. *Equations différentielles linéaires*

Une équation différentielle est dite linéaire s'elle est sous la forme :

$$\frac{dx}{dt}+xf(t)=g(t).$$

Exemple :

On détermine la fonction $x(t)$ pour que $\frac{dx}{dt}-\frac{x}{t}=t^2$ avec $x(1) = 1$. Pour déterminer $x(t)$, on procède de la manière suivante :

- On résout l'équation sans second membre c'est-à-dire $\frac{dx}{dt}-\frac{x}{t}=0$.

Cette équation est une équation à variables séparées et sa solution générale est $x(t)=Ct$ (C est une constante à déterminer).

- On remplace la constante C par la fonction $C(t)$ dans l'équation avec second membre. (méthode de la variation de la constante)

$\frac{dx}{dt}-\frac{x}{t}=t^2 \rightarrow \frac{d(Ct)}{dt}-\frac{Ct}{t}=t^2 \rightarrow t\frac{dC}{dt}+C-C=t^2 \rightarrow dC=tdt \rightarrow C=\frac{1}{2}t^2+k$ (k est une constante).

- La solution générale est donc $x(t)=\frac{1}{2}t^3+kt$

- La condition initiale impose $k=\frac{1}{2}$

- La solution unique est $x(t)=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t$

V.3. Equations différentielles du 2ème ordre

Une équation différentielle du deuxième ordre est une relation sous la forme $f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)=0$ avec x une fonction de t.

Le cas particulier de telle équation s'écrit sous la forme suivante :

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2a\frac{dx(t)}{dt}+bx=f(t)$ (a et b sont des constantes par rapport au temps t).

V.3.1. *Procédures de résolution*

La détermination de la solution $x(t)$ se fait en deux étapes :

- On cherche la solution générale $x_g(t)$ de l'équation sans second membre :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2a\frac{dx(t)}{dt}+bx=0 \Rightarrow x_g(t)$$

- On cherche une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation avec second membre.

La solution $x(t)$ est alors la somme des deux solutions $x(t)=x_g(t)+x_p(t)$

V.3.2. *Recherche de la solution générale de l'équation sans second membre*

L'équation caractéristique de telle équation s'écrit $r^2+2ar+b=0$. Selon le signe du discriminant réduit $\Delta'=a^2-b$ trois cas peuvent se présenter :

- Cas où $a^2 > b$

$r_{1,,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b} \Rightarrow x_g(t) = C_1\, exp(r_1 t) + C_2\, exp(r_2 t)$ (c_1 et c_2 sont des constantes)

- Cas où $a^2 < b$

$$r_{1,,2} = -a \pm i\sqrt{a^2 - b} \Rightarrow x_g(t) = exp(-at)[k_1\, exp(i\omega t) + k_2\, exp(-i\omega t)]$$
$$= exp(-at)[A\, sin(\omega t) + B\, cos(\omega t)]$$

$i^2 = -1, \omega = \sqrt{b - a^2}$, A et B étant des constantes.

- Cas où $a^2 = b$

$r_1 = r_2 = -a \Rightarrow x(t) = C\, exp(-at)$ ne peut pas être une solution générale parce qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre arbitraire C (l'équation est de 2ème ordre). On cherche alors à satisfaire l'équation sans second membre avec une fonction de la forme $x(t) = C(t) exp(-at)$.

Donc la solution générale de l'équation sans second membre dans le cas où $a^2 = b$ ($\Delta' = 0$) est de la forme : $x_g(t) = exp(-at)(At + B)$ (A et B étant des constantes).

V.3.3. *Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre*

Remarquant que l'on peut mettre la solution générale de l'équation sans second membre $x_g(t)$ sous la forme $x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2$ où x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation sans second membre et C_1 et C_2 des constantes arbitraires.

Pour trouver des solutions particulières, on utilise la méthode de la variation des constantes qui consiste à considérer C_1 et C_2 comme des fonctions de t qu'il faut déterminer.

Dérivons $x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2$ par rapport au temps :

$$x'(t) = C_1 x'_1 + C_2 x'_2 + C'_1 x_1 + C'_2 x_2$$

Choisissant C_1 et C_2 de manière que soit satisfaite l'égalité $C'_1 x_1 + C'_2 x_2 = 0$. Ceci étant, la dérivée première x' devient $x'(t) = C_1 x'_1 + C_2 x'_2$. Dérivons maintenant cette expression, on trouve:

$$x''(t) = C_1 x''_1 + C_2 x''_2 + C'_1 x'_1 + C'_2 x'_2 \ .$$

Substituons x , x' te x'' dans l'équation avec second membre, on obtient :

$$C_1(x''_1 + 2ax'_1 + bx_1) + C_2(x''_2 + 2ax'_2 + bx_2) + C'_1 x'_1 + C'_2 x'_2 = f(t)$$

x_1 et x_2 sont des solutions de l'équation homogène, alors cette dernière égalité s'écrit :

$$C'_1 x'_1 + C'_2 x'_2 = f(t)$$

Ainsi, $x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2$ est une solution de l'équation avec second membre pourvu que les fonctions C_1 et C_2 satisfassent aux équations :

$$C'_1 x_1 + C'_2 x_2 = 0 \text{ et } C'_1 x'_1 + C'_2 x'_2 = f(t).$$

En résolvant ce système, on trouve C'_1 et C'_2 comme fonction de t :

$$C'_1 = g_1(t),\ C'_2 = g_2(t)$$

On trouve en intégrant :

$$C_1 = \int g_1(t)dt + k_1,\ C_2 = \int g_2(t)dt + k_2$$

où k_1 et k_2 sont des constantes d'intégration.

En substituant ces deux dernières expressions dans $x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2$, on trouve une intégrale dépendant de deux constantes arbitraires k_1 et k_2 c'est-à-dire la solution générale de l'équation avec second membre.

<u>Exemple</u> :

On cherche la solution générale de l'équation $x'' - \frac{x'}{t} = t$

L'équation homogène $x'' - \frac{x'}{t} = 0$ admet comme solution générale $x = C_1 t^2 + C_2$

Pour trouver une solution particulière on considère C_1 et C_2 comme des fonctions de t satisfaisant le système suivant :

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 = 0 \text{ et } C_1'x_1' + C_2'x_2' = t$$

qui admet comme solutions :

$$C_1' = \frac{1}{2} \text{ et } C_2' = -\frac{1}{2}t^2$$

et par intégration :

$$C_1 = \frac{t}{2} + k_1 \text{ et } C_2 = -\frac{1}{6}t^3 + k_2$$

Substituant ces deux expressions dans l'équation $x = C_1 t^2 + C_2$, on obtient la solution générale de l'équation de $x'' - \frac{x'}{t} = t$ sous la forme :

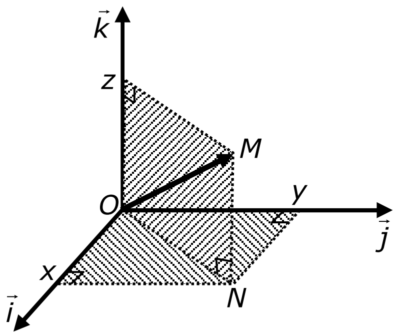
$$x = k_1 t^2 + \frac{1}{3}t^3 + k_2 \text{ (}k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes arbitraires)}$$

VI. Système de coordonnées

Selon la nature de la trajectoire d'un point matériel, sa position peut être repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes ou cylindriques ou sphériques.

Soient $\Re(O,x,y,z)$ un repère muni d'une base orthonormée directe ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), M un point à repérer, N la projection de M sur le plan (xOy) et z sa projection sur l'axe (Oz).

VI.1. Système de coordonnées cartésiennes



Les variables x, y et z définissent d'une manière unique la position de M par rapport à $\Re$ tel que $-\infty \le x \le +\infty$, $-\infty \le y \le +\infty$ et $-\infty \le z \le +\infty$. Elles sont appelées les coordonnées de M dans le repère cartésien $\Re(O,x,y,z)$.

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est le vecteur position de M dans $\Re$.

Le système $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitue la base cartésienne.

VI.2. Système de coordonnées cylindriques

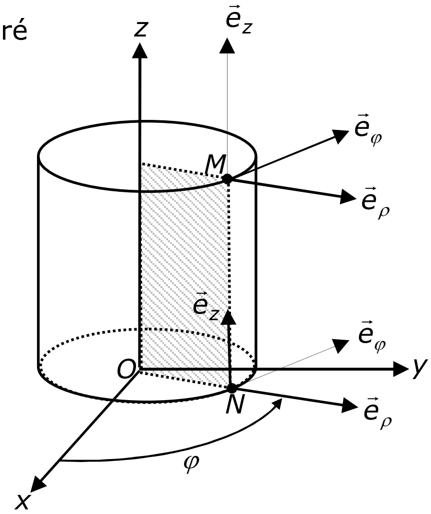
Le point M de coordonnées x, y et z peut aussi être repéré d'une manière unique par les variables ρ, φ et z définies par :

$\rho = \left\|\overrightarrow{ON}\right\|$, $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}\,\hat{,}\,\overrightarrow{ON}\right)$ et $z = \overline{NM}$ tel que $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ et $-\infty \le z \le +\infty$.

$M(x, y, z) \leftrightarrow M(\rho, \varphi, z)$

Les variables ρ, φ et z représentent les coordonnées cylindriques du point M.

Aux coordonnées ρ, φ et z on fait associer la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ appelée base cylindrique tel que :



$\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{ON}}{\left\|\overrightarrow{ON}\right\|}$ vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{ON}$.

$\vec{e}_\varphi$ vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{e}_\rho$ et appartenant au plan (xOy) ($\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi \in (xOy)$).

$\vec{e}_z$ vecteur unitaire parallèle à l'axe (Oz) ($\vec{e}_z = \vec{k}$).

Remarques :

- Quand ρ varie, φ et z sont constantes alors M décrit une droite parallèle à (ON).

- Quand φ varie, ρ et z sont constantes alors M décrit un cercle de rayon ρ et dont le centre appartenant à l'axe (Oz).

- Quand z varie, φ et ρ sont constantes alors M décrit une droite parallèle à (Oz).

- Quand M se déplace dans l'espace, $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ changent, donc la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ est une base mobile.

- Le système de coordonnées cylindriques est utilisé dans le cas des problèmes ayant des axes de symétrie.

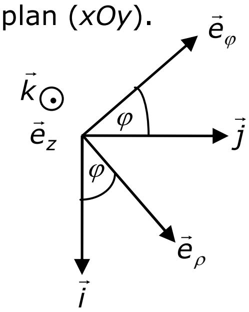
- Un vecteur quelconque peut s'exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ de la manière suivante :

$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$ avec v_ρ, v_φ et v_z les coordonnées cylindriques de $\vec{v}$.

Relation entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques :

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ appartiennent au même plan (xOy).

$$\vec{e}_\rho = cos(\varphi)\vec{i} + sin(\varphi)\vec{j}$$
$$\vec{e}_\varphi = -sin(\varphi)\vec{i} + cos(\varphi)\vec{j}$$
$$\vec{e}_z = \vec{k}$$



Le vecteur position de M est exprimé par :

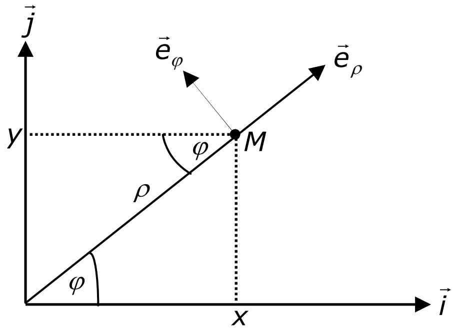
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z = \rho\, cos(\varphi)\vec{i} + \rho\, sin(\varphi)\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Donc la relation entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques est :

$$x = \rho\, cos(\varphi) \text{ et } y = \rho\, sin(\varphi)$$

Cas particulier : Coordonnées polaires

Si z est contant (M se déplace dans un plan), la position de M est repérée uniquement par ρ et φ. Donc dans ce cas, ces deux coordonnées sont appelées les coordonnées polaires de M.



$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$: base polaire

$\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$: rayon polaire

$\varphi = (\vec{i} \,\hat{,}\, \overrightarrow{OM})$: angle polaire

$\overrightarrow{OM} = \rho\, cos(\varphi)\vec{i} + \rho\, sin(\varphi)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$

VI.3. Système de coordonnées sphériques

Le point M de coordonnées x, y et z ou ρ, φ et z peut aussi être repéré d'une manière unique par les variables r, θ et φ définies par : $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta = (\overrightarrow{Oz} \,\hat{,}\, \overrightarrow{OM})$ et $\varphi = (\overrightarrow{Ox} \,\hat{,}\, \overrightarrow{ON})$

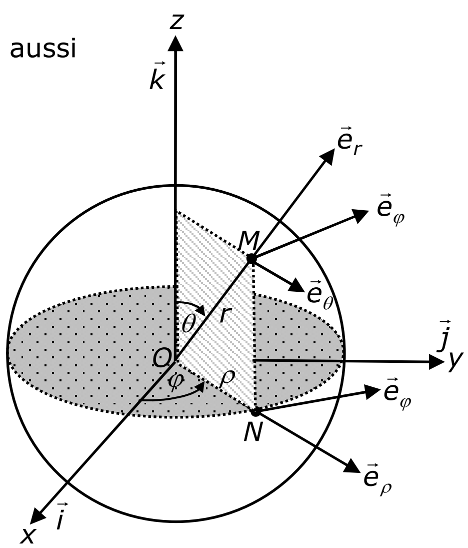
tel que $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$M(x, y, z) \leftrightarrow M(r, \theta, \varphi)$

Les variables r, θ et φ représentent les coordonnées sphériques du point M.

Aux coordonnées r, θ et φ on fait associer la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ appelée base sphérique tel que :

$\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$.



$\vec{e}_\theta$ vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{e}_r$ et appartenant au plan ($\vec{k}, \overrightarrow{OM}$).

$\vec{e}_\varphi$ vecteur unitaire tel que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit directe ou bien $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$.

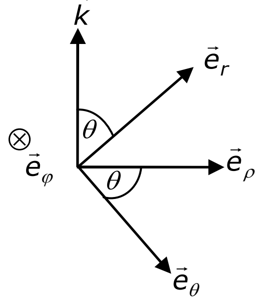
Remarques :

- Quand r varie, θ et φ sont constantes alors M décrit une droite parallèle à (OM).
- Quand φ varie, r et θ sont constantes alors M décrit un cercle de rayon $\rho = r\,sin(\theta)$ et dont le centre appartenant à l'axe (Oz).
- Quand θ varie, r et φ sont constantes alors M décrit le demi cercle méridien de rayon r et de centre O.
- La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base mobile.
- Le système de coordonnées sphériques est appliqué dans le cas des problèmes présentant une symétrie sphérique autour d'un point que l'on prend comme origine d'un repère
- Un vecteur quelconque peut s'exprimer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ de la manière suivante :

$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi$ avec v_r, v_θ et v_φ sont les coordonnées sphériques de $\vec{v}$.

Relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques :

Les vecteurs $\vec{k}$, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\rho$ appartiennent au même plan hachuré ($\vec{k}, \overrightarrow{OM}$).



$$\vec{e}_r = cos(\theta)\vec{k} + sin(\theta)\vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{k} + cos(\theta)\vec{e}_\rho$$

On a $\vec{e}_\rho = cos(\varphi)\vec{i} + sin(\varphi)\vec{j}$ donc $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ s'écrivent :

$\vec{e}_r = sin(\theta)cos(\varphi)\vec{i} + sin(\theta)sin(\varphi)\vec{j} + cos(\theta)\vec{k}$ et $\vec{e}_\theta = cos(\theta)cos(\varphi)\vec{i} + cos(\theta)sin(\varphi)\vec{j} - sin(\theta)\vec{k}$

$\vec{e}_\varphi = -sin(\varphi)\vec{i} + cos(\varphi)\vec{j} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$

Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r = r\,sin(\theta)cos(\varphi)\vec{i} + r\,sin(\theta)sin(\varphi)\vec{j} + r\,cos(\theta)\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques est :

$$x = r\,sin(\theta)cos(\varphi),\ y = r\,sin(\theta)sin(\varphi) \text{ et } z = r\,cos(\theta)$$

VII. Vecteur déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire et la différentielle totale de la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(\alpha, \beta, \gamma)$ c'est-à-dire $d\overrightarrow{OM}$. L'expression de $d\overrightarrow{OM}$ dépend du système de coordonnées utilisé ($d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$, M' est très proche de M)

En coordonnées cartésiennes : $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

En coordonnées cylindriques : $d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}$

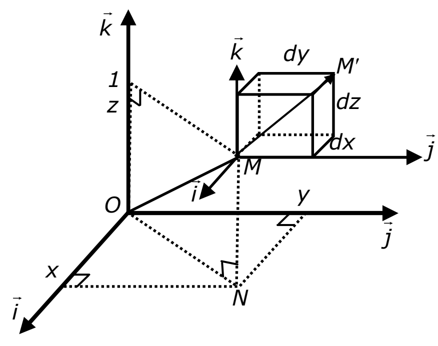
En coordonnées sphériques : $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\,sin(\theta)d\varphi\vec{e}_\varphi$

VIII. Eléments de surface et de volume

En coordonnées cartésiennes :

Elément de surface : $ds = dxdy$

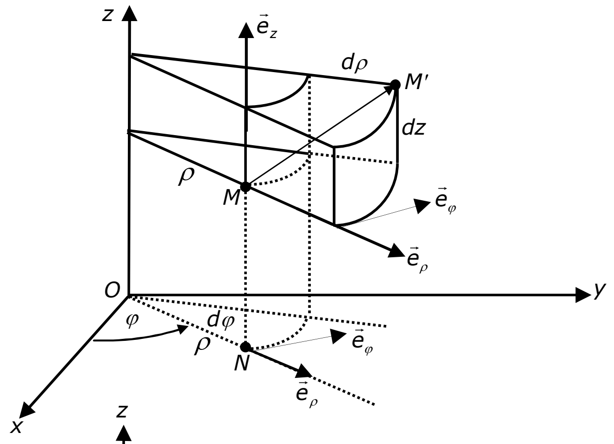
Elément de volume : $dv = dx\,dy\,dz$



En coordonnées cylindriques :

Elément de surface : $ds = \rho d\varphi dz$

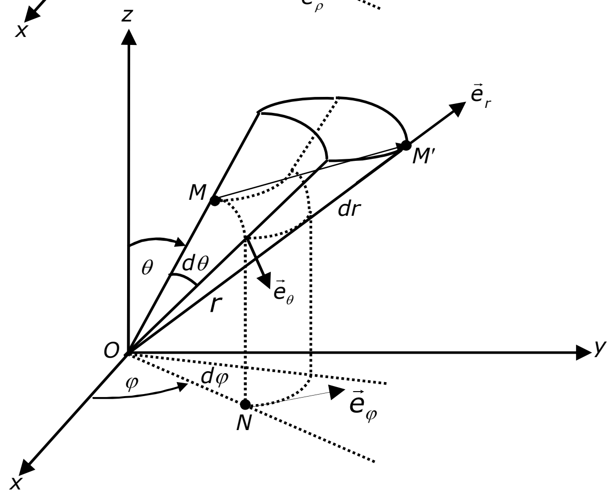
Elément de volume : $dv = \rho d\rho d\varphi dz$



En coordonnées sphériques :

Elément de surface : $ds = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$

Elément de volume : $dv = r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\varphi$



IX. Opérateurs mathématiques
IX.1. Opérateur gradient

Le gradient d'une fonction scalaire f est une fonction vectorielle notée $\overrightarrow{grad}f$ dont l'expression dépend du système de coordonnées dans lequel la fonction f est exprimée.

En coordonnées cartésiennes :

$$f(x, y, z) \rightarrow \overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

En coordonnées cylindriques :

$$f(\rho, \varphi, z) \rightarrow \overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$f(r, \theta, \varphi) \rightarrow \overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

Le gradient de f peut être exprimé par

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f$$

où $\vec{\nabla}$ est le vecteur nabla dont les composantes sont définies par :

$$\vec{\nabla} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} /(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad , \quad \vec{\nabla} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} /(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} /(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

IX.2. Opérateur divergence

La divergence d'une fonction vectorielle $\vec{f}$ est le scalaire défini par :

$$div\vec{f} = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}$$

IX.3. Opérateur rotationnel

Le rotationnel d'une fonction vectorielle $\vec{f}$ est le produit vectoriel défini par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

Remarques :

- Pour calculer $div\vec{f}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{f}$, il faut exprimer $\vec{f}$ et $\vec{\nabla}$ dans la même base.
- Si *f* est une fonction scalaire définie en *M*, alors $df = \overrightarrow{grad}f\, d\overrightarrow{OM}$ (voir TD 1).
- Quelque soit la fonction scalaire *f*, on a $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \vec{0}$.
- Si $\overrightarrow{rot}\vec{f} = \vec{0}$, il existe une fonction scalaire *g* telle que $\vec{f} = \overrightarrow{grad}g$. On dit alors que $\vec{f}$ dérive d'un potentiel *g.*

Exemple :

Soit $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie par : $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. On calcule $div\vec{f}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{f}$.

$\vec{f}$ est une fonction vectorielle exprimée dans la base cartésienne $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, donc pour calculer $div\vec{f}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{f}$, on exprime le vecteur $\vec{\nabla}$ dans cette même base.

Les composantes de $\vec{f}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont :

$$f_x = x\,,\; f_y = y \;\text{ et }\; f_z = z$$

Alors, on obtient :

$$div\vec{f} = \vec{\nabla} \bullet \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}\right) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 3$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \quad \wedge \quad \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{matrix}\right|_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= 0\,\vec{i} - 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \vec{0}$$

Alors $\vec{f}$ dérive d'un potentiel *g* tel que $\vec{f} = \overrightarrow{grad}g$.

La cinématique du point matériel est définie comme l'étude du mouvement d'un point matériel, indépendamment des causes qui le produisent.

La notion du mouvement est relative, puisqu'elle est dépendante d'un repère par rapport auquel elle est définie.

I. Définitions

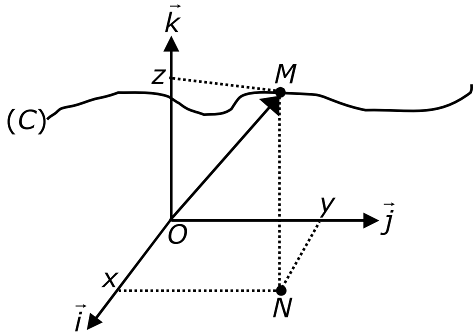
I.1. Point matériel

Un point matériel est un objet dont la forme et la dimension sont négligeables lors de l'étude de son mouvement. Seule la position du centre de masse d'un point matériel est à considérer. A chaque instant (t), il est repéré par trois coordonnées : (x, y, z) ou (ρ, φ, z) ou (r, θ, φ).

I.2. Trajectoire

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par un point matériel au cours de son mouvement. Sa nature reste toujours relative à un référentiel.

La position du point matériel sur sa trajectoire (C) est repérée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.



Le fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ représentent les équations horaires du mouvement de M dans le repère $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

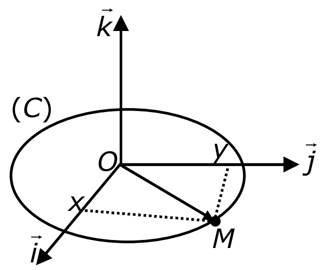
En général, pour déterminer la nature de la trajectoire de M par rapport à $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on détermine les fonctions scalaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, puis on détermine une relation liant ces fonctions sous la forme $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ et en déduire la nature de la trajectoire.

Exemple :

M un point matériel en mouvement dans le plan (xOy) tel que : $x(t) = R\cos(\omega t)$, $y(t) = R\sin(\omega t)$ et $z(t) = 0$.

$$\rightarrow x^2(t) + y^2(t) = R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)$$
$$= R^2\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) = R^2$$

Cette relation est l'équation caractéristique d'un cercle de rayon R et de centre $O(0.0)$. Alors la trajectoire est un cercle de rayon R et de centre O.



I.3. Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel

La dérivée temporelle d'un vecteur quelconque $\vec{A}$ par rapport à un référentiel $\Re$ est la dérivée par rapport au temps et par rapport à $\Re$ tout en gardant les vecteurs de la base de $\Re$ comme des constantes. Elle notée $\dfrac{d\vec{A}}{dt/\Re}$.

Exemple :

$\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ deux référentiels orthonormés directs.

$\vec{A}$ un vecteur quelconque tel que $\vec{A} = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z\vec{k}_1$ ($x = x(t), y = y(t), z = z(t)$).

• $\dfrac{d\vec{A}}{dt/\Re_1} = \dfrac{d\left(x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z\vec{k}_1\right)}{dt/\Re_1} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i}_1 + x\dfrac{d\vec{i}_1}{dt/\Re_1} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j}_1 + y\dfrac{d\vec{j}_1}{dt/\Re_1} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}_1 + z\dfrac{d\vec{k}_1}{dt/\Re_1}$

$\left(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\right)$ est la base de $\Re_1$ don ceci se traduit par $\dfrac{d\vec{i}_1}{dt/\Re_1} = \dfrac{d\vec{j}_1}{dt/\Re_1} = \dfrac{d\vec{k}_1}{dt/\Re_1} = \vec{0}$.

Cette dérivée devient alors : $\dfrac{d\vec{A}}{dt/\Re_1} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i}_1 + \dfrac{dy}{dt}\vec{j}_1 + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}_1 = \dot{x}\vec{i}_1 + \dot{y}\vec{j}_1 + \dot{z}\vec{k}_1$

• $\dfrac{d\vec{A}}{dt/\Re} = \dfrac{d\left(x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z\vec{k}_1\right)}{dt/\Re} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i}_1 + x\dfrac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j}_1 + y\dfrac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}_1 + z\dfrac{d\vec{k}_1}{dt/\Re}$

$$\rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt/\Re} = \dot{x}\vec{i}_1 + \dot{y}\vec{j}_1 + \dot{z}\vec{k}_1 + x\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} + y\frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} + z\frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re}$$

Pour calculer les dérivées $\dfrac{d\vec{i}_1}{dt/\Re}$, $\dfrac{d\vec{j}_1}{dt/\Re}$ et $\dfrac{d\vec{k}_1}{dt/\Re}$, on exprime les vecteurs $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$ et $\vec{k}_1$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

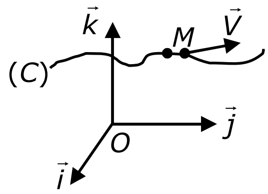
I.4. Vecteur vitesse instantané d'un point matériel

Dans un référentiel $\Re$, le vecteur vitesse instantané est défini par :

$$\vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}$$

où O est un point quelconque fixe dans $\Re$.

Le vecteur vitesse est toujours tangent en M à la trajectoire et dirigé suivant le sens du mouvement.



I.5. Vecteur accélération instantané d'un point matériel

Dans un référentiel $\Re$, le vecteur accélération instantané est défini par :*

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2/\Re}$$

où O est un point quelconque fixe dans $\Re$.

II. Composantes des vecteurs vitesse et accélération

On désigne par $\Re\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ le repère cartésien supposé fixe.

L'expression des vecteurs vitesse et accélération dépend de la nature du repère d'étude.

II.1. Expressions en coordonnées cartésiennes

Le vecteur position est donné par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les dérivées temporelles des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ par rapport à $\Re$ sont nulles. Alors les expressions des vecteurs vitesse et accélération s'écrivent :

$$\vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

et

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2/\Re} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

avec $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\dfrac{dz}{dt} = \dot{z}$, $\dfrac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}$, $\dfrac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y}$ et $\dfrac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z}$

II.2. Expressions en coordonnées cylindriques

Dans la base cylindrique, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$.

Le vecteur vitesse s'exprime :

$$\vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)}{dt/\Re} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt/\Re}$$

$$= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt/\Re}$$

$$= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

avec $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} = \dfrac{d(\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j})}{dt/\Re} = -\dot{\varphi}\sin(\varphi)\vec{i} + \dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{j} = \dot{\varphi}[-\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}] = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ et $\dfrac{d\vec{e}_z}{dt/\Re} = \vec{0}$

Le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z)}{dt/\Re} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt/\Re} + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

avec $\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt/\Re} = \dfrac{d(-\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j})}{dt/\Re} = -\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{i} - \dot{\varphi}\sin(\varphi)\vec{j} = -\dot{\varphi}[\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}] = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$

<u>Remarque</u> :

En coordonnées polaires les vecteurs vitesse et accélération s'écrivent:

$\vec{V}(M/\Re) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ et $\vec{\gamma}(M/\Re) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$ ($\dot{z} = \ddot{z} = 0$)

II.3. Expressions en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

Le vecteur vitesse s'exprime :

$$\vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt/\Re} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt/\Re} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt/\Re}$$

$$= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$$

avec $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt/\Re} = \dfrac{d(\cos(\theta)\vec{k} + \sin(\theta)\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{k} + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

Le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi)}{dt/\Re}$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt/\Re} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$$

$$+ r\ddot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin(\theta)\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt/\Re}$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta)\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$$

$$+ r\ddot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta)\vec{e}_r - r\dot{\varphi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta))\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\vec{e}_\theta$$

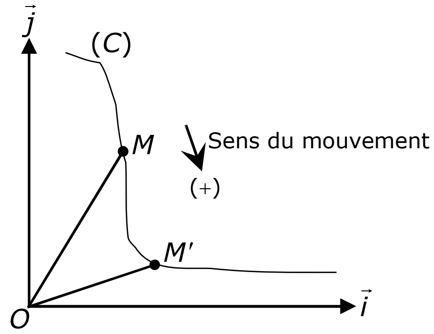
$$+ (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta) + r\ddot{\varphi}\sin(\theta))\vec{e}_\varphi$$

avec $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re} = \dfrac{d(-\sin(\theta)\vec{k} + \cos(\theta)\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{k} - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\cos(\theta)\vec{e}_\varphi = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos(\theta)\vec{e}_\varphi$ et

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt/\Re} = \frac{d(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta)}{dt/\Re} = \frac{d\vec{e}_r}{dt/\Re} \wedge \vec{e}_\theta + \vec{e}_r \wedge \frac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho = -\dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

II.4. Expressions en coordonnées curvilignes

Soient (C) une trajectoire décrite par un point matériel M par rapport à un référentiel $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et P un point arbitraire considéré comme une origine sur (C). La longueur de l'arc (PM) est appelée l'abscisse curviligne s ($PM = s$).



Soit M' la position de M à l'instant ($t + \Delta t$)

$$\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OM}'-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MM'}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}(M/\Re)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds/\Re}\frac{ds}{dt}$$

avec

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds/\Re}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta s}$$

Si Δt tend vers 0, $\Delta s \to 0$ et M' très proche de M. Donc $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|=\Delta s$ et $\overrightarrow{MM'}$ est tangent à la trajectoire au point M et par conséquent $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta s}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}=\vec{\tau}$ ($\vec{\tau}$ est donc un vecteur unitaire tangent à la trajectoire au point M). Ainsi, on obtient :

$$\vec{V}(M/\Re)=\frac{ds}{dt}\vec{\tau}=\dot{s}\vec{\tau}\ \to \left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|=\left\|\dot{s}\vec{\tau}\right\|=\dot{s}\left\|\vec{\tau}\right\|=\dot{s}\Rightarrow\vec{\tau}=\frac{\vec{V}(M/\Re)}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|}$$

Le vecteur accélération s'écrit donc :

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re}=\ddot{s}\vec{\tau}+\dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt/\Re}$$

On a $\left\|\vec{\tau}\right\|=1=cte\to\ \vec{\tau}\perp\frac{d\vec{\tau}}{dt/\Re}\Rightarrow\ddot{s}\vec{\tau}\perp\dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt/\Re}$, alors le vecteur accélération peut être partagé en deux termes :

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\vec{\gamma}_n+\vec{\gamma}_t$$

avec $\vec{\gamma}_t=\ddot{s}\vec{\tau}$ (accélération tangentielle) et $\vec{\gamma}_n=\dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt/\Re}$ (accélération normale).

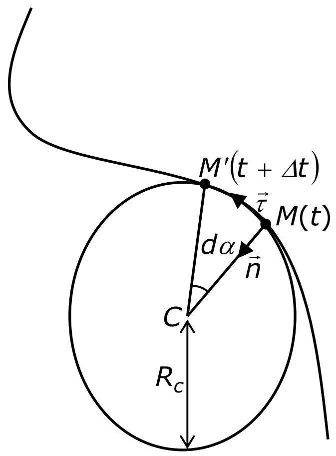
Les vecteurs $\vec{\gamma}(M/\Re)$, $\vec{\gamma}_n$ et $\vec{\gamma}_t$ se trouvent dans un même plan instantané, appelé plan Osculateur.

Rayon de courbure :

A chaque point M de la trajectoire (C), on peut définir un cercle appartenant au plan Osculateur, de rayon R_c dépendant du temps et appelé rayon de courbure.

Le rayon de courbure R_c est lié à l'accélération normale par : $\vec{\gamma}_n=\frac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}$

avec $\vec{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et orienté du point M vers le centre C du cercle c'est-à-dire $\overrightarrow{MC}=R_c\vec{n}$.



Démonstration :

$$\vec{\gamma}_n=\dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt/\Re}=\dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds/\Re}\frac{ds}{dt}=\dot{s}^2\frac{d\vec{\tau}}{ds/\Re}$$

$$MM'=ds=R_c d\alpha\to\frac{d\vec{\tau}}{ds/\Re}=\frac{1}{R_c}\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha/\Re}=\frac{\vec{n}}{R_c}\ \Rightarrow\vec{\gamma}_n=\frac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}$$

Finalement, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\underbrace{\frac{d\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|}{dt}\vec{\tau}}_{\text{accélération tangentielle}}+\underbrace{\frac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}}_{\text{accélération normale}}$$

où $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ sont deux vecteurs unitaires respectivement, tangent et normal à la trajectoire en M.

Le système $\left(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}\right)$ constitue une base orthonormée directe appelée base de Frenet. Le vecteur $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ est appelé la binormale.

Calcule du rayon de courbure :

$$\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re) = \dot{s}\vec{\tau} \wedge \left[\ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{n}\right] = \dot{s}\vec{\tau} \wedge \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\vec{\tau} \wedge \frac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{n} = \frac{\dot{s}^3}{R_c}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \frac{\dot{s}^3}{R_c}\left\|\vec{b}\right\| = \frac{\dot{s}^3}{R_c} = \frac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^3}{R_c}$$

Ainsi, le rayon de courbure est calculé par :

$$R_c = \frac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^3}{\left\|\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\right\|}$$

Remarques :

- $\vec{\gamma}(M/\Re)\vec{V}(M/\Re) = \dot{s}\ddot{s} = \vec{\gamma}_t\vec{V}(M/\Re)$
- $\vec{\gamma}(M/\Re)\vec{V}(M/\Re) > 0 \Rightarrow \vec{\gamma}_t$ et $\vec{V}(M/\Re)$ ont le même sens. Le mouvement est donc accéléré.
- $\vec{\gamma}(M/\Re)\vec{V}(M/\Re) < 0 \Rightarrow \vec{\gamma}_t$ et $\vec{V}(M/\Re)$ ont deux sens opposés. Le mouvement est donc retardé ou décéléré.
- $\vec{\gamma}(M/\Re)\vec{V}(M/\Re) = 0 \Rightarrow \ddot{s} = 0$, donc le mouvement est uniforme.

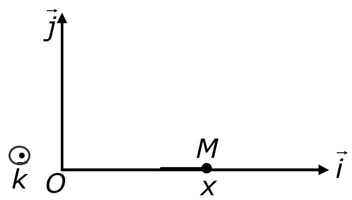
III. Exemple de mouvements simples

III.1. Mouvement rectiligne

C'est un mouvement où la trajectoire est une droite.

Exemple :

Soit un point astreint à se déplacer sur l'axe (Ox) d'un repère orthonormé direct $\Re\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i}$.



- $\vec{V}(M/\Re) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right/\Re = \left.\dfrac{d\left(x\vec{i}\right)}{dt}\right/\Re = \dot{x}\vec{i} \rightarrow \left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = \dot{x}$
- $\vec{\gamma}(M/\Re) = \left.\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right/\Re = \left.\dfrac{d\left(\dot{x}\vec{i}\right)}{dt}\right/\Re = \ddot{x}\vec{i} \rightarrow \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \ddot{x}$
- $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{V}(M/\Re)}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|} = \vec{i} \rightarrow s(t) = x(t)$
- $\vec{\gamma}_t = \left(\dfrac{d\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|}{dt}\right)\vec{\tau} = \ddot{x}\vec{\tau} \rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \vec{0}$
- $\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re) = \dot{x}\vec{i} \wedge \ddot{x}\vec{i} = \vec{0} \rightarrow \left\|\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = 0$
- $R_c = \dfrac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^3}{\left\|\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\right\|} = \dfrac{\dot{x}^3}{0} = \infty$. Donc à chaque instant t, le point M se trouve sur un cercle de rayon infini. Puisque, la trajectoire de M est la droite (Ox), on peut déduire que toute droite est un cercle de rayon infini.

Remarques :

- Si $\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = V_0 = cte \rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniforme ($\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{0}$).

$\Rightarrow\ \dot{x} = V_0 \rightarrow x(t) = V_0 t + x_0 \rightarrow \overrightarrow{OM} = (V_0 t + x_0)\vec{i}\ ,\ x(t=0) = x_0$.

- Si $\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \gamma_0 = cte \rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniformément accéléré ($\vec{\gamma}(M/\Re)\vec{V}(M/\Re) > 0$) ou décéléré ($\vec{\gamma}(M/\Re)\vec{V}(M/\Re) < 0$).

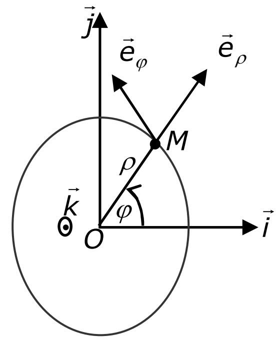
$$\Rightarrow\ \ddot{x} = \gamma_0 \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + V_0 t + x_0 \rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + V_0 t + x_0\right)\vec{i}\ ,\ \vec{V}(M/\Re) = (\gamma_0 t + V_0)\vec{i}$$

$$(\ x(t=0) = x_0\ ,\ V(t=0) = V_0\ )$$

III.2. Mouvement circulaire

C'est un mouvement tel que la trajectoire est un cercle de rayon constant.

Les coordonnées polaires sont bien adaptées à l'étude du mouvement d'un point matériel décrivant une trajectoire plane. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$.



Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon constant, le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho$ ($\rho = R = cte$). Pour ce mouvement on calcule les grandeurs suivantes :

- $\vec{V}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \dfrac{d(R\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} = \dfrac{Rd(\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \rightarrow \|\vec{V}(M/\Re)\| = R\dot{\varphi}$

- $\vec{\gamma}(M/\Re) = \dfrac{d\vec{V}}{dt/\Re} = \dfrac{d(R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)}{dt/\Re} = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dfrac{d(\vec{e}_\varphi)}{dt/\Re} = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dfrac{d(\vec{e}_\varphi)}{dt/\Re} = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$

$$\rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = R\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$$

- $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{V}(M/\Re)}{\|\vec{V}(M/\Re)\|} = \dfrac{R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}{R\dot{\varphi}} = \vec{e}_\varphi$

- $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho$

- $\vec{\gamma}_t = \left(\dfrac{d\|\vec{V}(M/\Re)\|}{dt}\right)\vec{\tau} = \dfrac{d(R\dot{\varphi})}{dt}\vec{\tau} = R\ddot{\varphi}\vec{\tau}$

- $\vec{\gamma}_n = \vec{\gamma}(M/\Re) - \vec{\gamma}_t = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho - R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = R\dot{\varphi}^2\vec{n}$

- $\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \wedge \left[R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho\right] = R^2\dot{\varphi}^3\vec{e}_z \rightarrow \|\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\| = R^2\dot{\varphi}^3$

- $R_c = \dfrac{\|\vec{V}(M/\Re)\|^3}{\|\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\|} = \dfrac{R^3\dot{\varphi}^3}{R^2\dot{\varphi}^3} = R$.

Remarques :

- $\dot{\varphi}$: vitesse angulaire.
- $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$: vecteur vitesse angulaire
- $\vec{V}(M/\Re) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = R\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{e}_\rho = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$
- $\ddot{\varphi}$: accélération angulaire.
- Si $\dot{\varphi} = \omega_0 = cte \rightarrow$ le mouvement est circulaire uniforme ($\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$).
- Si $\ddot{\varphi} = \gamma_0 = cte \rightarrow$ le mouvement est circulaire uniformément varié.

Chapitre III	**Changement de référentiel**

Soient $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ deux référentiels orthonormés directs tel que l'un est en mouvement par rapport à l'autre. On se propose de déterminer la relation liant $\vec{V}(M/\Re)$ à $\vec{V}(M/\Re_1)$ et $\vec{\gamma}(M/\Re)$ à $\vec{\gamma}(M/\Re_1)$.

I. Vecteur rotation instantané

$$\vec{i}_1^{\,2} = \vec{j}_1^{\,2} = \vec{k}_1^{\,2} = 1 \rightarrow \frac{d(\vec{i}_1^{\,2})}{dt/\Re} = \frac{d(\vec{j}_1^{\,2})}{dt/\Re} = \frac{d(\vec{k}_1^{\,2})}{dt/\Re} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{i}_1 \perp \frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re},\ \vec{j}_1 \perp \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} \text{ et } \vec{k}_1 \perp \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re}$$

Donc, il existe des vecteurs $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ tel que :

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \vec{\alpha} \wedge \vec{i}_1,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = \vec{\beta} \wedge \vec{j}_1 \text{ et } \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \vec{\gamma} \wedge \vec{k}_1$$

$$\vec{i}_1\vec{j}_1 = \vec{i}_1\vec{k}_1 = \vec{j}_1\vec{k}_1 = 0 \rightarrow \frac{d(\vec{i}_1\vec{j})}{dt/\Re} = \frac{d(\vec{i}_1\vec{k}_1)}{dt/\Re} = \frac{d(\vec{j}_1\vec{k}_1)}{dt/\Re} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{i}_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} + \vec{j}_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \vec{i}_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} + \vec{k}_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \vec{k}_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} + \vec{j}_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = 0$$

En remplaçant $\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re}$, $\frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re}$ et $\frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re}$, respectivement, par $\vec{\alpha} \wedge \vec{i}_1$, $\vec{\beta} \wedge \vec{j}_1$ et $\vec{\gamma} \wedge \vec{k}_1$, on obtient :

$$\vec{i}_1(\vec{\beta} \wedge \vec{j}_1) + \vec{j}_1(\vec{\alpha} \wedge \vec{i}_1) = 0 \rightarrow \vec{\beta}(\vec{j}_1 \wedge \vec{i}_1) + \vec{\alpha}(\vec{i}_1 \wedge \vec{j}_1) = 0 \rightarrow \vec{\beta}(\vec{j}_1 \wedge \vec{i}_1) - \vec{\alpha}(\vec{j}_1 \wedge \vec{i}_1) = 0 \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$$

$$\vec{i}_1(\vec{\gamma} \wedge \vec{k}_1) + \vec{k}_1(\vec{\alpha} \wedge \vec{i}_1) = 0 \rightarrow \vec{\gamma}(\vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1) + \vec{\alpha}(\vec{i}_1 \wedge \vec{k}_1) = 0 \rightarrow \vec{\gamma}(\vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1) - \vec{\alpha}(\vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1) = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$$

$$\vec{k}_1(\vec{\beta} \wedge \vec{j}_1) + \vec{j}_1(\vec{\gamma} \wedge \vec{k}_1) = 0 \rightarrow \vec{\beta}(\vec{j}_1 \wedge \vec{k}_1) + \vec{\gamma}(\vec{k}_1 \wedge \vec{j}_1) = 0 \rightarrow \vec{\beta}(\vec{j}_1 \wedge \vec{k}_1) - \vec{\gamma}(\vec{j}_1 \wedge \vec{k}_1) = 0 \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

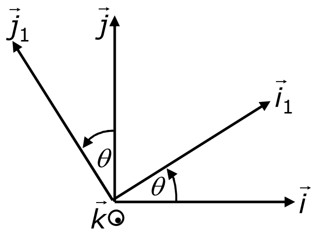
Ainsi, $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma} = \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$ où $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$ désigne le vecteur rotation instantané de $\Re_1$ par rapport à $\Re$.

<u>Remarque</u> :

Connaissant le vecteur $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$, on peut calculer $\frac{d\vec{A}}{dt/\Re}$ à partir de $\frac{d\vec{A}}{dt/\Re_1}$ par la relation : $\frac{d\vec{A}}{dt/\Re} = \frac{d\vec{A}}{dt/\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{A}$ où $\vec{A}$ est un vecteur quelconque.

<u>Exemple</u> :

$\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère en mouvement de rotation autour d'un axe ($O\vec{k}$) d'un repère fixe $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{i}_1}\right) = \left(\widehat{\vec{j}, \vec{j}_1}\right) = \theta$.



Pour déterminer $\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re)$, on procède de la manière suivante :

- on exprime $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$ et $\vec{k}_1$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{i}_1 = cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\ ,\ \vec{j}_1 = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j} \text{ et } \vec{k}_1 = \vec{k}$$

- on calcule les dérivées $\dfrac{d\vec{i}_1}{dt / \Re}$, $\dfrac{d\vec{j}_1}{dt / \Re}$ et $\dfrac{d\vec{k}_1}{dt / \Re}$:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt / \Re} = -\dot{\theta}\, sin(\theta)\vec{i} + \dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{j} = \dot{\theta}\vec{j}_1,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt / \Re} = -\dot{\theta} cons(\theta)\vec{i} - \dot{\theta}\, sin(\theta)\vec{j} = -\dot{\theta}\vec{i}_1 \text{ et } \frac{d\vec{k}_1}{dt / \Re} = \frac{d\vec{k}}{dt / \Re} = \vec{0}$$

- on écrit ces dérivées sous la forme :

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt / \Re} = \vec{\alpha} \wedge \vec{i}_1,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt / \Re} = \vec{\beta} \wedge \vec{j}_1 \text{ et } \frac{d\vec{k}_1}{dt / \Re} = \vec{\gamma} \wedge \vec{k}_1$$

- si $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$, alors $\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) = \vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

Finalement, on a $\dfrac{d\vec{i}_1}{dt / \Re} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{i}_1$, $\dfrac{d\vec{j}_1}{dt / \Re} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{j}_1$ et $\dfrac{d\vec{k}_1}{dt / \Re} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{k}_1$, alors $\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}_1$

II. Composition des vitesses

On désigne par $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère absolu (fixe) et par $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ le repère relatif (mobil). *M* un point matériel de l'espace.

$$\vec{V}(M / \Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt / \Re} = \frac{d\left(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}\right)}{dt / \Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt / \Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt / \Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt / \Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt / \Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

Le vecteur vitesse de *M* dans $\Re$ est donc :

$$\vec{V}(M / \Re) = \vec{V}(O_1 / \Re) + \vec{V}(M / \Re_1) + \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

On pose :

- $\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M / \Re)$: vitesse absolue de *M*.
- $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M / \Re_1)$: vitesse relative de *M* (vitesse par rapport au repère relatif).
- $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O_1 / \Re) + \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$: vitesse d'entraînement de *M*.

Donc $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$: loi de composition des vitesses.

Remarques :

- la vitesse d'entraînement de *M* à l'instant *t* est égale à la vitesse absolue d'un point fixe dans $\Re_1$ coïncidant, au même instant *t*, avec le point *M* :

Soit *N* un point fixe dans $\Re_1$ qui coïncide avec *M* à l'instant *t* c'est-à-dire $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}$. Le vecteur vitesse absolue de *N* à cet instant *t* est :

$$\vec{V}(N / \Re) = \vec{V}(O_1 / \Re) + \vec{V}(N / \Re_1) + \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \overrightarrow{O_1N}$$

Or à l'instant *t*, on $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(N / \Re_1) = \vec{0}$ (*N* est fixe dans $\Re_1$), alors

$$\vec{V}(N/\Re)=\vec{V}(O_1/\Re)+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1N}=\vec{V}(O_1/\Re)+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}=\vec{V}_e(M/\Re)$$

- si les trois axes de $\Re_1$ gardent une orientation fixe par rapport à $\Re$, au cours du temps, on dit que $\Re_1$ est en mouvement de translation par rapport à $\Re$. Dans ce cas on a :

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)=\vec{0}\Rightarrow\vec{V}_e(M)=\vec{V}(O_1/\Re)$$

III. Composition des accélérations

Le vecteur accélération du point M s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re}=\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt/\Re}=\frac{d\left(\vec{V}_r(M)+\vec{V}_e(M)\right)}{dt/\Re}=\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt/\Re}+\frac{d\vec{V}_e(M)}{dt/\Re}$$

$$\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt/\Re}=\frac{d\vec{V}(M/\Re_1)}{dt/\Re}=\frac{d\vec{V}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{V}(M/\Re_1)=\vec{\gamma}(M/\Re_1)+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{V}_r(M)$$

$$\frac{d\vec{V}_e(M)}{dt/\Re}=\frac{d\left(\vec{V}(O_1/\Re)+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt/\Re}=\frac{d\vec{V}(O_1/\Re)}{dt/\Re}+\frac{d\left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt/\Re}$$

$$=\vec{\gamma}(O_1/\Re)+\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re}$$

$$=\vec{\gamma}(O_1/\Re)+\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$=\vec{\gamma}(O_1/\Re)+\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$=\vec{\gamma}(O_1/\Re)+\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{V}_r(M)+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$\Rightarrow\vec{\gamma}(M/\Re)=\vec{\gamma}(M/\Re_1)+\vec{\gamma}(O_1/\Re)+\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]$$
$$+2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{V}_r(M)$$

On pose

- $\vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}(M/\Re)=\dfrac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re}$: accélération absolue.
- $\vec{\gamma}_r(M)=\vec{\gamma}(M/\Re_1)=\dfrac{d\vec{V}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}$: accélération relative.
- $\vec{\gamma}_e(M)=\vec{\gamma}(O_1/\Re)+\dfrac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]$: accélération d'entraînement.
- $\vec{\gamma}_c(M)=2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{V}_r(M)$: accélération de Coriolis.

$\Rightarrow\ \vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}_r(M)+\vec{\gamma}_e(M)+\vec{\gamma}_c(M)$: loi de composition des accélérations.

Remarques :

- l'accélération d'entraînement de M est l'accélération absolue d'un point fixe dans $\Re_1$ coïncidant avec le point M à l'instant considéré.

Soit N un point fixe dans $\Re_1$ qui coïncide avec M à l'instant t c'est-à-dire $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}$. Le vecteur accélération absolue de N à cet instant t est :

$$\vec{\gamma}(N/\Re)=\vec{\gamma}(N/\Re_1)+\vec{\gamma}(O_1/\Re)+\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1N}+\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1N}\right]$$
$$+2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{V}_r(N)$$

Comme $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(N/\Re_1)=\vec{0}\rightarrow\vec{\gamma}(N/\Re_1)=\vec{0}$, alors

$$\vec{\gamma}(N/\Re) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right] = \vec{\gamma}_e(M)$$

- $\vec{\gamma}_e(M) \neq \dfrac{d\vec{V}_e(M)}{dt/\Re}$.
- si $\Re_1$ est en mouvement de translation par rapport à $\Re$, alors :

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) \text{ et } \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_a(O_1)$$

Si dans ce cas, $\vec{V}(O_1/\Re) = \overrightarrow{cte}$ (translation uniforme), on a donc :

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \vec{\gamma}_a(O_1) = \vec{0} \rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M)$$

IV. Application :

Soit un point matériel M astreint à se déplacer sur un axe ($O_1\vec{i}_1$) d'un repère orthonormé direct $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$(repère relatif) qui est en mouvement par rapport au repère fixe $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$(repère absolu).

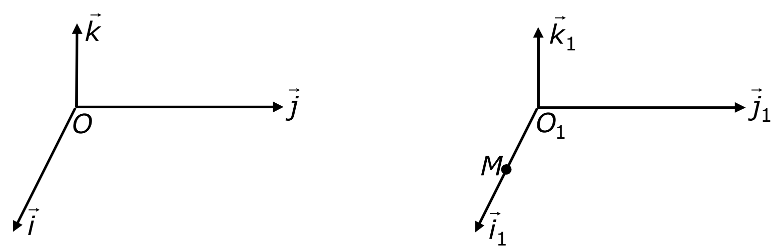
Le point M de déplace sur l'axe ($O_1\vec{i}_1$), donc le vecteur position de M par rapport au repère $\Re_1$, s'écrit $\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{i}_1$ avec la variable x_1 est une fonction du temps et $y_1 = z_1 = 0$.

<u>1er cas</u> : $\Re_1$ est en mouvement de translation par rapport à $\Re$.

Dans ce cas $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$ et tout point fixe dans $\Re_1$, son vecteur vitesse par rapport à $\Re$ conserve sa direction. Ainsi, les trois axes de $\Re_1$ gardent leurs orientations au cours du mouvement.

Pour vérifier, que cette translation est uniforme ou non, on calcule $\left\|\vec{V}(O_1/\Re)\right\|$, puisque O_1 est le seul point connu et fixe dans $\Re_1$. Si $\left\|\vec{V}(O_1/\Re)\right\|$ est constant, la translation est dite uniforme. Elle est dite non uniforme si ce module n'est pas constant.

Par exemple, on prend $\vec{j}_1$ comme direction de la translation tel que $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{V}(O_1/\Re) = V_0\vec{j}_1$ (V_0 est une constante) :



Dans ce cas, la translation est <u>uniforme</u> ($\left\|\vec{V}(O_1/\Re)\right\| = |V_0| = cte$), $\vec{i}_1 = \vec{i}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k}$.

Les vecteurs vitesse et accélération du point matériel M, par rapport au repère $\Re$, peuvent être calculés par les deux méthodes suivantes :

<u>1ère méthode : composition du mouvement</u>

- Vitesse relative :

$$\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/\Re_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1}$$

$$\vec{V}_r(M) = \frac{d(x_1\vec{i}_1)}{dt/\Re_1} = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re_1} = \dot{x}_1\vec{i}_1$$

- Vitesse d'entraînement :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O_1/\Re) + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = V_0\vec{j}_1 + \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1M} = V_0\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{V}(M/\Re) = \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + V_0\vec{j}_1 = \dot{x}_1\vec{i} + V_0\vec{j}}$$

- Accélération relative :

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/\Re_1) = \frac{d\vec{V}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \frac{d(\dot{x}_1\vec{i}_1)}{dt/\Re_1}$$

$$= \frac{d\dot{x}_1}{dt}\vec{i}_1 + \dot{x}_1\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re_1} = \ddot{x}_1\vec{i}_1$$

- Accélération d'entraînement :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right] = \vec{0}$$

$$\left(\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \frac{d\vec{V}(O_1/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d(V_0\vec{j}_1)}{dt/\Re} = V_0\frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = V_0\frac{d\vec{j}}{dt/\Re} = \vec{0}\text{ , }\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}\right)$$

- Accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{V}_r(M) = \vec{0}\wedge\vec{V}_r(M) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) = \ddot{x}_1\vec{i}_1 = \ddot{x}_1\vec{i}}$$

<u>2^ème^ méthode : directement</u>

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re} = \vec{V}(O_1/\Re) + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

$$= \vec{V}(O_1/\Re) + \frac{d(x_1\vec{i}_1)}{dt/\Re_1} = V_0\vec{j}_1 + \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re_1} = V_0\vec{j}_1 + \dot{x}_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{V}(M/\Re) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + V_0\vec{j}_1 = \dot{x}_1\vec{i} + V_0\vec{j}}$$

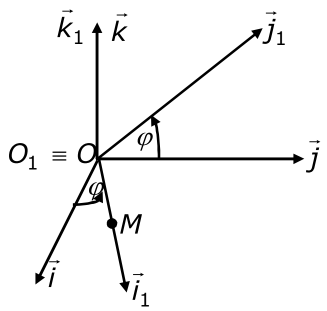
$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{x}_1\vec{i} + V_0\vec{j})}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{x}_1\vec{i})}{dt/\Re} + \frac{d(V_0\vec{j})}{dt/\Re}$$

$$= \frac{d\dot{x}_1}{dt}\vec{i} + \dot{x}_1\frac{d\vec{i}}{dt/\Re} + V_0\frac{d\vec{j}}{dt/\Re} = \ddot{x}\vec{i}$$

$$\underline{\vec{\gamma}(M/\Re) = \ddot{x}_1\vec{i}_1 = \ddot{x}_1\vec{i}}$$

<u>2^ème^ cas</u> : $\Re_1$ est en mouvement de rotation par rapport à $\Re$.

Dans ce cas on suppose que $\Re_1$ est en mouvement de rotation autour de l'axe ($O\vec{k}$) tel que $\left(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{i}_1\right) = \left(\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{j}_1\right) = \varphi$, $\vec{k} = \vec{k}_1$ et $O \equiv O_1$.



Détermination de $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$:

$\vec{i}_1 = cos(\varphi)\vec{i} + sin(\varphi)\vec{j}$, $\vec{j}_1 = -sin(\varphi)\vec{i} + cos(\varphi)\vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k}$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = -\dot{\varphi}\,sin(\varphi)\vec{i} + \dot{\varphi}\,cos(\varphi)\vec{j} = \dot{\varphi}\,\vec{j}_1\text{ , }\frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \frac{d\vec{k}}{dt/\Re} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = -\dot{\varphi}cons(\varphi)\vec{i} - \dot{\varphi}\,sin(\varphi)\vec{j} = -\dot{\varphi}\vec{i}_1$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{i}_1,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{j}_1 \text{ et } \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}_1$$

Calcul des vecteurs vitesse et accélération du point matériel M, par rapport à $\Re$:

1ère méthode : composition du mouvement

- Vitesse relative :

$$\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/\Re_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1}$$

$$\vec{V}_r(M) = \frac{d(x_1\vec{i}_1)}{dt/\Re_1} = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re_1} = \dot{x}_1\vec{i}_1$$

- Vitesse d'entraînement :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O_1/\Re) + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge x_1\vec{i}_1 = \dot{\varphi}\vec{k}_1 \wedge x_1\vec{i}_1 = \dot{\varphi}x_1\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{V}(M/\Re) = \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{\varphi}x_1\vec{j}_1}$$

- Accélération relative :

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/\Re_1) = \frac{d\vec{V}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \frac{d(\dot{x}_1\vec{i}_1)}{dt/\Re_1}$$

$$= \frac{d\dot{x}_1}{dt}\vec{i}_1 + \dot{x}_1\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re_1} = \ddot{x}_1\vec{i}_1$$

- Accélération d'entraînement :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$= \vec{0} + \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge x_1\vec{i}_1 + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left[\dot{\varphi}\vec{k} \wedge x_1\vec{i}_1\right] = \ddot{\varphi}x_1\vec{j}_1 + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \dot{\varphi}x_1\vec{j}_1 = \ddot{\varphi}x_1\vec{j}_1 - \dot{\varphi}^2x_1\vec{i}_1$$

- Accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{V}_r(M) = 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \dot{x}_1\vec{i}_1 = 2\dot{\varphi}\dot{x}_1\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) = (\ddot{x}_1 - \dot{\varphi}^2x_1)\vec{i}_1 + (\ddot{\varphi}x_1 + 2\dot{\varphi}\dot{x}_1)\vec{j}_1}$$

2ème méthode : directement

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re} = \vec{0} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \frac{d(x_1\vec{i}_1)}{dt/\Re_1} + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge x_1\vec{i}$$

$$= \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{\varphi}x_1\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{V}(M/\Re) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{\varphi}x_1\vec{j}_1}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{\varphi}x_1\vec{j}_1)}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{x}_1\vec{i}_1)}{dt/\Re} + \frac{d(\dot{\varphi}x_1\vec{j}_1)}{dt/\Re}$$

$$= \frac{d\dot{x}_1}{dt}\vec{i}_1 + \dot{x}_1\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} + x_1\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\vec{j}_1 + \dot{\varphi}\frac{dx_1}{dt}\vec{j}_1 + x_1\dot{\varphi}\frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re}$$

$$= \ddot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{x}_1\dot{\varphi}\vec{j}_1 + x_1\ddot{\varphi}\vec{j}_1 + \dot{\varphi}\dot{x}_1\vec{j}_1 - x_1\dot{\varphi}^2\vec{i}_1 = \ddot{x}_1\vec{i}_1 + 2\dot{x}_1\dot{\varphi}\vec{j}_1 + x_1\ddot{\varphi}\vec{j}_1 - x_1\dot{\varphi}^2\vec{i}_1$$

$$\underline{\vec{\gamma}(M/\Re) = (\ddot{x}_1 - x_1\dot{\varphi}^2)\vec{i}_1 + (2\dot{x}_1\dot{\varphi} + x_1\ddot{\varphi})\vec{j}_1}$$

Exercice : Calculer dans ce cas les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$, les accélérations normale $\vec{\gamma}_n$ et tangentielle $\vec{\gamma}_t$ et le rayon de courbure.

Chapitre IV	**Dynamique du Point Matériel**

Dans le cas de la cinématique, le mouvement du point matériel est étudié indépendamment des causes qui le produisent. C'est-à-dire les forces appliquées à ce point et produisant ce mouvement sont ignorées. Cependant, la dynamique consiste à étudier ce mouvement en tenant compte des causes qui le produisent.

I. Masse et quantité de mouvement

Les points matériels sont caractérisés par une grandeur scalaire positive appelée masse et notée, m. La masse est constante au cours du temps (au cours du mouvement) $m(t) = m(t_1)$ ($t \neq t_1$) et invariante par tout changement de référentiel $(m)_{\Re} = (m)_{\Re_1}$. Elle est exprimée dans le Système International (S.I) par le kilogramme (kg).

Par définition, le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{V}(m / \Re)$dans un référentiel $\Re$ est donné par :

$$\vec{P}(M / \Re) = m\vec{V}(M / \Re)$$

Le vecteur quantité de mouvement est ainsi défini par rapport à un référentiel $\Re$. Son module $P = \left\|\vec{P}(M / \Re)\right\| = m\left\|\vec{V}(M / \Re)\right\|$ s'exprime en $kg.m.s^{-1}$.

II. Lois de Newton

II.1. 1ère loi de Newton : Principe d'inertie

II.1.1 *Particule isolée*

C'est une particule n'exerçant ou ne subissant aucune action c'est-à-dire, elle est très éloignée de tout système matériel (absolument seule dans l'espace). Elle est dite pseudo-isolée, si la résultante des forces extérieures qu'elle subit est nulle.

II.1.2. *Enoncé de la 1ère loi de Newton*

Il existe au moins un référentiel privilégié $\Re$ dans lequel une particule M isolée est au repos ($\vec{V}(M / \Re) = \vec{0}$), ou en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{V}(M / \Re) = \overrightarrow{cte}$).

II.1.3. *Référentiel galiléen*

Le référentiel privilégié dans lequel le principe d'inertie s'applique, s'appelle un référentiel galiléen ou inertiel.

Avec une bonne approximation, on peut supposer que les référentiels terrestres locaux (*liés à la terre*) et géocentriques (*dont l'origine est le centre de la terre et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines qui apparaissent fixes*) comme des référentiels galiléens pour des phénomènes étudiés au voisinage de la terre. Les repères terrestres sont utilisés pour l'étude des mouvements sur la terre tandis que ceux géocentriques sont adaptés à l'étude des satellites naturels ou artificiels de la terre.

Les référentiels de Copernic (*c'est un référentiel dont l'origine est le centre du système solaire et dont les axes sont dirigés vers des étoiles fixes*) et héliocentrique (*c'est un référentiel dont l'origine est le centre du soleil et dont les axes sont dirigés vers des étoiles fixes*) satisfont avec une bonne approximation aux conditions de repère galiléen. Ils sont adaptés à l'étude du mouvement des planètes du système solaire.

II.1.4. *Référentiel non galiléen*

Un référentiel non galiléen, est un référentiel qui ne vérifie pas les conditions nécessaires pour être galiléen. Les lois du mouvement de Newton n'y sont pas vérifiées: sur tout corps s'y exercent des forces, souvent dites fictives ou forces d'inertie, que l'on peut considérer comme étant dues à un mouvement accéléré (mouvement de translation non uniforme ou de rotation) du référentiel par rapport à un référentiel galiléen.

II.2. 2ème loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique (PFD)

II.2.1. *Enoncé de la 2ème loi de Newton*

Dans un référentiel galiléen $\Re$, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement, $\vec{P}(M / \Re)$, d'un point matériel M est égale à la somme de toutes les forces, $\sum \vec{F}_{ext}$, appliquées sur M :

$$\frac{d\vec{P}(M/\Re)}{dt/\Re} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Si la masse est constante, cette loi s'écrit : $\frac{d\vec{P}(M/\Re)}{dt/\Re} = m\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \sum \vec{F}_{ext}$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}(M/\Re)$$

Ce principe est appelé dans ce cas le théorème de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen.

Si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \overrightarrow{cte}$, $\vec{P}(M/\Re) = \overrightarrow{cte}$

II.2.2. *Conséquences*

La masse *m* qui intervient en dynamique s'appelle le coefficient d'inertie. En effet, si deux point matériels de masses différentes, initialement au repos dans un référentiel $\Re$ et soumis à la même force $\vec{F}$, celui dont la masse est la plus petite acquiert l'accélération la plus forte et son aptitude à s'opposer à l'effet de la force $\vec{F}$ est plus petite.

II.3. 3ème loi de Newton : Principe de l'action et de réaction

Soient M_1 et M_2 deux points matériels en interaction mutuelles.

Si M_1 subit une force $\vec{F}_1$ de la part de M_2 alors M_2 subit une force $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ de la part de M_1.

Ce principe est indispensable pour passer de la mécanique du point matériel à celle des systèmes matériels. Il permet d'établir un résultat important relatif à un système de points matériels soumis à leurs seules actions réciproques :

$$\frac{d\vec{P}_1(M_1/\Re)}{dt/\Re} = \vec{F}_1 \text{ et } \frac{d\vec{P}_2(M_2/\Re)}{dt/\Re} = \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \rightarrow \frac{d\vec{P}_1(M_1/\Re)}{dt/\Re} = -\frac{d\vec{P}_2(M_2/\Re)}{dt/\Re} \rightarrow \frac{d}{dt/\Re}\left(\vec{P}_1(M_1/\Re) + \vec{P}_2(M_2/\Re)\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_1(M_1/\Re) + \vec{P}_2(M_2/\Re) = \overrightarrow{cte}$$

Donc, la quantité de mouvement d'un système isolé de deux points matériels est une constante vectorielle au cours du temps. Cette relation est particulièrement utile pour les chocs de particules.

II.4. Principe de l'invariance galiléenne

Soit $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un référentiel en mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donc $\Re_1$ est un référentiel galiléen.

Soit *M* un point matériel de masse *m* en mouvement.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} \rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re} = \vec{V}(O_1/\Re) + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$\Re_1$ est en translation par rapport à $\Re \rightarrow \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \vec{V}(O_1/\Re) + \vec{V}(M/\Re_1)$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{V}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{V}(M/\Re_1) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \vec{\gamma}(M/\Re_1)$$

$\Re_1$ est en translation par rapport à $\Re \rightarrow \vec{V}(O_1/\Re) = \overrightarrow{cte} \rightarrow \vec{\gamma}(O_1/\Re) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}(M/\Re_1) \Rightarrow m\vec{\gamma}(M/\Re) = m\vec{\gamma}(M/\Re_1)$$

Appliquant le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$ et $\Re_1$, on trouve :

$$m\vec{\gamma}(M/\Re) = \sum \vec{F}_{ext} \text{ (dans } \Re\text{) et } m\vec{\gamma}(M/\Re) = \sum \vec{F}_{1ext} \text{ (dans } \Re_1\text{)}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{1ext} = m\vec{\gamma}(M/\Re) = m\vec{\gamma}(M/\Re_1)$$

Donc, l'équation de la dynamique a la même forme dans deux référentiels galiléens différents.

Enoncé du principe de l'invariance galiléenne :

Toutes lois de la physique sont identiques dans les référentiels galiléens.

II.5. Transformation de Galilée

Considérons les repères $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ tel que O et O_1 sont confondus à $t = 0$. Soit M un point matériel en mouvement.

On suppose que $\Re$ est galiléen et $\Re_1$ est en translation rectiligne uniforme avec une vitesse $\vec{V}(O_1 / \Re)$ constante par rapport à $\Re$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \vec{V}(O_1 / \Re)t + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M / \Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt / \Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt / \Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt / \Re} = \vec{V}(O_1 / \Re) + \vec{V}(M / \Re_1) \quad (\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) = \vec{0})$$

$$\vec{\gamma}(M / \Re) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2 / \Re} = \frac{d\vec{V}(M / \Re_1)}{dt / \Re_1} = \vec{\gamma}(M / \Re_1) \quad (\vec{\gamma}(O_1 / \Re) = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) = \vec{0})$$

Donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_1M} + \vec{V}(O_1 / \Re)t \\ \vec{V}(M / \Re) = \vec{V}(O_1 / \Re) + \vec{V}(M / \Re_1) \\ \vec{\gamma}(M / \Re) = \vec{\gamma}(M / \Re_1) \end{cases}$$

Ces équations, donnant $\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}(M / \Re)$ et $\vec{\gamma}(M / \Re)$ en fonction de ceux dans $\Re_1$, forment la transformation de Galilée.

III. Classification des forces

III.1. Forces réelles (ou extérieures)

Les forces réelles sont deux types :

III.1.1. *Force à distance*

C'est une force s'exerçant sans l'aide d'un support matériel.

<u>Exemple</u> :

• Force électrostatique : force exercée par une charge sur une autre

$$\underset{q}{\overset{A}{\bullet}} \xrightarrow{\vec{e}_r} \qquad \xleftarrow{\vec{f}} \underset{q'}{\overset{B}{\bullet}} \quad \rightarrow \quad \vec{f} = k\frac{qq'}{r^2}\vec{e}_r \text{ (loi de coulomb)}$$

$\vec{f}$:force électrostatique exercée sur q' par q, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = r$ et $k = 9.10^9$(SI) constante de Coulomb.

• Force électromagnétique : c'est une force exercée sur un point de charge q, de vitesse $\vec{V}$, placé dans un champ électrostatique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$

• Force de gravitation : c'est une force s'exerçant entre deux masses :

$$\underset{m}{\overset{A}{\bullet}} \xrightarrow{\vec{e}_r} \qquad \xleftarrow{\vec{f}} \underset{m'}{\overset{B}{\bullet}} \quad \rightarrow \quad \vec{f} = -k\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r \text{ (loi de Newton)}$$

La masse m attire la masse m' avec la force $\vec{f}$ où $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = r$ et $k = 6.6710^{-11}$(SI) constante de gravitation.

III.1.2. *Force de contact*

C'est une force de liaison à courte distance par contact.

Une particule peut être assujettie à rester sur une courbe (trajectoire imposée). On dit alors qu'il y a une liaison entre la particule et le support.

Exemple :

• Force élastique :

(cas d'un ressort : force de rappel).

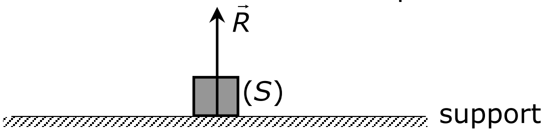
• Réaction d'un support :

La résultante $\vec{R}$ des actions de contact que le support exerce sur une particule M est appelée force de liaison ou réaction du support. Réciproquement, on dira que la particule M exerce sur le support une force $-\vec{R}$.

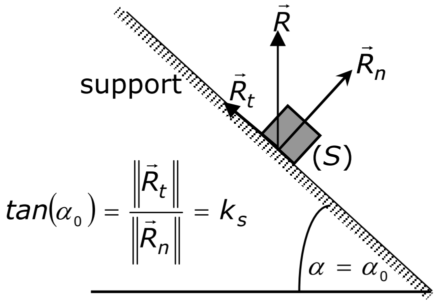
Si le support est une courbe, la réaction $\vec{R}$ peut être décomposée en la somme d'une force $\vec{R}_t$ portée par la tangente à la courbe et d'une force $\vec{R}_n$ normale à la courbe et qui peut prendre toutes les directions dans le plan perpendiculaire à la courbe.

Si le support est une surface, la composante $\vec{R}_n$ est normale à cette surface et la composante $\vec{R}_t$ peut prendre toutes les directions tangentes à cette surface en M.

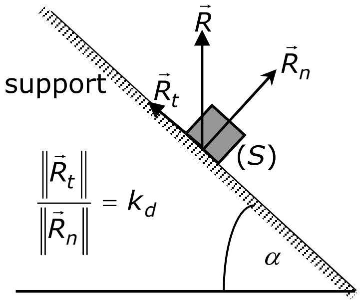
Si le support est horizontal, $\vec{R}_n$ est suffisante pour maintenir l'équilibre statique d'un corps (S) sur le support et la réaction $\vec{R}$ est normale au plan de contact c'est-à-dire $\vec{R} = \vec{R}_n$.



Dans de nombreuses situations, $\vec{R}_n$ est insuffisante pour maintenir l'équilibre relatif entre le corps (S) et le support (le support est incliné par exemple). Toutefois cet équilibre peut être maintenu par développement de frottement (ou de force de frottement) dont l'intensité dépend de la nature des surface en contact. Cette force de frottement statique est tangente à la surface de contact c'est-à-dire la composante $\vec{R}_t$ qui s'oppose au mouvement du corps (S) sur le support qui tend à s'établir. On définit classiquement le coefficient de frottement statique k_s comme le rapport de la force de frottement à la réaction normale juste à la rupture de l'équilibre ($\|\vec{R}_t\| = k_s\|\vec{R}_n\|$: la limite correspondante au déséquilibre). A l'équilibre, on aura $\|\vec{R}_t\| \leq k_s\|\vec{R}_n\|$.



équilibre : $\alpha \leq \alpha_0$

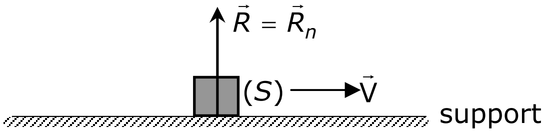


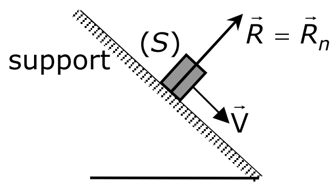
déséquilibre : $\alpha > \alpha_0$

Lorsque les frottements ne sont pas suffisantes, l'équilibre n'est plus possible et le mouvement relatif entre le corps (S) et le support se déclanche. Les frottements sont toujours présents, mais l'expérience montre que $\|\vec{R}_t\| = k_d\|\vec{R}_n\|$ où k_d est le coefficient de frottement dynamique

Souvent $k_s \geq k_d$ (exemple :acier ($k_s \approx 0.8, k_d \approx 0.4$)). Plus que k_s est faible (devant 1) plus le déséquilibre est facile à produire. Les contacts font généralement intervenir les deux composantes $\vec{R}_t$ et $\vec{R}_n$. Ils sont indépendants de la vitesse relative (tant que celle-ci reste faible).

S'il n'y a pas de frottement alors : $\vec{R}_t = \vec{0}$ et $\vec{R} = \vec{R}_n$ ($\vec{R}$ est perpendiculaire au plan de contact).





III.2. Forces d'inertie

La force d'inertie est la résistance que manifestent les corps au mouvement due à leurs masses :

- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$.
- Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$.

Les $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$ apparaissent que dans les repères non galiléens.

IV. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Il arrive souvent que l'on doive étudier le mouvement d'un point matériel dans un référentiel quelconque. Quelle est alors l'expression de la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel $\Re_1$ ayant un mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen $\Re$? D'après la loi de composition des accélérations pour un point matériel *M*, on a :

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}(M/\Re_1) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

Le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$ galiléen s'écrit :

$$m\vec{\gamma}(M/\Re) = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\vec{\gamma}(M/\Re_1) + m\vec{\gamma}_e(M) + m\vec{\gamma}_c(M) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{\gamma}_e(M) - m\vec{\gamma}_c(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

On a $\dfrac{d\vec{P}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = m\vec{\gamma}(M/\Re_1)$, il vient : $\dfrac{d\vec{P}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

Cette équation montre que la relation fondamentale de le dynamique peut s'appliquer dans tout référentiel pourvu que l'on ajoute aux forces extérieures appliquées au point matériel *M* des forces d'inertie $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$.

V. Equilibre d'un point matériel

- Référentiel galiléen $\Re$:

M est en équilibre dans $\Re \rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \overrightarrow{cte}$ ou $\vec{V}(M/\Re) = \vec{0} \rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

- Référentiel non galiléen $\Re_1$:

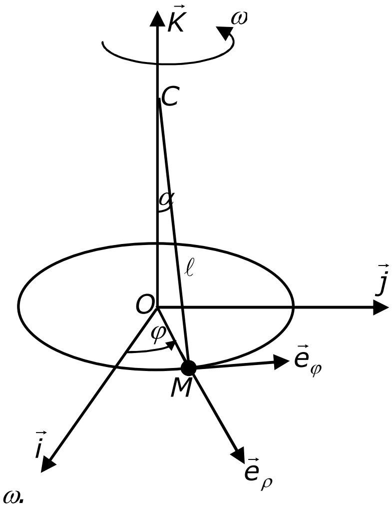
M est en équilibre dans $\Re_1 \rightarrow \vec{V}(M/\Re_1) = \overrightarrow{cte}$ ou $\vec{V}(M/\Re_1) = \vec{0} \rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re_1) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = \vec{0}$$

VI. Application du principe fondamental de la dynamique

VI.1. Pendule conique

Dans un référentiel fixe $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une bille *M* quasi ponctuelle de masse m est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixée en un point *C* de l'axe vertical (*Oz*). L'axe (*Oz*) tourne sur lui-même à la vitesse angulaire ω constante. Pour une valeur suffisante de ω le fil s'incline d'un angle α constant et inférieur à $\pi/2$ et le point *M* décrit un mouvement circulaire uniforme dans le plan (*xOy*) autour de l'axe (*Oz*), sa position étant repérée par l'angle $\varphi = \left(\vec{i}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OM}\right)$.



1°) Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de *M* par rapport au référentiel $\Re$, en fonction de ω, ℓ et α.
2°) Montrer que la norme *T* de la tension du fil ne dépend pas de ω.
3°) Déterminer l'expression de la vitesse angulaire ω en fonction de *g*, ℓ et α.
4°) Déterminer la valeur minimale ω_0 de ω au-dessous de laquelle $\alpha = 0$.

Le mouvement de *M* et plan et circulaire, donc il préférable de choisir les coordonnées polaires pour simplifier l'étude du mouvement de *M*.

Avant de répondre aux questions, on fait le calcul suivant :

On pose $\Re_1(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ le référentiel lié au point *M* tel que $\left(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{e}_\rho\right) = \left(\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{e}_\varphi\right) = \varphi$. Il vient :

$$\vec{e}_\rho = cos(\varphi)\vec{i} + sin(\varphi)\vec{j}\ ,\ \vec{e}_\varphi = -sin(\varphi)\vec{i} + cos(\varphi)\vec{j}\ ,\ \frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \omega\vec{e}_\varphi\ ,\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt/\Re} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho = -\omega\vec{e}_\rho\ ,$$

$$\Omega(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{k} = \omega\vec{k}$$

Le vecteur position de M dans $\Re$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|\vec{e}_\rho = \ell\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho$

1°) - On détermine l'expression du vecteur vitesse de M par rapport au référentiel $\Re$:

$$\vec{V}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\left(\ell\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho\right)}{dt/\Re} = \ell\, sin(\alpha)\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} = \ell\omega\, sin(\alpha)\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \ell\omega\, sin(\alpha)\vec{e}_\varphi$$

- On détermine l'expression du vecteur accélération de M par rapport au référentiel $\Re$:

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d\left(\ell\omega\, sin(\alpha)\vec{e}_\varphi\right)}{dt/\Re} = \ell\omega\, sin(\alpha)\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt/\Re} = -\ell\omega^2\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = -\ell\omega^2\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho$$

2°) On montre que la norme T de la tension du fil ne dépend pas de ω :

En utilisant le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$, on trouve :

$\Re$ est un référentiel est galiléen car il est fixe. Alors ce principe s'écrit dans $\Re$:

$$m\vec{\gamma}(M/\Re) = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T}$$

où $\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ est le poids de M et $\vec{T} = T\vec{u}$ ($\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{MC}}{\left\|\overrightarrow{MC}\right\|} = \dfrac{\overrightarrow{MC}}{\ell}$) est la tension du fil.

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} = -\ell\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho + \ell\, cos(\alpha)\vec{k} \Rightarrow \vec{T} = -T\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho + T\, cos(\alpha)\vec{k}$$

Finalement on trouve : $-mg\vec{k} - T\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho + T\, cos(\alpha)\vec{k} = -m\ell\omega^2\, sin(\alpha)\vec{e}_\rho$ (*)

Multipliant la relation (*) par $\vec{k}$, on obtient :

$$-mg + T\, cos(\alpha) = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{cos(\alpha)} \Rightarrow \text{la norme de } T \text{ ne dépend pas de } \omega.$$

3°) On détermine l'expression de la vitesse angulaire ω en fonction de g, ℓ et α :

Multipliant la relation (*) par $\vec{e}_\rho$, on obtient :

$$-T\, sin(\alpha) = -m\ell\omega^2\, sin(\alpha) \Rightarrow T = m\ell\omega^2 \Rightarrow \frac{mg}{cos(\alpha)} = m\ell\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\ell\, cos(\alpha)}$$

4°) On détermine la valeur minimale ω_0 de ω au-dessous de laquelle $\alpha = 0$:

$$\alpha = 0 \rightarrow cos(\alpha) = 1 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ (pulsation propre)}$$

$cos(\alpha) \le 1 \Rightarrow \omega \ge \sqrt{\dfrac{g}{\ell}} = \omega_0$ c'est la condition pour que le mouvement soit possible.

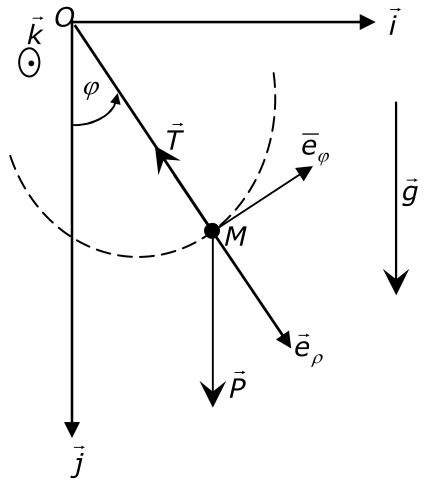
VI.2. Pendule simple

En physique, le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse, inextensible et sans raideur et oscillant sous l'effet de la pesanteur. Il s'agit du modèle de pendule pesant le plus simple. Il est parfois appelé pendule de gravité idéal et, par opposition, tout pendule de gravité réel est appelé pendule pesant composé. Par extension on appelle aussi parfois pendule simple un dispositif dans lequel le fil inextensible est remplacé par une tige rigide de masse nulle pouvant tourner sans frottement dans un plan vertical autour de son extrémité fixe.

Il est possible d'approcher expérimentalement cet objet théorique en suspendant une masse de faible dimension au bout d'un fil (voir illustration). À cause de sa nature relativement simple, il se prête à des études théoriques poussées sur le plan mathématique. Ces études ont trouvé plusieurs applications en physique théorique, notamment dans les systèmes harmoniques simples.

Sous l'effet de son poids, lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), le point matériel de masse m se déplace sur un arc de cercle: l'effet du poids tendant constamment à ramener le pendule vers sa position d'équilibre stable, celui-ci se met à osciller.

On repère la position du pendule simple par l'angle φ qu'il fait avec la verticale descendante ($O\vec{i}$) d'un référentiel fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$(($xOy$) étant le plan vertical). On choisit une orientation positive : la position de la masse est donc repérée par l'élongation angulaire algébrique $\varphi = \left(\vec{i}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OM}\right)$.



On note $\vec{g}$ l'accélération due à la pesanteur et on suppose que les frottements de l'air sont négligeables et que la projection de M sur l'axe (Oz) est nulle quelque soit le temps.

Le mouvement de M est plan et circulaire, alors on travaille avec les coordonnées polaires (ρ,φ) pour simplifier l'étude du mouvement. On désigne par $\Re_1(M,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ le référentiel lié au point M tel que $\left(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{e}_\rho\right) = \left(\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{e}_\varphi\right) = \varphi$. Il vient :

$$\vec{e}_\rho = cos(\varphi)\vec{i} + sin(\varphi)\vec{j}\ ,\ \vec{e}_\varphi = -sin(\varphi)\vec{i} + cos(\varphi)\vec{j}\ ,\ \frac{d\vec{e}_\rho}{dt\ /\ \Re} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\ ,\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt\ /\ \Re} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho\ ,\ \Omega(\Re_1\ /\ \Re) = \dot{\varphi}\vec{k}$$

$M \in (xOy) \rightarrow z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho = \ell\vec{e}_\rho$ (fil inextensible $\rightarrow$ longueur du fil est constante: $\ell = cte$).

Les vecteurs de vitesse et d'accélération s'écrivent :

$$\vec{V}(M\ /\ \Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt\ /\ \Re} = \ell\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \text{ et } \vec{\gamma}(M\ /\ \Re) = \frac{d\vec{V}(M\ /\ \Re)}{dt\ /\ \Re} = -\ell\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ell\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Le frottement de l'air est négligeable $\rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T}$

avec $\vec{P} = mg\vec{i} = mg\,cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\,sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$ est le poids de M et $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$ est la tension du fil.

Ainsi, le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$ s'écrit :

$$m\vec{\gamma}(M\ /\ \Re) = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow -m\ell\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + m\ell\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi = mg\,cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\,sin(\varphi)\vec{e}_\varphi - T\vec{e}_\rho \quad (*)$$

En multipliant l'équation (*) par $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$, on trouve :

$$-m\ell\dot{\varphi}^2 = mg\,cos(\varphi) - T \text{ et } m\ell\ddot{\varphi} = -mg\,sin(\varphi)$$

Finalement on trouve :

$$T = mg\,cos(\varphi) + m\ell\dot{\varphi}^2 \text{ : Norme de la tension du fil.}$$

et

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}sin(\varphi) = 0$$

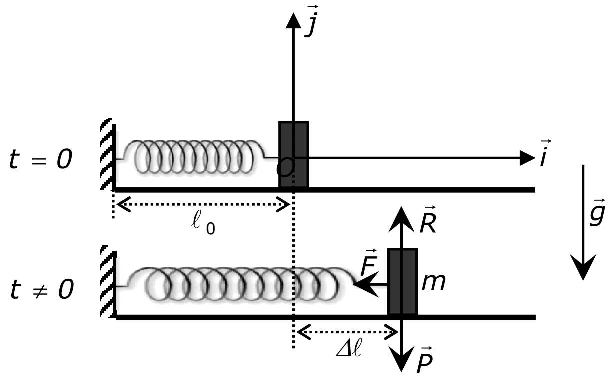
(équation différentiel du mouvement de M vérifiée par le paramètre φ)

Pour des oscillations de faibles amplitudes (c-à-d $\varphi \approx 0 \rightarrow sin(\varphi) = \varphi$), cette équation s'écrit :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 \ (*).$$

VI.3. Ressort horizontal

On considère un ressort, de raideur k et de longueur initiale ℓ_0, posé horizontalement et auquel est accrochée une masse m. On écarte légèrement la masse m de sa position d'équilibre (x = 0) et on la lâche sans vitesse initiale. On suppose que le mouvement de M se fait sans frottement. On désigne par $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le référentiel lié à m à l'instant initiale.



$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \dot{x}\vec{i}$ et $\vec{\gamma}(M/\Re) = \dfrac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = \ddot{x}\vec{i}$

Bilan des forces appliquées sur la masse m :

- Force de rappel (force appliquée par le ressort) : $\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{i} = -kx\vec{i}$, $\Delta\ell = \ell_0 + x - \ell_0 = x$
- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{j}$
- Réaction du support : $\vec{R} = \|\vec{R}_n\|\vec{j} = \|\vec{R}\|\vec{j} = R\vec{j}$ (mouvement sans frottement : $\vec{R}_t = \vec{0}$).

En utilisant le principe de la dynamique dans $\Re$ galiléen, on trouve :

$$m\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} \Rightarrow m\ddot{x}\vec{i} = -mg\vec{j} - kx\vec{i} + R\vec{j}$$

En multipliant cette équation par $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on obtient :

$\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$ (**): Equation différentielle du mouvement de la masse m ;

$R = mg$: la norme de la réaction du support.

Remarque :

Les équations différentielles du mouvement (*) et (**) obtenues dans les deux applications précédentes (pendule simple et ressort horizontal), peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \text{ (***) } (y = \varphi \text{ ou } y = x)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ ou $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ est la pulsation.

Alors les deux systèmes représentent des oscillateurs harmoniques non amortis (sans frottements) (voir chapitre VI).

L'équation (***), a pour solution : $y(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$ qui peut être écrite sous la forme : $y(t) = y_m \cos(\omega_0 t + \theta)$ où y_m est l'amplitude du mouvement et θ étant la phase à l'origine. Ces deux constantes sont déterminées à partir des conditions initiales.

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ .est la période des oscillations autour de la position d'équilibre $y = 0$.

VI.4. Calcul du poids

Soit $\Re(O_T,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un référentiel lié au centre de la terre et qui garde une orientation fixe par rapport au référentiel de Copernic ($(O_T\vec{k})$ est l'axe de rotation propre de la terre). Soit

$\Re_1(O_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ un référentiel sphérique lié à la particule M de masse m et fixée sur la surface de la terre($\overrightarrow{O_T M} = R_T \vec{e}_r = R_T \cos(\theta)\vec{k} + R_T \sin(\theta)\vec{e}_\rho$, R_T étant le rayon de la terre).

En appliquent le principe fondamental de la dynamique dans $\Re_1$, on trouve :

$$m\vec{\gamma}(M / \Re_1) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

avec :

- $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{R} + \vec{F}_g$: $\vec{R}$ est la réaction de la terre et $\vec{F}_g = \frac{-GmM_T}{R_T^2}\vec{e}_r = m\vec{a}$ est la force de gravitation appliquée par la terre (M_T est la masse de la terre, G est la constante de gravitation, $\vec{a} = \frac{-GM_T}{R_T^2}\vec{e}_r$ est le champ gravitationnel crée par la terre).
- $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \vec{V}(M / \Re_1) = -2m\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \vec{V}(O_1 / \Re_1) = \vec{0}$ ($M \equiv O_1 \rightarrow \overrightarrow{O_1 M} = \vec{0}$)
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M) = -m\left(\vec{\gamma}(O_1 / \Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re)}{dt / \Re} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \left[\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \overrightarrow{O_1 M}\right]\right)$

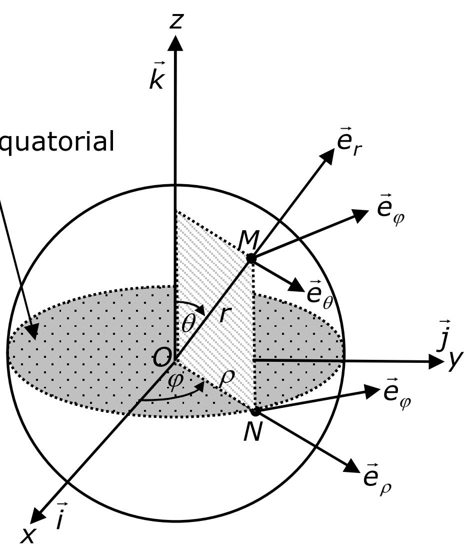
$$= -m\vec{\gamma}(O_1 / \Re) = -m\frac{d^2\overrightarrow{O_T O_1}}{dt^2 / \Re}$$

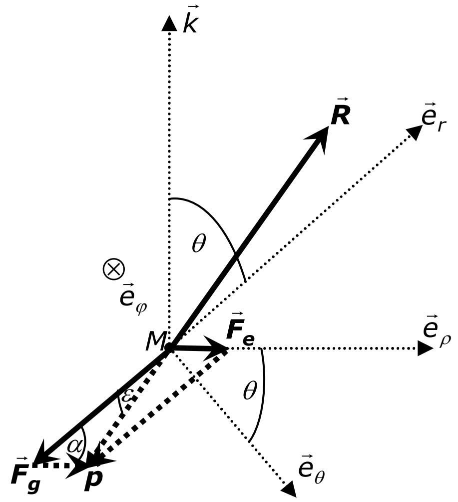
$$\overrightarrow{O_T O_1} = R_T\vec{e}_r \rightarrow \frac{d\overrightarrow{O_T O_1}}{dt / \Re} = R_T \frac{d\vec{e}_r}{dt / \Re} = R_T \sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = R_T \sin(\theta)\omega\vec{e}_\varphi \rightarrow \frac{d^2\overrightarrow{O_T O_1}}{dt^2 / \Re} = -R_T \sin(\theta)\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = mR_T \sin(\theta)\omega^2\vec{e}_\rho$$

- $\vec{\gamma}(M / \Re_1) = \vec{0}$ ($\Re_1$ est lié à M)

$$\Rightarrow \vec{R} + \vec{F}_g + \vec{F}_e = \vec{0}$$





$M_T = 6\ 10^{24} kg$, $R_T = 6.370\ 10^6 m$, $\omega = 7.2921\ 10^{-5} rad.s^{-1}$, $G = 6.67\ 10^{-11} S.I$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ est la latitude $\rightarrow \sin(\theta) = \cos(\alpha) \Rightarrow \vec{F}_e = mR_T \cos(\alpha)\omega^2\vec{e}_\rho$

Pour la région Tadla-Azilal, on $\alpha = 32.33°$ N.

Application numérique :

$$\|\vec{\gamma}_e\| = \left|R_T \cos(\alpha)\omega^2\right| = 0.02862 m / s^2$$

$$\|\vec{a}\| = \left|\frac{-GM_T}{R_T^2}\right| = 9.8628 m / s^2$$

Calcul du poids :

Par définition, le poids est la force de la pesanteur, d'origine gravitationnelle et inertielle, exercée par la terre sur un corps massique en raison uniquement du voisinage de la terre. Elle est égale à l'opposé de la résultante des autres forces appliquées au centre de gravité du corps lorsque celui-ci est immobile dans le référentiel terrestre. Cette force est la résultante des efforts dus à la gravité et à la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la terre sur elle-même. Elle s'applique au centre de gravité du corps et sa direction définit la verticale qui passe approximativement par le centre de la terre. Le poids est une action à distance toujours proportionnelle à la masse.

En toute rigueur le poids n'est défini que dans le référentiel terrestre et ne prend en compte que les effets gravitationnels et inertiels. Néanmoins, lorsqu'on prend également en compte d'autres forces telles que de la poussée d'Archimède par exemple, ou qu'on étudie l'équilibre d'un corps dans un référentiel en mouvement dans le référentiel terrestre, on parle alors de poids apparent.

Dans le cas présent, on aura donc :

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_e = -\vec{R}$$

Quel que soit le corps, le rapport du poids $\vec{P}$ à sa masse m est identique et noté $\vec{g}$: $\vec{P} = m\vec{g}$ où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur ($g = \|\vec{g}\|$ est en unité m.s^{-2}, qui est l'unité de l'accélération). Ainsi :

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_e \rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} - m\vec{\gamma}_e \Rightarrow \vec{g} = \vec{a} - \vec{\gamma}_e$$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\|\vec{a}\|\cos(\theta)\vec{k} - \|\vec{a}\|\sin(\theta) - \|\vec{\gamma}_e\|\vec{e}_\rho = -\|\vec{a}\|\cos(\theta)\vec{k} - \left(\|\vec{a}\|\sin(\theta) + \|\vec{\gamma}_e\|\right)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\|\vec{a}\|\sin(\alpha)\vec{k} - \left(\|\vec{a}\|\cos(\alpha) + \|\vec{\gamma}_e\|\right)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow g = \|\vec{g}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \sin^2(\alpha) + \left(\|\vec{a}\|\cos(\alpha) + \|\vec{\gamma}_e\|\right)^2} = 9.8869 m/s^2$$

Remarque :

- $\|\vec{\gamma}_e\|$ est maximum à l'équateur et nul aux pôles.

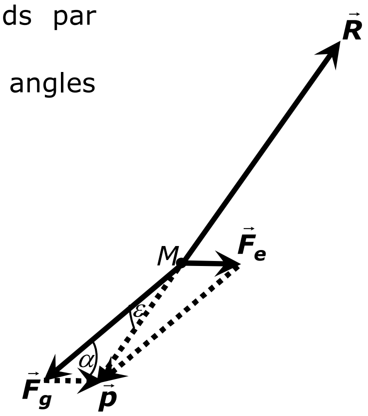
- $\|\vec{\gamma}_e\| <<< \|\vec{a}\| \rightarrow \|\vec{F}_e\| <<< \|\vec{F}_g\| \Rightarrow$ tout référentiel lié au laboratoire (terrestre) peut être considéré galiléen avec de très bonne approximation.

- ε est l'angle qui donne la dérivation du poids par rapport à la verticale

A partir de la figure suivante, la relation liant les angles d'un triangle s'écrit :

$$\frac{\|\vec{F}_e\|}{\sin(\varepsilon)} = \frac{\|\vec{P}\|}{\sin(\alpha)} = \frac{\|\vec{F}_g\|}{\sin(\pi - \alpha - \varepsilon)} = \frac{\|\vec{F}_g\|}{\sin(\alpha + \varepsilon)}$$

$$\rightarrow \sin(\alpha + \varepsilon) = \frac{\sin(\varepsilon)\|\vec{F}_g\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\sin(\alpha)\|\vec{F}_g\|}{\|\vec{P}\|}$$



$$\rightarrow \sin(\varepsilon) = \frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{P}\|}\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{\gamma}_e\|}{\|\vec{g}\|}\sin(\alpha) = \frac{R_T \cos(\alpha)\omega^2}{g}\sin(\alpha) = \frac{R_T\omega^2}{2g}\sin(2\alpha) = 0.001548$$

$\Rightarrow \varepsilon = 0.0887°$ $\rightarrow \varepsilon$ est faible $\Rightarrow$ la direction du poids est approximativement verticale passant par le centre de la terre.

Chapitre V	**Théorèmes Généraux de la Dynamique du Point Matériel**

La détermination des caractéristiques du mouvement d'une particule *M* peut se faire par intégration de la loi fondamentale de la dynamique. En combinant cette loi avec les relations cinématiques établies, on démontre ce qu'on nomme les théorèmes généraux de la dynamique du point matériel. L'utilisation de ces théorèmes permet de résoudre d'une manière plus aisée toute une classe de problèmes de mécanique du point matériel.

I. Théorème de la quantité de mouvement

Dans un référentiel $\Re$, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement, est égale à la résultante des forces réelles appliquées à un point matériel *M* :

$$\frac{d\vec{P}(M/\Re)}{dt/\Re} = m\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re} = m\vec{\gamma}(M/\Re) = \sum \vec{F}_{ext}$$

- Si *M* est isolé ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$), alors $\frac{d\vec{P}(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}(M/\Re) = \overrightarrow{cte}$ (conservation de la quantité de mouvement).

- Dans un référentiel non galiléen $\Re_1$, ce théorème s'écrit :

$$\frac{d\vec{P}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

Si $\Re_1$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\Re$, donc :

$\vec{F}_e = \vec{F}_c = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d\vec{P}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \sum \vec{F}_{ext}$: la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement est invariante au cours d'une transformation galiléenne.

II. Théorème du moment cinétique

II. 1. Moment d'une force

II.1.1. *Moment d'une force par rapport à un point*

Le moment d'une force par rapport à un point donné est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour de ce point, appelé souvent pivot. Il s'exprime en *N.m* (newton-mètre).

Le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel *M*, par rapport à un point quelconque *O* est exprimé par :

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}, \text{ } M \text{ étant le point d'application de } \vec{F}$$

- Le vecteur $\vec{m}_O(\vec{F})$ est perpendiculaire à $\vec{F}$ et à $\overrightarrow{OM}$
- Le sens de $\vec{m}_O(\vec{F})$ est tel que $(\overrightarrow{OM}, \vec{F}, \vec{m}_O(\vec{F}))$ constitue un trièdre direct.
- $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} // \vec{F} \Rightarrow$ le support de $\vec{F}$ passe par le point *O* (car *M* appartenant à ce support).
- Pour un point quelconque *A* appartenant au support de $\vec{F}$ ($\overrightarrow{AM} // \vec{F}$), on aura :

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \underbrace{\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}_{\vec{0}} \Rightarrow \vec{m}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$\Rightarrow \vec{m}_O(\vec{F})$ ne dépend pas de la position de *M* sur le support de $\vec{F}$.

- Pour un point quelconque *O'* différent du point O, on a :

$$\vec{m}_{O'}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{m}_{O'}(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$$

II.1.2. *Moment d'une force par rapport à un axe*

Le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel *M*, par rapport à un axe (Δ) quelconque de vecteur unitaire $\vec{u}$ et passant par un point *O*, est le scalaire :

$$m_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F})\vec{u} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F})\vec{u}$$

- Pour un point quelconque *O'* de (Δ) différent du point *O*, on a :

$$m_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_{O'}(\vec{F}).\vec{u} = (\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}).\vec{u} = \underbrace{(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}).\vec{u}}_{0} + (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u} = \vec{m}_O(\vec{F}).\vec{u}$$

$\Rightarrow m_\Delta(\vec{F})$ est indépendant du point *O* appartenant à (Δ) (*O* est quelconque de (Δ))

II. 2. Moment cinétique

II.2.1. *Moment cinétique par rapport à un point*

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/\Re)$, d'un point matériel *M* de masse *m* en mouvement dans un référentiel $\Re$, par rapport à un point quelconque *O*, est le moment de son vecteur quantité de mouvement $\vec{P}(M/\Re)$ par rapport au même point *O* :

$$\vec{\sigma}_O(M/\Re) = \vec{m}_O(\vec{P}(M/\Re)) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re)$$

- Le point O peut être mobile dans $\Re$.
- $\vec{\sigma}_O(M/\Re)$ est relatif au référentiel dans lequel on exprime la vitesse de *M*.
- $(\overrightarrow{OM}, \vec{P}(M/\Re), \vec{\sigma}_O(M/\Re))$ constitue un trièdre direct.
- Pour un point quelconque O' différent du point *O*, on aura :

$$\vec{\sigma}_{O'}(M/\Re) = \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{V}(M/\Re) = \overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{V}(M/\Re) + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{O'}(M/\Re) = \vec{\sigma}_O(M/\Re) + \overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{V}(M/\Re)$$

II.2.2. *Moment cinétique par rapport à un axe*

Le moment cinétique, d'un point matériel *M* de masse *m* en mouvement dans un référentiel $\Re$, par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$ et passant par un point *O*, est le moment de son vecteur quantité de mouvement par rapport à cet axe :

$$\sigma_\Delta(M/\Re) = m_\Delta(\vec{P}(M/\Re)) = \vec{m}_O(\vec{P}(M/\Re)).\vec{u} = \vec{\sigma}_{O'}(M/\Re).\vec{u} = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re)).\vec{u}$$

(*O* est quelconque de (Δ))

II. 3. Théorème du moment cinétique

II. 3.1 *Théorème du moment cinétique par rapport à un point*

<u>Cas d'un référentiel galiléen</u> :

Soit *M* un point matériel en mouvement dan un référentiel galiléen $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{\sigma}_O(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re) \rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} \wedge m\vec{V}(M/\Re) + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = \underbrace{\vec{V}(M/\Re) \wedge m\vec{V}(M/\Re)}_{0} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

Or $\vec{m}_O(\sum \vec{F}_{ext}) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$ donc on aura : $\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_O(\sum \vec{F}_{ext})$(*O* est <u>fixe</u> dans $\Re$)

D'où l'énoncé du théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen :

La dérivée par rapport au temps, dans un référentiel galiléen, du moment cinétique d'un point matériel *M*, par rapport à un point <u>fixe</u> *O*, est égale au moment de la résultante des forces extérieures appliquées à *M*, par rapport au même point *O*.

<u>Remarques</u> :

- Le théorème du moment cinétique est valable quelque soit le point fixe dans un référentiel galiléen.
- Le théorème du moment cinétique par rapport un point mobile *A* dans $\Re$, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_A(\sum \vec{F}_{ext}) + m\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{V}(A/\Re)$$

<u>Démonstration</u> :

$$\vec{\sigma}_A(M/\Re) = \vec{\sigma}_O(M/\Re) + \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{V}(M/\Re)$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} + \frac{d\overrightarrow{AO}}{dt/\Re} \wedge m\vec{V}(M/\Re) + \overrightarrow{AO} \wedge m\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt/\Re}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) - \vec{V}(A/\Re) \wedge m\vec{V}(M/\Re) + \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{\gamma}(M/\Re)$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + m\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{V}(A/\Re) + \overrightarrow{AO} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

Or $\vec{m}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \overrightarrow{AO} \wedge \sum \vec{F}_{ext} + \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{m}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \overrightarrow{AO} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$

Donc, il vient :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + m\vec{V}(M/\Re) \wedge \vec{V}(A/\Re)$$

Si A est un fixe dans $\Re$, cette dernière expression est simplifiée :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$$

$\Rightarrow$ Il est préférable de choisir un point fixe pour appliquer le théorème du moment cinétique.

- Si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

$$\Rightarrow \vec{m}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_2 + ... + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_n$$

$$\Rightarrow \vec{m}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{m}_O\left(\vec{F}_1\right) + \vec{m}_O\left(\vec{F}_2\right) + ... + \vec{m}_O\left(\vec{F}_n\right)$$

$$\Rightarrow \vec{m}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

- Si le point M est isolé (moment de la résultante des forces est nul), alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_O(M/\Re) = \overrightarrow{cte}$$

<u>Cas d'un référentiel non galiléen</u> :

Si O_1 un point <u>fixe</u> dans un référentiel non galiléen $\Re_1$, le théorème du moment cinétique par rapport au référentiel $\Re_1$, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_e\right) + \vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_c\right)$$

<u>Démonstration</u> :

$$\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{V}(M/\Re_1) \rightarrow$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \vec{V}(M/\Re_1) \wedge m\vec{V}(M/\Re_1) + \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \left(\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c\right)$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_e\right) + \vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_c\right)$$

- Si A est un point mobile dans $\Re_1$, alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_A\left(\vec{F}_e\right) + \vec{m}_A\left(\vec{F}_c\right) + m\vec{V}(M/\Re_1) \wedge \vec{V}(A/\Re_1)$$

II. 3.2 *Théorème du moment cinétique par rapport à un axe*

<u>Cas d'un référentiel galiléen</u> :

Soit (Δ) un axe fixe dans un référentiel galiléen $\Re$. Le théorème du moment cinétique par rapport au référentiel $\Re$ et par rapport à l'axe (Δ), s'écrit :

$$\frac{d\sigma_\Delta(M/\Re)}{dt} = m_\Delta\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$$

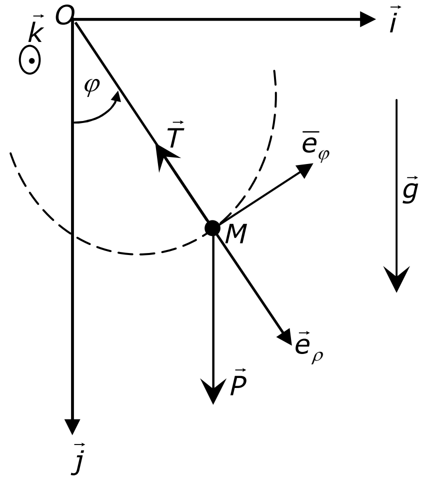
<u>Cas d'un référentiel non galiléen</u> :

Soit (Δ_1) un axe fixe dans un référentiel non galiléen $\Re_1$. Le théorème du moment cinétique par rapport au référentiel $\Re_1$ et par rapport à l'axe (Δ_1), s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{\Delta_1}(M/\Re_1)}{dt} = m_{\Delta_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + m_{\Delta_1}\left(\vec{F}_e\right) + m_{\Delta_1}\left(\vec{F}_c\right)$$

II. 4. Application du théorème du moment cinétique

Dans ce paragraphe, on va appliquer le théorème du moment cinétique, pour le cas du pendule simple et on retrouve l'équation différentielle du mouvement obtenue dans le chapitre précédant (on conserve les mêmes hypothèses).



D'après le paragraphe VI.2. (chapitre III), on a:

$\vec{V}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \ell\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ (vitesse de M), $\vec{P} = mg\cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$ (poids de M) et $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$ (tension du fil).

Le moment cinétique de M par rapport à O et à $\Re$ est exprimé par :

$$\vec{\sigma}_O(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re) = \ell\vec{e}_\rho \wedge m\ell\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = m\ell^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

Appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ galiléen ($\Re$ est fixe), on obtient :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{T})$$

Or

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = m\ell^2\ddot{\varphi}\vec{k}$$

$$\vec{m}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \ell\vec{e}_\rho \wedge \left(mg\cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi\right) = -\ell mg\sin(\varphi)\vec{k}$$

$$\vec{m}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \ell\vec{e}_\rho \wedge -T\vec{e}_\rho = \vec{0}$$

Donc, il vient :

$$m\ell^2\ddot{\varphi}\vec{k} = -\ell mg\sin(\varphi)\vec{k}$$

En multipliant cette équation par $\vec{k}$, on retrouve finalement :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0$$

(Equation différentiel du mouvement de M vérifiée par le paramètre φ)

III. Théorème de l'énergie cinétique
III.1. Travail d'une force

Soit M un point matériel en mouvement dans un référentiel $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, de vecteur position $\overrightarrow{OM}$, de vecteur vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et soumis à la résultante des forces $\vec{F}$.

Pendant un intervalle de temps dt, M se déplace d'une quantité $d\overrightarrow{OM} = \vec{V}(M/\Re)dt$.

On appelle travail élémentaire dW de la force $\vec{F}$ pendant dt (ou bien au cours du déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$) calculé dans le référentiel $\Re$, la quantité :

$$dW(\vec{F}/\Re) = \vec{F}d\overrightarrow{OM} = \vec{F}\vec{V}(M/\Re)dt \quad \text{(Joule(J)=N.m)}$$

Pour obtenir le travail de $\vec{F}$ sur un trajet fini (AB) (travail effectué par $\vec{F}$ lorsqu'elle se déplace entre les positions A et B), on intègre l'équation précédente :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}/\Re\right)=\int_A^B dW\left(\vec{F}/\Re\right)=\int_A^B \vec{F}d\overrightarrow{OM}=\int_A^B \vec{F}\vec{V}(M/\Re)dt$$

- Cette intégrale doit être prise le long de la trajectoire décrite par le point M (le travail dépend de A et B et du chemin suivi pour aller de A à B) sauf pour les forces dites conservatives où le travail ne dépend pas de ce trajet particulier.

- Le travail dépend de la vitesse, donc il dépend du référentiel.

- Si $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$, alors $\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}/\Re\right)=\sum_{i=1}^{n}\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}_i/\Re\right)$

- $dW\left(\vec{F}/\Re\right)=\vec{F}\vec{V}(M/\Re)dt=\vec{F}\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|\vec{\tau}dt=F_\tau\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|dt$ avec $F_\tau=\vec{F}\vec{\tau}$ (dans la base de Frenet : $\vec{F}=F_\tau\vec{\tau}+F_n\vec{n}+F_b\vec{b}$) $\Rightarrow$ uniquement la composante tangentielle de $\vec{F}$ qui travaille.

III.2. Puissance d'une force

A un instant t, la puissance d'une force $\vec{F}$ dans un référentiel $\Re$ est définie par :

$$P\left(\vec{F}/\Re\right)=\frac{dW\left(\vec{F}/\Re\right)}{dt}=\vec{F}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}$$

$$P\left(\vec{F}/\Re\right)=\vec{F}\vec{V}(M/\Re)\ \text{(watts}(w)=J/s=N.m/s)$$

Si $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$, alors $P\left(\vec{F}/\Re\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(\vec{F}_i/\Re\right)$

III.3. Energie cinétique

On appelle énergie cinétique d'un point matériel M, de masse m animé d'une vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ dans un référentiel $\Re$, la quantité :

$$E_c(M/\Re)=\frac{1}{2}m\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^2=\frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\Re)$$

III.4. Théorème de l'énergie cinétique

<u>Cas d'un référentiel galiléen</u> :

Soient $\Re$ un référentiel galiléen et $\vec{F}=\sum\vec{F}_{ext}$ la résultante des forces extérieures appliquées sur M.

$$\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{\gamma}(M/\Re)\to dW\left(\vec{F}/\Re\right)=\vec{F}\vec{V}(M/\Re)dt=\sum\vec{F}_{ext}\vec{V}(M/\Re)dt=m\vec{\gamma}(M/\Re)\vec{V}(M/\Re)dt$$

$$\to dW\left(\vec{F}/\Re\right)=m\vec{V}(M/\Re)d\vec{V}(M/\Re)=\frac{1}{2}md\vec{V}^2(M/\Re)=d\left[\frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\Re)\right]$$

$$\Rightarrow dW\left(\vec{F}/\Re\right)=dE_c(M/\Re)$$

En intégrant entre deux positions A et B, on trouve :

$$E_{c_B}(M/\Re)-E_{c_A}(M/\Re)=\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}/\Re\right)=$$

D'où le théorème de l'énergie cinétique pour un référentiel galiléen :

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M dans un référentiel galiléen entre deux positions A et B est égale au travail de la résultante des forces extérieures appliquées sur M entre A et B.

<u>Cas d'un référentiel non galiléen</u> :

Soient $\Re_1\left(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1\right)$ un référentiel non galiléen et $\vec{F}=\sum\vec{F}_{ext}$ la résultante des forces extérieures appliquées sur M.

On a $\vec{F}+\vec{F}_e+\vec{F}_c=m\vec{\gamma}(M/\Re_1)$, alors :

$$dW\left(\vec{F}+\vec{F}_e+\vec{F}_c/\Re_1\right)=\left(\vec{F}+\vec{F}_e+\vec{F}_c\right)\vec{V}(M/\Re_1)dt=m\vec{\gamma}(M/\Re_1)\vec{V}(M/\Re_1)dt$$

$$\Rightarrow\ dW\left(\vec{F}+\vec{F}_e+\vec{F}_c\ /\ \Re_1\right)=m\vec{V}(M/\Re_1)d\vec{V}(M/\Re_1)=\frac{1}{2}md\vec{V}^2(M/\Re_1)=d\left[\frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\Re_1)\right]$$

$$\Rightarrow\ dW\left(\vec{F}+\vec{F}_e+\vec{F}_c\ /\ \Re_1\right)=dE_c(M/\Re_1)$$

$$\Rightarrow\ dE_c(M/\Re_1)=dW\left(\vec{F}\ /\ \Re_1\right)+dW\left(\vec{F}_e\ /\ \Re_1\right)+dW\left(\vec{F}_c\ /\ \Re_1\right)$$

Or

$$dW\left(\vec{F}_c\ /\ \Re_1\right)=\vec{F}_c.d\overrightarrow{O_1M}=\vec{F}_c\vec{V}(M\ /\ \Re_1)dt=-m\vec{\gamma}_c(M)\vec{V}(M\ /\ \Re_1)dt$$
$$=-m\left[2\vec{\Omega}(\Re_1\ /\ \Re)\wedge\vec{V}(M\ /\ \Re_1)\right]\vec{V}(M\ /\ \Re_1)dt=0$$

La force de Coriolis ne travaille pas dans $\Re_1$ ($\vec{F}_c$ est perpendiculaire à $d\overrightarrow{O_1M}$).

Alors :

$$dE_c(M/\Re_1)=dW\left(\sum\vec{F}_{ext}\ /\ \Re_1\right)+dW\left(\vec{F}_e\ /\ \Re_1\right)$$

Cette équation représente la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.

En intégrant entre deux positions A et B, on obtient :

$$E_{c_B}(M/\Re_1)-E_{c_A}(M/\Re_1)=\underset{A\to B}{W}\left(\sum\vec{F}_{ext}\ /\ \Re_1\right)+\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}_e\ /\ \Re_1\right)$$

(théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen)

Remarques :

- $dE_c(M/\Re)=dW\left(\vec{F}\ /\ \Re\right)\rightarrow\dfrac{dE_c(M/\Re)}{dt}=\dfrac{dW\left(\vec{F}\ /\ \Re\right)}{dt}=\vec{F}\vec{V}(M\ /\ \Re)=P\left(\vec{F}\ /\ \Re\right)$

$$\frac{dE_c(M/\Re)}{dt}=P\left(\vec{F}\ /\ \Re\right)\ (\Re\ \text{galiléen})\ (*)$$

- $dE_c(M/\Re_1)=dW\left(\sum\vec{F}_{ext}\ /\ \Re_1\right)+dW\left(\vec{F}_e\ /\ \Re_1\right)$

$$\rightarrow\ \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt}=\frac{dW\left(\sum\vec{F}_{ext}\ /\ \Re_1\right)}{dt}+\frac{dW\left(\vec{F}_e\ /\ \Re_1\right)}{dt}$$

$$\rightarrow\ \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt}=\sum\vec{F}_{ext}\vec{V}(M\ /\ \Re)+\vec{F}_e\vec{V}(M\ /\ \Re)=P\left(\sum\vec{F}_{ext}\ /\ \Re_1\right)+P\left(\vec{F}_e\ /\ \Re_1\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt}=P\left(\sum\vec{F}_{ext}\ /\ \Re_1\right)+P\left(\vec{F}_e\ /\ \Re_1\right)\ (\Re_1\ \text{non galiléen})\ (**)$$

Les équations (*) et (**) permettent de déterminer les équations différentielles du mouvement d'un point matériel M.

IV. Théorème de l'énergie mécanique

IV.1. Energie potentielle

IV.1.1. *Définition*

L'énergie potentielle est l'énergie que possède un système, du fait de sa position ou de sa forme, et qui se transforme en énergie cinétique. Exemple : - Position : énergie potentielle de pesanteur - Forme : énergie potentielle élastique (cas d'un ressort).

Elle est une fonction de ce système, dépendant des coordonnées d'espace, et éventuellement du temps, ayant la dimension d'une énergie et qui est associée à une force dite conservative dont l'expression s'en déduit par dérivation. La différence entre les énergies potentielles associées à deux points de l'espace est égale à l'opposé du travail de la force concernée pour aller d'un point à l'autre, et ce quelque soit le chemin utilisé.

Une force de frottement n'est pas conservative et ne dérive pas d'une énergie potentielle.

IV.1.2. *Relation liant l'énergie potentielle et le travail d'une force*

Une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, s'il existe une fonction scalaire E_p telle que :

$$\vec{F}=-\overrightarrow{grad}(E_p)$$

E_p est l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F}$ exercée sur le point M dans le référentiel $\Re$:

$$E_p=E_p(M\ /\ \Re)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, le travail élémentaire dW de $\vec{F}$ est :

$$dW(\vec{F}/\Re) = \vec{F}d\overrightarrow{OM}$$

D'une autre part, on a $dE_p = \overrightarrow{grad}(E_p)d\overrightarrow{OM}$, donc :

$$dE_p(M/\Re) = -dW(\vec{F}/\Re)$$

Remarques :

- L'énergie potentielle est définie à une constante additive près. Celle-ci n'a aucune influence sur les résultats puisque l'énergie potentielle est utilisée dans des opérations de dérivation (calcul d'une force conservative) ou de variation (calcul d'un travail). Ces deux opérations faisant disparaître la constante, le choix de cette dernière est donc purement arbitraire et sa détermination se fait généralement de façon à simplifier les calculs.

$$(\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p) = -\overrightarrow{grad}(E_p + cte) = -\overrightarrow{grad}(E_p) - \overrightarrow{grad}(cte) = -\overrightarrow{grad}(E_p))$$

- $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \overrightarrow{rot}\left(-\overrightarrow{grad}(E_p)\right) = -\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(E_p)\right) = \vec{0}$, ainsi pour montrer qu'une force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle, on montre que $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

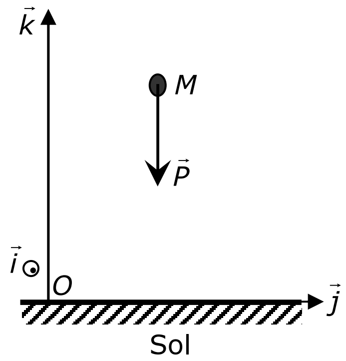
- $\vec{F}$ est une force conservative s'il existe une fonction E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$ ou bien si $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

IV.1.3. *Energie potentielle d'un point M en chute libre*

Chute libre : est un mouvement sous le seul effet de la pesanteur. Un objet en chute libre est donc soumis à une force unique, son propre poids. Les autres forces agissant sont alors soit inexistantes, soit négligées. Parmi les forces fréquemment négligées, on compte la résistance de l'air du milieu.

Le point M soumis uniquement à propre poids $\vec{P}$, donc l'énergie potentielle de M dans le référentiel $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est celle dérivée par son poids ($\vec{P}$ est toujours une force conservative).

On calcule l'énergie potentielle de $\vec{P}$ dans $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:



1ère méthode :

$dE_p(M/\Re) = -dW(\vec{F}/\Re) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{k}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = mgdz$

$\rightarrow E_p(M/\Re) = mgz + cte = E_p(z)$

Si $E_p(z=0) = 0 \rightarrow cte = 0 \Rightarrow E_p(M/\Re) = mgz$

2ème méthode :

$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}(E_p) \rightarrow -mg\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial z} = mg\,(1),\ \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0\,(2),\ \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0\,(3)$

(1) $\rightarrow E_p = mgz + cte(x,y)$

(2) $\rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial cte(x,y)}{\partial x} = 0 \rightarrow cte(x,y) = cte(y) \rightarrow E_p = mgz + cte(y)$

(3) $\rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial cte(y)}{\partial y} = 0 \rightarrow cte(y) = cte$

$$\Rightarrow E_p = mgz + cte$$

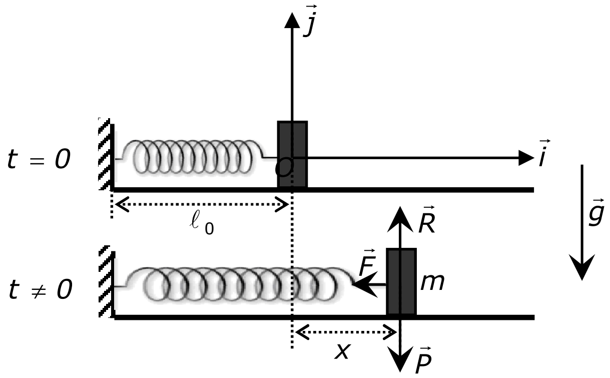
IV.1.4. *Energie potentielle d'une charge placée dans un champ électrostatique*

Soit une charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$, donc q subit à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$.

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ où V est le potentiel électrostatique, on aura : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(qV)$, donc $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p telle que $E_p = qV + cte$.

IV.1.5. *Energie potentielle dérivée par la force de rappel d'un ressort*

Considérons un ressort au repos (non tendu) disposé horizontalement suivant l'axe (Ox). Soit M une masse accrochée à son extrémité libre (l'autre extrémité est fixe). Ecartons la masse M de sa position d'équilibre d'une distance x. Donc le ressort va exercer sur l'opérateur une force de rappel :



$$\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{i} = -kx\vec{i}$$

$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}$ est une force conservative.

$$dE_p = -dW(\vec{F}) = -\vec{F}\overrightarrow{dOM} = kxdx$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

En général, on prend cette constante égale à zéro de façon à rendre $E_p = 0$ pour $x = 0$, ce qui donne :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

<u>Remarques</u> :

- En général, la résultante des forces $\vec{F}$, appliquées sur un point matériel M en mouvement dans un référentiel $\mathfrak{R}$, peut être décomposée comme suit :

$$\vec{F} = \vec{F}_{con} + \vec{F}_{ncon}$$

avec $\vec{F}_{con}$ est la résultante des forces conservatives et $\vec{F}_{ncon}$ est celle des forces non conservatives.

- Si $\vec{F}_{con} = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{c2} + ... + \vec{F}_{cn}$, alors l'énergie potentielle de M est :

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} + ... + E_{p_n}$$

où E_{p_i} est l'énergie potentielle dérivée par la force conservative $\vec{F}_{ci}$.

- La force de frottement est une force non conservative.

- Si $\vec{F}$ est conservative, alors $\dfrac{dE_p(M/\mathfrak{R})}{dt} = -\dfrac{dW(\vec{F}/\mathfrak{R})}{dt} = -P(\vec{F}/\mathfrak{R}) = -\vec{F}\vec{V}(M/\mathfrak{R})$

IV.2. Energie mécanique

L'énergie mécanique est une quantité utilisée en mécanique classique pour désigner l'énergie d'un système emmagasinée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle mécanique. C'est une quantité conservée lorsque aucune force extérieure ou force non conservative (le frottement ou encore un choc) n'intervient dans le système et s'avère, pour cela, pratique à utiliser.

Donc, l'énergie mécanique d'un point matériel dans un référentiel $\mathfrak{R}$, $E_m(M/\mathfrak{R})$, est égale à la somme des énergies cinétique, $E_c(M/\mathfrak{R})$, et potentielle, $E_p(M/\mathfrak{R})$, par rapport au même référentiel $\mathfrak{R}$:

$$E_m(M/\mathfrak{R}) = E_c(M/\mathfrak{R}) + E_p(M/\mathfrak{R})$$

L'énergie mécanique dépend du référentiel choisi.

IV.3. Conservation de l'énergie mécanique

Soit $\vec{F}$ la résultante des forces appliquées à un point matériel M dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$.

On suppose que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle (c-à-d toutes les forces exercées sur M sont conservatives).

D'après le théorème de l'énergie cinétique dans $\mathfrak{R}$ galiléen, on a :

$$dW(\vec{F}/\mathfrak{R}) = dE_c(M/\mathfrak{R}) = -dE_p(M/\mathfrak{R}) \rightarrow dE_c(M/\mathfrak{R}) + dE_p(M/\mathfrak{R}) = 0 \rightarrow d[E_c(M/\mathfrak{R}) + E_p(M/\mathfrak{R})] = 0$$

$$\Rightarrow dE_m(M/\mathfrak{R}) = 0$$

$$\Rightarrow E_m(M/\mathfrak{R}) = cte$$

(Intégrale première de l'énergie ou bien intégrale première des équations de mouvement)

Ainsi, dans le cas où toutes les forces, appliquées sur un point matériel M dans un référentiel galiléen $\Re$, dérivant d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique se conserve dans $\Re$ (reste constante au cours du mouvement).

Remarques :

- Si le point M est soumis en outre à des forces ne dérivant pas d'un potentiel, l'énergie mécanique ne se conserve pas (il y a une dissipation de l'énergie).
- S'il y a conservation de l'énergie mécanique au cours du mouvement, l'énergie mécanique peut se transformer en énergie cinétique et inversement. Cependant, la somme des deux énergies potentielle et cinétique reste constante au cours du mouvement.
- Dans un référentiel non galiléen $\Re_1$, si le travail des forces réelles non conservatives est nul et la force d'inertie d'entraînement est conservative, alors il y a conservation de l'énergie mécanique de M dans $\Re_1$:

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_p(M/\Re_1) = cte$$

$E_p(M/\Re_1)$ contient l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement.

Exemple :

Considérons un point matériel M en mouvement dans un référentiel $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ passant par la position $M_0(x_0,y_0,z_0)$ avec une vitesse v_0 à un instant initial t_0 et soumis uniquement à des forces conservatives

Si (x,y,z) et $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ sont respectivement les cordonnées de la position et de la vitesse, alors on peut écrire :

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+E_p(x,y,z)=\frac{1}{2}v_0^2+E_p(x_0,y_0,z_0)$$

IV.4. Théorème de l'énergie mécanique

Cas d'un référentiel galiléen :

Soit $\vec{F}$ la résultante des forces extérieures appliquées à un point matériel M dans un référentiel galiléen $\Re$.

Le théorème de l'énergie cinétique dans $\Re$ permet d'écrire :

$$dE_c(M/\Re) = dW(\vec{F}/\Re) = dW(\vec{F}_{con}/\Re) + dW(\vec{F}_{ncon}/\Re) = -dE_p(M/\Re) + dW(\vec{F}_{ncon}/\Re)$$

$$\Rightarrow dE_c(M/\Re) + dE_p(M/\Re) = dW(\vec{F}_{ncon}/\Re)$$

$$\Rightarrow dE_m(M/\Re) = dW(\vec{F}_{ncon}/\Re)$$

En intégrant cette équation entre deux positions A et B, on obtient :

$$E_{m_B}(M/\Re) - E_{m_A}(M/\Re) = \underset{A\to B}{W}(\vec{F}_{ncon}/\Re)$$

D'où l'énoncé du théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel galiléen :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique entre deux positions quelconques A et B est égale au travail de toutes les forces non conservatives appliquées sur M entre A et B.

Cas d'un référentiel non galiléen :

Dans un référentiel non galiléen $\Re_1$, il suffit de tenir compte de la force d'inertie d'entraînement. Alors le théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen s'écrit : $dE_m(M/\Re_1) = dW(\vec{F}_{ncon}/\Re_1) + dW(\vec{F}_e/\Re_1)$ si $\vec{F}_e$ est non conservative

Si $\vec{F}_e$ est conservative, ce théorème s'écrit : $dE_m(M/\Re_1) = dW(\vec{F}_{ncon}/\Re_1)$, en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ dans le référentiel $\Re_1$.

En intégrant entre deux positions A et B, on obtient :

$$E_{m_B}(M/\Re_1) - E_{m_A}(M/\Re_1) = \underset{A\to B}{W}(\vec{F}_{ncon}/\Re_1) + \underset{A\to B}{W}(\vec{F}_e/\Re_1) \text{ si } \vec{F}_e \text{ est non conservative}$$

$$E_{m_B}(M/\Re_1) - E_{m_A}(M/\Re_1) = \underset{A\to B}{W}(\vec{F}_{ncon}/\Re_1) \text{ si } \vec{F}_e \text{ est conservative dans le } \Re_1.$$

Remarque :

- $\frac{dE_m(M/\Re)}{dt} = \frac{dW(\vec{F}_{ncon}/\Re)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\Re) = \vec{F}_{ncon}\vec{V}(M/\Re)$ (1)
- $\frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{F}_{ncon}/\Re_1)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\Re_1) = \vec{F}_{ncon}\vec{V}(M/\Re_1)$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ Equations différentielles du mouvement de M.

V. Stabilité et conditions de stabilité d'un équilibre

V.1. Equilibre

Une particule M est en équilibre en un point M_0 dans un référentiel galiléen $\Re$, si abandonnée en ce point sans vitesse initiale, elle y demeure au repos. Dans ce cas, il suffit que la résultante des forces réelles, $\vec{F}$, appliquées sur M placé en M_0 soit nulle :

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{0}$$

Dans un référentiel $\Re_1$, la particule M est soumise aux forces d'inertie en plus des forces réelles. Pour qu'elle soit au repos dans $\Re_1$ en une position M_0, il faut que :

$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = \vec{0}$$

Or au point M_0 la vitesse relative $\vec{V}(M/\Re_1) = \vec{0}$ est nulle, d'où la force d'inertie de Coriolis est nulle aussi. Donc si le point M est placé en M_0, il est en équilibre relatif si :

$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re_1) = \vec{0}$$

V.2. Stabilité d'un équilibre

Soit M_0 une position d'équilibre d'un point matériel M dans un référentiel $\Re$. Ecartons le point M de sa position d'équilibre M_0 :

- Si la résultante des forces qui apparaît tend à ramener le point M en M_0, alors l'équilibre est dit stable.
- Si la résultante des forces qui apparaît tend à éloigner le point M de M_0, alors l'équilibre est dit instable.
- Si aucune force n'apparaît, alors l'équilibre est dit indifférent.

V.3. Relations exprimant la stabilité d'un équilibre à partir de la force appliquée

Soit M un point matériel en mouvement dans un référentiel $\Re$.

On suppose que M est entièrement connue par la connaissance d'un seul paramètre q. Ce paramètre est distance si le mouvement est rectiligne ou un angle s'il est circulaire.

Soit $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire (c) en M et soit $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur M.

On désigne par $F_\tau(q)$, la composante tangentielle de $\vec{F}$ ($F_\tau(q) = \vec{F}\vec{\tau}$) c'est-à-dire la composante qui travaille. Alors si $M_0(q_0)$ est une position d'équilibre de M dans $\Re$, on aura :

$$F_\tau(q_0) = 0 \text{ en } M_0$$

Ecartons le point M de M_0 vers un point M_1 d'une quantité dq :

$$\overrightarrow{M_0M_1} = dq\,\vec{\tau}\ ,\ dq > 0$$

En M_1, apparaît une résultante des forces $\vec{F}_1(q_0 + dq)$ dont la composante tangentielle est $F_\tau(q_0 + dq) = \vec{F}_1(q_0 + dq)\vec{\tau}$. Si $F_\tau(q_0 + dq) < 0$, la force $\vec{F}_1(q_0 + dq)$ tend à ramener M en M_0, ainsi M_0 est une position d'équilibre stable. Si $F_\tau(q_0 + dq) > 0$, la force $\vec{F}_1(q_0 + dq)$ tend à éloigner M de M_0 et donc M_0 est une position d'équilibre instable. Si $F_\tau(q_0 + dq) = 0$, M demeure en M_1 et M_0 est une position d'équilibre indifférent.

Le développement aux limites d'ordre 1 de la fonction $F_\tau(q)$ au voisinage de q_0, donne:

$$F_\tau(q_0 + dq) = F_\tau(q_0) + \left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} dq$$

Or $F_\tau(q_0) = 0$. Il vient donc :

$$F_\tau(q_0 + dq) = \left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} dq \ (*)$$

D'après l'équation (*), on aura :

- Equilibre stable : $F_\tau(q_0 + dq) < 0$, $dq > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} < 0$

- Equilibre instable : $F_\tau(q_0 + dq) > 0$, $dq > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} > 0$

- Equilibre indifférent : $F_\tau(q_0 + dq) = 0$, $dq > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} = 0$

V.4. Relations exprimant la stabilité d'un équilibre à partir de l'énergie potentielle

On suppose que la résultante des forces $\vec{F}$, dérive d'une énergie potentielle E_p, c'est-à-dire $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$.

La composante de $\vec{F}$ qui travaille est $F_\tau(q) = \vec{F}\vec{\tau} = -\overrightarrow{grad}E_p\vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/\Re)}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\frac{1}{\frac{dq}{dt}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dq} \Rightarrow F_\tau(q) = -\overrightarrow{grad}E_p\frac{d\overrightarrow{OM}}{dq}$$

$$\overrightarrow{grad}E_p d\overrightarrow{OM} = dE_P \Rightarrow F_\tau(q) = -\frac{dE_p}{dq}$$

Alors si $M_0(q_0)$ est une position d'équilibre de M dans $\Re$, on aura :

$$F_\tau(q_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dE_p}{dq}\right)_{q=q_0} = 0$$

Cette relation exprime que l'énergie potentielle est extrémale (maximale ou minimale) en M_0.

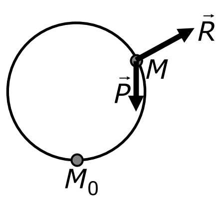
La condition de stabilité peut, donc s'exprimer de la façon suivante :

- Equilibre stable : $\left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} < 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q=q_0} > 0$ (E_P est minimale en $M_0(q_0)$)

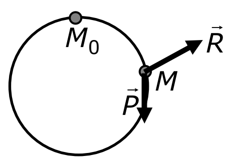
- Equilibre instable : $\left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q=q_0} < 0$ (E_P est maximale en $M_0(q_0)$)

- Equilibre indifférent : $\left.\frac{\partial F_\tau}{\partial q}\right)_{q_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q=q_0} = 0$

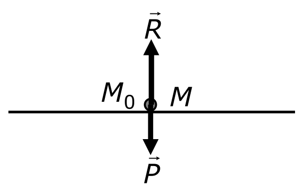
<u>Exemple</u> :



M_0 position d'équilibre stable



Equilibre instable



Equilibre indifférent

I. Oscillateurs Harmoniques

Oscillateur harmonique non amorti

On appelle oscillateur harmonique non amorti, tout système physique qui obéit à l'équation différentielle suivante : $\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ (*)

ω_0 : pulsation propre

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$: période propre

$N_0 = \dfrac{1}{T}$: fréquence propre

$x = x(t)$: grandeur caractéristique du système ; distance, angle ; etc…

$\ddot{x} = \dfrac{d^2x(t)}{dx^2}$: accélération du point M.

L'équation caractéristique de l'équation (*) s'écrit : $r^2 + \omega_0{}^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\omega_0$

La solution de (*) est : $x(t) = Ae^{i(\omega_0 t)} + Be^{-i(\omega_0 t)}$ qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

x_m : amplitude du mouvement

φ : phase à l'origine

x_m et φ sont des constantes calculées à partir des conditions initiales.

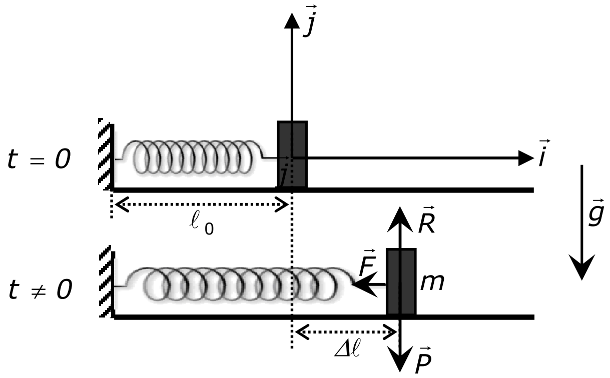
$x = 0$: position d'équilibre stable autour de laquelle le système oscille.

Exemple d'un oscillateur harmonique non amorti

-Ressort horizontal :

Par application des théorèmes généraux de la dynamique on obtient, pour le cas d'un mouvement sans frottement, l'équation différentielle suivante vérifiée par la variable x :

$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, k est la raideur du ressort.



-Pendule simple

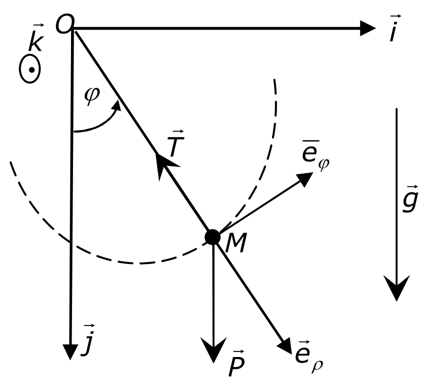
Si on néglige les frottements dues à l'air, on trouve l'équation différentielle suivante, déduite de l'application des théorèmes généraux de la dynamique :

$$\ddot{\varphi} + \omega_0{}^2 \sin(\varphi) = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

ℓ est la longueur du fil inextensible.

Si l'angle φ est faible , cette équation s'écrit :

$$\ddot{\varphi} + \omega_0{}^2 \varphi = 0$$



Oscillateur harmonique amorti (Oscillateur libre amorti)

Un oscillateur harmonique est dit amorti s'il est soumis à l'action d'une force de frottement agissant en sens contraire de son mouvement. C'est un oscillateur dont l'équation du mouvement est de type :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \; (**)$$

L'équation caractéristique de (**) s'écrit :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0{}^2 = 0 \text{ et } \Delta' = \lambda^2 - \omega_0{}^2$$

<u>cas d'un amortissement important (régime sur amorti)</u>

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0{}^2 > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0$$

La solution $x(t)$ a la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(Ae^{-\sqrt{\Delta'}t} + Be^{\sqrt{\Delta'}t}\right)$$

Après un certain temps, on remarque que :

- Le système revient à sa position d'équilibre sans osciller. Le mouvement est dit apériodique (mouvement non périodique). On dit aussi régime apériodique.
- Plus λ est grand (frottement important), plus le système mettra du temps à revenir à sa position d'équilibre.
- Quand le système est sur-amorti, toute oscillation a disparu. Ce système peut ne pas être utile pour étudier les mouvements des sols car il n'est pas possible que le sismomètre enregistre correctement ces mouvements.

<u>cas d'un amortissement critique (régime critique)</u>

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0{}^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0$$

La solution $X(t)$ a la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A + Bt)$$

C'est un mouvement apériodique critique limitant le mouvement pseudo périodique et le mouvement apériodique. Il est plus rapide que le mouvement apériodique. Le système revient sans osciller à position d'équilibre sans la quitter.

<u>cas d'un amortissement faible (régime sous amorti)</u>

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0{}^2 < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0$$

L'équation caractéristique a donc deux racines complexes. La solution $x(t)$ a la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t}\right) \text{ avec } \omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \lambda^2}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

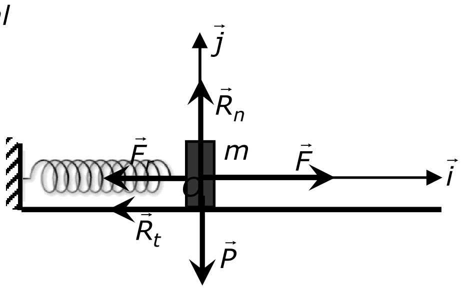
L'allure de la solution $x(t)$ est bien une sinusoïdale en enveloppée par deux courbes exponentielles d'équations $x(t) = \pm Ae^{-\lambda t}$. Il s'agit d'un mouvement amorti de pseudo période T (périodicité dans le temps ave diminution de l'amplitude). On l'appelle aussi mouvement sinusoïdale exponentiellement amorti (sous amortissement). La pseudo période de l'oscillateur reste toujours supérieure à la période propre T_0. de plus, la solution $x(t)$ tend à annuler après un certain temps.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} = T_0\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

<u>Oscillateur forcé</u>

Dans le cas d'un oscillateur libre amorti, le système une fois écarté de sa position d'équilibre stable y revient sans effectuer d'oscillations dans le cas où ($\lambda > \omega_0$ ou $\lambda = \omega_0$). Après un certain nombre d'oscillations, le système revient à sa position d'équilibre lorsque ($\lambda < \omega_0$). Pour entretenir ces oscillations avec une amplitude constante, il faut imposer une force excitatrice à cet oscillateur. Cette force fournit à l'oscillateur autant d'énergie qu'il en perd (via la force de viscosité ou de frottement) au cours de chaque période.

Exemple : *Ressort horizontal*



Bilan des forces :

- $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\Omega t)\vec{i}$: Force excitatrice (F_0 et Ω désignent respectivement l'amplitude et la pulsation des oscillations forcées.
- $\vec{F}_r(t) = -kx(t)\vec{i}$: Force de rappel du ressort
- $\vec{P} = -mg\vec{j}$: Poids de la masse m
- $\vec{R}$: Réaction du support : $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$, $\vec{R}_t = -C\dot{x}(t)\vec{i}$ et $\vec{R}_n = \left\|\vec{R}_n\right\|\vec{j}$

P.F.D dans $\Re$: $m\ddot{x}\vec{i} = -kx\vec{i} - mg\vec{j} - C\dot{x}\vec{i} + \left\|\vec{R}_n\right\|\vec{j} + F_0 \cos(\Omega t)\vec{i} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - C\dot{x} + F_0 \cos(\Omega t)$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx + C\dot{x} = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0 \cos(\Omega t) \text{ avec } \lambda = \frac{C}{2m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } x_0 = \frac{F_0}{k}$$

La solution approximative de cette équation s'écrit : $x(t) \approx A\cos(\Omega t + \phi)$ où A et ϕ sont des constantes à déterminer.

Détermination des constantes A et ϕ :

$x(t) \approx A\cos(\Omega t + \phi) \Rightarrow \dot{x} \approx -A\Omega \sin(\Omega t + \phi)$, $\ddot{x} \approx -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)$

$\Rightarrow -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi) - 2\lambda A\Omega \sin(\Omega t + \phi) + \omega_0^2 A\cos(\Omega t + \phi) = \omega_0^2 x_0 \cos(\Omega t)$

A et ϕ sont indépendante du temps, on peut les déterminer en considérant :

- $\Omega t + \phi = 0 \Rightarrow \Omega t = -\phi \Rightarrow -A\Omega^2 + \omega_0^2 A = \omega_0^2 x_0 \cos(\phi)$
- $\Omega t + \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -2\lambda A\Omega = \omega_0^2 x_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \omega_0^2 x_0 \sin(\phi)$

$$\Rightarrow \cos(\phi) = \frac{-A\Omega^2 + \omega_0^2 A}{\omega_0^2 x_0} \text{ et } \sin(\phi) = \frac{-2\lambda A\Omega}{\omega_0^2 x_0} \Rightarrow \left(\frac{-A\Omega^2 + \omega_0^2 A}{\omega_0^2 x_0}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda A\Omega}{\omega_0^2 x_0}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{\omega_0^2 x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \text{ et } \tan(\phi) = \frac{\frac{-2\lambda A\Omega}{\omega_0^2 x_0}}{\frac{-A\Omega^2 + \omega_0^2 A}{\omega_0^2 x_0}} = \frac{2\lambda A\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

On pose $f(\Omega) = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2 \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\omega_0^2 x_0}{\sqrt{f(\Omega)}} \Rightarrow$ si $\Omega \to 0 \Rightarrow A \to x_0$, si $\Omega \to \infty \Rightarrow A \to 0$

La fonction $A(\Omega)$ est extrémale si $f(\Omega)$ est extrémale.

$$\frac{df(\Omega)}{d\Omega} = -4\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 8\lambda^2\Omega = 0 \Rightarrow \Omega = 0 \text{ ou } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - 2\lambda_f^2} = \Omega_f \text{ avec } \lambda_f = \frac{\lambda}{\omega_0} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

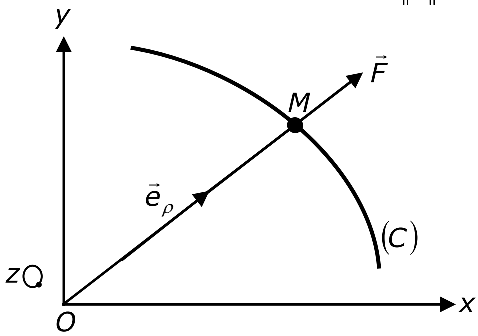
$$\Rightarrow \text{si } \Omega = 0 \Rightarrow A = x_0, \text{ si } \Omega = \Omega_f \Rightarrow A = \frac{\omega_0^2 x_0}{\sqrt{4\lambda_f^2\omega_0^4\left(1 - \lambda_f^2\right)}}$$

$\Rightarrow$ L'amplitude maximale est : $A_{max} = \dfrac{x_0}{2\lambda_f\sqrt{\left(1 - \lambda_f^2\right)}}$

Si $A = A_{max}$, on dit qu'il y a une résonance d'amplitude entre l'oscillateur et la force excitatrice.

II. Mouvements à Forces Centrales

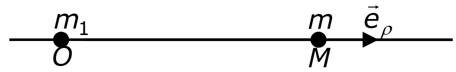
On dit que M est soumis à une force centrale $\vec{F}$ lorsqu'il existe un point O fixe dans $(\Re)$ galiléen tel que, à chaque instant, $\vec{F} \,//\, \overrightarrow{OM}$ et $\|\vec{F}\|$ ne dépend que de $\rho = OM$.



$$\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}, \quad \vec{F} = F(\rho, t)\vec{e}_\rho$$

Exemple de forces centrales

Interaction gravitationnelle



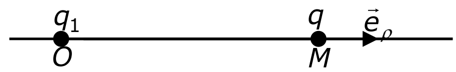
Loi de Newton : $\vec{F}_{O\to M} = -G\dfrac{m_1 m}{OM^2}\vec{e}_\rho$

G : constante de gravitation ($G = 6{,}67.10^{-11} kg^{-1}m^3s^{-2}$)

Si O est fixe dans un référentiel galiléen : $F(M) = -G\dfrac{m_1 m}{OM^2} = \dfrac{-Gm_1 m}{\rho^2}$

La force gravitationnelle est une force centrale (exemple : soleil – planète, planète – satellite)

Interaction coulombienne



$\rho = OM$

Loi de Coulomb : $\vec{F}_{O\to M} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q}{r^2}\vec{e}_\rho$ (dans le vide) où ε_0 est la permittivité électrique du vide ($\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 N.m^2.C^{-2} = 9.10^9 kg.m^3A^2s^{-4}$).

Cette force est une force centrale si O est fixe dans $(\Re)$ galiléen (exemple : proton – électron)

Interaction newtonienne

C'est une force s'exprimant sous la forme $\vec{F}_{O\to M} = \dfrac{-k}{\rho^2}\vec{e}_\rho$ ($\rho = OM$). Elle est attractive si $k > 0$, et répulsive si $k < 0$. L'interaction newtonienne est un exemple de force centrale

Lorsque un point matériel est soumis à une force centrale :

- le moment cinétique par rapport au point O se conserve au cours du temps.

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_O(M/\Re) = \overrightarrow{cte}$$

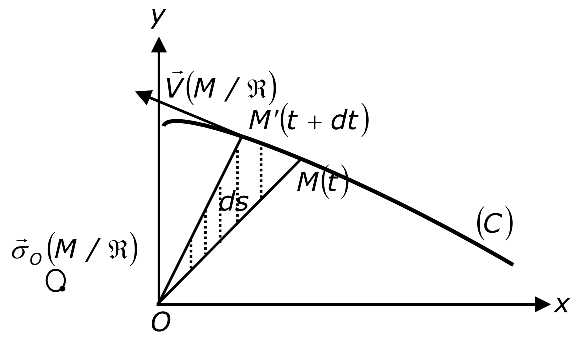
- la trajectoire est plane et appartenant au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M/\Re)$.

Lois des aires

Considérons une particule matérielle M soumise à une force centrale $\vec{F}$ de centre le point O. Donc le mouvement de M est plan supposé le plan (xoy).

Soient M et M' deux position voisines de la particule, sur sa trajectoire, aux instants t et $t + dt$. Par définition le vecteur vitesse de la particule est : $\vec{V}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{dt/\Re}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{V}(M/\Re)dt$$



Comme M et M' sont très voisines, on peut confondre l'arc MM' et le segment MM'. Soit ds l'aire du triangle OMM' : $ds = A(OMM') = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\right\|dt$

$\sigma_O = \left\|\vec{\sigma}_O(M/\Re)\right\| = \left\|\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re)\right\| \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{\sigma_O}{2m} = cte$: la vitesse aréolaire (Loi de Kepler ou loi des aires)

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{\sigma}_O(M/\Re) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k} \Rightarrow \sigma_O = m\rho^2\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = \frac{\sigma_O}{m} = 2A = C \text{ : constante des aires}$$

Formules de Binet

1ère loi de Binet

Le vecteur vitesse dans le référentiel $\Re$ en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{V}(M/\Re) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

On pose $u = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{du}\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}}{u^2}\frac{du}{d\varphi} = -\rho^2\dot{\varphi}\frac{du}{d\varphi}$

$C = \rho^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\rho} = -C\frac{du}{d\varphi} \Rightarrow \vec{V}(M/\Re) = -C\frac{du}{d\varphi}\vec{e}_\rho + Cu\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^2 = C^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] \text{ : 1}^{\text{ère}} \text{ formule de Binet}$$

2ème loi de Binet

$\vec{\gamma}(M/\Re) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$

$2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{d\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d(C)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho$

$\ddot{\rho} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{d\varphi}\right) = -\frac{d}{d\varphi}\left(C\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}$, $C = \rho^2\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{C}{\rho^2} = \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = Cu^2$

$\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{\rho^4\dot{\varphi}^2}{\rho^3} = C^2u^3$

$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \left(-C^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} - C^2u^3\right)\vec{e}_\rho$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{\gamma}(M/\Re) = -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)\vec{e}_\rho \text{ : } \textit{2}^{\textit{ème}} \textit{ formule de Binet}$$

La 2ème loi de Binet permet de déterminer $\rho = \rho(\varphi)$, si on connaît la force $\vec{F}$ et les conditions initiales. Elle permet aussi de déterminer l'expression de $\vec{F}$ si $\rho = \rho(\varphi)$ est connue.

Equation de la trajectoire

Soit un point matériel M de masse m en mouvement et soumis à l'action d'une force centrale $\vec{F} = -\frac{k}{\rho^2}\vec{e}_\rho$ de centre le point O avec k est un scalaire positif.

D'après la 2ème loi de Binet permet on aura :

$$-\frac{k}{\rho^2} = -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) \Rightarrow -\frac{k}{\rho^2} = -m\frac{C^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\right)$$

La solution de cette équation sans second membre est : $\frac{1}{\rho} = a\cos(\varphi - \phi)$ où a et ϕ sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

Une solution particulière d'une telle équation est : $\frac{1}{\rho} = \frac{k}{mC^2}$

Donc, la solution finale est : $\frac{1}{\rho} = a\cos(\varphi - \phi) + \frac{k}{mC^2}$

L'axe polaire peut être toujours choisit de façon à ce que $\phi = 0$, donc la solution de l'équation du mouvement devient : $\frac{1}{\rho} = a\cos(\varphi) + \frac{k}{mC^2}$ qui peut être mise sous la forme suivante : $\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi)}$ où $p = \frac{mC^2}{k}$ et $e = ap$

Cette dernière équation représente l'équation d'une conique dont le foyer coïncide avec l'origine O. alors p et e représentent respectivement le paramètre et l'excentricité de la conique.

Si on prend l'axe (Ox) comme axe de la conique on obtient $x = \rho\cos(\varphi)$, $y = \rho\sin(\varphi)$

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi)} \Rightarrow p = \rho + e\rho\cos(\varphi) = \rho + ex \Rightarrow \rho = p - ex$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow p^2 - 2pex + e^2x^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2pex - p^2 = 0$$

La nature de la trajectoire dépend de la valeur de e :

- Si $e = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 \Rightarrow$ la trajectoire est un cercle.
- Si $e = 1 \Rightarrow y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow$ la trajectoire est une parabole

Si $e \neq 1 \Rightarrow \left(x + \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}$

On pose $X = x + \frac{ep}{1 - e^2}$ et $Y = y \Rightarrow X^2 + \frac{Y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1 - e^2}} = 1$

Si $0 < e < 1 \Rightarrow \frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$ avec $A^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}$ et $B^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} \Rightarrow$ la trajectoire est une ellipse.

Si $e > 1 \Rightarrow \frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1$ avec $A^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}$ et $B^2 = \frac{p^2}{e^2 - 1} \Rightarrow$ la trajectoire est une hyperbole.

Energie mécanique

L'énergie mécanique du point matériel M s'écrit :

$$E_m(M/\Re) = E_C(M/\Re) + E_P(M/\Re)$$

$$\vec{F} = -\frac{k}{\rho^2}\vec{e}_\rho \Rightarrow dW(\vec{F}/\Re) = -\vec{F}d\overrightarrow{OM} = \frac{k}{\rho^2}\vec{e}_\rho\left(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi\right) = \frac{k}{\rho^2}d\rho = -d\left(\frac{k}{\rho}\right)$$

$$\Rightarrow dW(\vec{F}/\Re) = dE_P \text{ avec } E_P = -\frac{k}{\rho} + cte$$

$\Rightarrow \vec{F}$ est une force conservative dérivant d'une énergie potentielles $E_P(M/\Re) = -\frac{k}{\rho} + cte$

On choisit la référence de l'énergie potentielle à l'infini c'est-à-dire $E_P(M/\Re) = 0$ si $\rho \to \infty \Rightarrow cte = 0 \Rightarrow E_P(M/\Re) = -\frac{k}{\rho}$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re) = -ku = -k\frac{1 + e\cos(\varphi)}{p}$$

L'énergie cinétique de M est :

$$E_C(M/\Re) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\Re) = \frac{1}{2}mC^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi)} \Rightarrow u = \frac{1}{\rho} = \frac{1 + e\cos(\varphi)}{p} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{e\sin(\varphi)}{p}$$

$$\Rightarrow E_C(M/\Re) = \frac{1}{2}mC^2\left[\frac{e^2\sin^2(\varphi)}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^2\cos^2(\varphi) + \frac{1}{p^2}2e\cos(\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow E_C(M/\Re) = \frac{1}{2}mC^2\left[\frac{e^2}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}2e\cos(\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow E_C(M/\Re) = \frac{1}{2p^2}mC^2\left[e^2 + 1 + 2e\cos(\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow E_C(M/\Re) = \frac{k}{2p}\left[e^2 + 1 + 2e\cos(\varphi)\right]$$

L'énergie mécanique est :

$$E_m(M/\Re) = \frac{k}{2p}\left[e^2 + 1 + 2e\cos(\varphi)\right] - k\frac{1 + e\cos(\varphi)}{p}$$

$$\Rightarrow E_m(M/\Re) = \frac{k}{2p}\left[e^2 - 1\right]$$

La force $\vec{F}$ est conservative, donc l'énergie mécanique est constante

$$\Rightarrow E_m(t) = E_m(t = 0) = E_0$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{k}{2p}\left[e^2 - 1\right]$$

Si on connaît la valeur de E_0, on peut déterminer celle de e et déduire ainsi la nature de la conique.

La valeur initiale de l'énergie mécanique est : $E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{\rho_0}$, $p = \frac{mC^2}{k} = \frac{\sigma_O^2}{Km}$

* V_0 est le module du vecteur vitesse initial
* ρ_0 est le module du vecteur position initial
* $\sigma_O = \left\|\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re)\right\| = \left\|\overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{V}_0(M/\Re)\right\|$

- Si $e = 0 \Rightarrow E_0 = -\frac{k}{2p} \Rightarrow$ la conique est un cercle.
- Si $e = 1 \Rightarrow E_0 = 0 \Rightarrow$ la conique est une parabole
- Si $0 < e < 1 \Rightarrow -\frac{k}{2p} < E_0 < 0 \Rightarrow$ la conique est une ellipse.
- Si $e > 1 \Rightarrow E_0 > 0 \Rightarrow$ la conique est une hyperbole.