



Travaux dirigés de mécanique du point

Année 2011-2012

Arnaud LE PADELLEC

alepadellec@irap.omp.eu

Magali MOURGUES

magali.mourgues@univ-tlse3.fr

Présentation

Tous les exercices de mécanique du point qui seront abordés en Travaux Dirigés cette année sont regroupés dans ce fascicule.

Ces exercices sont regroupés par thème. Chacun des thèmes est introduit par un personnage historique, dont les travaux ont contribué à l'avancement du thème considéré. Puis, les objectifs du thème sont énoncés.

On trouve ensuite un questionnaire, type QCM, comportant des questions de cours : il est nécessaire de le faire seul, chez soi, et avant de venir en TD. C'est un travail préparatoire, qui permet de s'assurer que les notions de base requises pour la résolution des exercices sont bien comprises. Une correction sera fournie au thème suivant, et l'étudiant pourra alors s'évaluer selon le barème ci-dessous.

Chaque question est notée de 0 à 2 points :

- Pas de réponse : 0 point
- Aucune erreur : 2 points
- 1 erreur : 1 point
- 2 erreurs et plus : 0 point

Le niveau d'acquisition des connaissances est évalué en fonction du nombre de total de points recueillis pour l'ensemble des questions :

Total (par exemple, avec 5 questions, donc un maximum de 10 points)

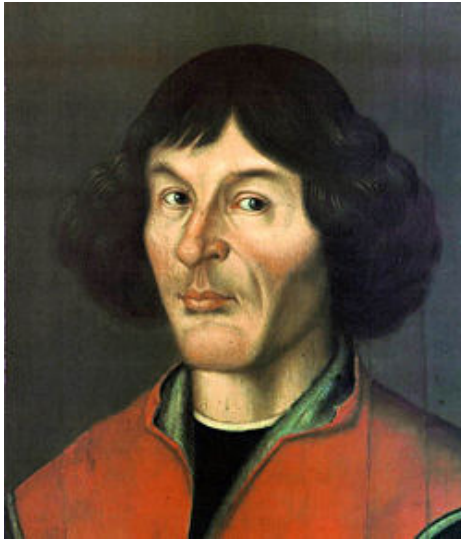
- | | | |
|---------------------------------------|---------------|---|
| • Connaissances acquises | Supérieur à 7 | 😊 |
| • Connaissances en voie d'acquisition | De 4 à 7 | 😐 |
| • Connaissances non acquises | Inférieur à 4 | 😞 |

Il est demandé aux étudiants de préparer la séance de travaux dirigés, en cherchant les différents exercices du thème, en particulier ceux à faire avant le TD. Tous les exercices du thème ne seront pas traités en TD. Bien évidemment, les mêmes exercices seront traités dans tous les groupes.

Tout exercice préparé à l'avance pourra être rendu à l'enseignant, qui le corrigera, et le rendra la semaine suivante. De même, pour les exercices non traités en TD : aucune correction ne sera distribuée. Il est donc très vivement conseillé de faire ces exercices et de les rendre à l'enseignant de TD, à titre d'entraînement.

L'équipe enseignante

Thème 1 : Calcul vectoriel, systèmes de coordonnées et dérivation de vecteurs

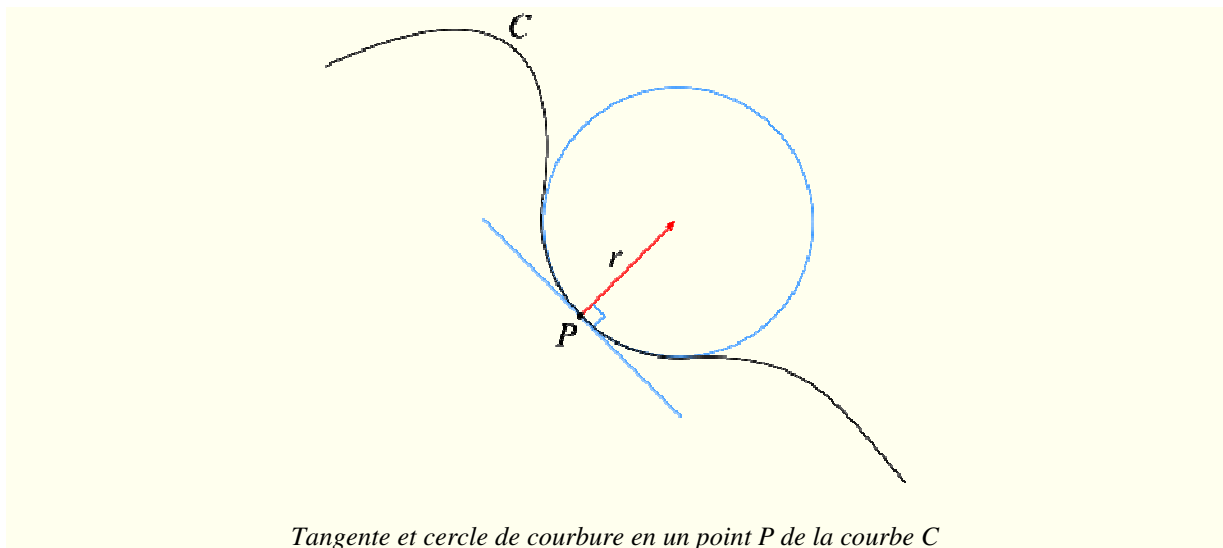


Nicolas Copernic (1473-1543)

Copernic énonce la théorie selon laquelle le Soleil se trouve au centre de l'univers, et la Terre, que l'on croyait auparavant centrale, tourne autour de lui.

Objectifs :

- Différencier une base et un repère.
- Calculer la norme d'un vecteur, les produits scalaire et vectoriel entre deux vecteurs.
- Définir une base orthonormée.
- Calculer les projections d'un vecteur sur les axes d'un repère orthonormé.
- Définir les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques, intrinsèques.
- Calculer les dérivées d'un vecteur de base et d'un vecteur quelconque dans un repère donné.



Tangente et cercle de courbure en un point P de la courbe C

Questionnaire :

1. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$:
 - ☐ Est un vecteur perpendiculaire au plan constitué par les deux vecteurs.
 - ☐ Est un nombre sans dimensions.
 - ☐ Est fonction de $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - ☐ Est fonction de $\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte.

2. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$:
 - ☐ Est un vecteur perpendiculaire au plan constitué par les deux vecteurs.
 - ☐ Est un nombre sans dimensions.
 - ☐ Est fonction de $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - ☐ Est fonction de $\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte.

3. Les vecteurs normés $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ constituent une base $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée directe si :
 - ☐ 2 au moins des trois vecteurs sont perpendiculaires entre eux.
 - ☐ $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$.
 - ☐ En amenant $\vec{e}_1$ sur $\vec{e}_2$, on obtient $\vec{e}_3$, en tournant dans le sens horaire.
 - ☐ En amenant $\vec{e}_1$ sur $\vec{e}_2$, on obtient $\vec{e}_3$, en tournant dans le sens direct.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte.

4. Concernant le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:
 - ☐ Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
 - ☐ Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.
 - ☐ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ est caractéristique du périmètre du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
 - ☐ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ est caractéristique de la surface du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte

5. Concernant le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:
 - ☐ Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
 - ☐ Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.
 - ☐ $\vec{a} \times \vec{b}$ est caractéristique du périmètre du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
 - ☐ $\vec{a} \times \vec{b}$ est caractéristique de la surface du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte

Exercices :

Exercice 1 : Produits de vecteurs (A faire avant le TD)

Soit les trois vecteurs: $\vec{a}(1,2,2)$, $\vec{b}(2,2\sqrt{2},2)$ et $\vec{c}(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

a) **Calculer** $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|, \|\vec{c}\|$, et en déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c$ des directions de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$.

b) En considérant les angles θ_a, θ_b et θ_c compris entre 0 et π , **calculer** :

$$\cos \theta_a = \cos(\vec{e}_b, \vec{e}_c), \cos \theta_b = \cos(\vec{e}_a, \vec{e}_c) \text{ et } \cos \theta_c = \cos(\vec{e}_b, \vec{e}_a).$$

c) **Calculer** les composantes des vecteurs $\vec{u}_a = \vec{e}_b \times \vec{e}_c$, $\vec{u}_b = \vec{e}_c \times \vec{e}_a$ et $\vec{u}_c = \vec{e}_a \times \vec{e}_b$.

d) **En déduire** $\sin \theta_a, \sin \theta_b$ et $\sin \theta_c$. **Vérifier** ces résultats à l'aide de la question b).

e) **Montrer** que $\vec{u}_a, \vec{u}_b$ et $\vec{u}_c$ peuvent constituer une base. Cette base est-elle normée?

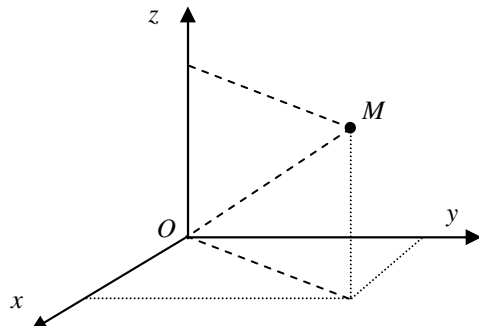
Exercice 2 : Système de coordonnées (A faire avant le TD)

Cet exercice très important est d'avantage une question de cours déguisée qu'un véritable exercice. Il faut donc savoir le faire cours fermé !

O étant l'origine d'un repère cartésien $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la position d'un point M de l'espace est définie par le vecteur position $\vec{r} = \vec{OM}$.

La position de ce point M peut être caractérisée par différents triplets de nombres :

- le triplet cartésien : x, y, z
- le triplet cylindrique : ρ, φ, z



- a) **Positionner** sur un schéma semblable à celui ci-dessus les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$.
- b) **Rajouter** les 6 grandeurs x, y, z, r, ρ et φ . **Préciser** la dimension physique de chacune d'elles ainsi que leur domaine de variation respectif.
- c) **Donner** les composantes du vecteur position $\vec{OM}$ en projection sur $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ d'une part, et en projection sur $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$ d'autre part.
- d) **Exprimer** ρ, φ, r en fonction de x, y et z .
- e) On considère le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$. **Donner** les composantes de ce vecteur dans le repère cartésien à l'aide des variables x, y et z et dans le repère cylindrique à l'aide des variables ρ, φ et z .
- f) **En déduire** à l'aide des variables x, y et z d'une part et des variables ρ, φ et z d'autre part, les expressions du volume élémentaire dV et du travail élémentaire δW pour une force de type $\vec{F} = k\vec{r}$, où k est une constante.

Exercice 3 : Dérivation des vecteurs unitaires

Dans le repère cartésien $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un point P se déplace dans le plan (xOy) . Ses coordonnées polaires sont ρ et φ .

- Calculer** $\left[\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \right]_R$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \right]_R$ en projection dans la base cartésienne B liée à R .
- En déduire** les expressions de ces dérivées vectorielles dans la base cylindrique B_{cyl} .
- φ étant fonction du temps, **calculer** à l'aide de la question précédente les expressions de $\left[\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right]_R$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right]_R$ dans B_{cyl} en fonction de $\frac{d\varphi}{dt}$.
- Démontrer** que de façon générale, la dérivée de tout vecteur unitaire n'a pas de composante sur lui-même.
- Montrer** qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que :

$$\left[\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right]_R = \vec{\Omega} \times \vec{e}_\rho, \quad \left[\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right]_R = \vec{\Omega} \times \vec{e}_\varphi, \quad \left[\frac{d\vec{e}_z}{dt} \right]_R = \vec{\Omega} \times \vec{e}_z$$

En déterminer les composantes. Ce vecteur est le vecteur rotation du repère cylindrique R_{cyl} par rapport à R .

- Pourquoi $\left[\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right]_{R_{cyl}} = \vec{0}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right]_{R_{cyl}} = \vec{0}$?
- Calculer** $\left[\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right]_{R_{cyl}}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right]_{R_{cyl}}$ en projection sur B_{cyl} , puis en projection sur B .

Exercice 4 : Vecteur vitesse

Le point P est mobile par rapport au référentiel cartésien $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (ρ, φ, z) sont fonction du temps.

- Exprimer** $\left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R$, en projection dans B liée à R en fonction de x, y et z .
- A partir de cette expression, **écrire** $\left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_{R_{cyl}}$ dans B_{cyl} en fonction de $\rho, \frac{d\rho}{dt}, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}$ et z . Pour cela on **exprimera** x, y et z en fonction de ρ, φ et z puis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ en fonction de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$.
- Retrouver** ce résultat directement à partir de l'expression de $\vec{OP}$ dans B_{cyl} .
- Calculer** directement $\left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_{R_{cyl}}$ dans B_{cyl} .

Exercice 5 : Dérivation- suite (A faire après le TD)

Soit le repère orthonormé cartésien $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associé à la base B , dans lequel la position d'un point M de l'espace est défini par le vecteur position $\vec{OM}$. On définit alors le repère cylindrique $R_{cyl}(O, B_{cyl})$ associé à la base orthonormée $B_{cyl}(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

- Exprimer** le vecteur position $\vec{OM}$ dans B .
- Exprimer** le vecteur position $\vec{OM}$ dans B_{cyl} .
- Calculer** la vitesse du point M par rapport au référentiel cartésien R : $\left[\frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_R$.

Exprimer le résultat dans B et dans B_{cyl} .

- Calculer** la vitesse du point M par rapport au référentiel cylindrique R_{cyl} : $\left[\frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_{R_{cyl}}$. Exprimer le résultat dans B et dans B_{cyl} .

Résultats : ils sont dans les exercices qui précèdent et dans le cours.

Thème 2 : Cinématique du point

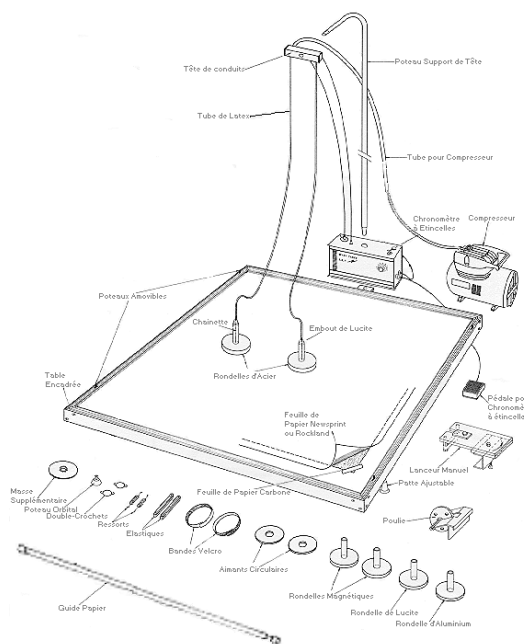


René Descartes (1596-1650)

Descartes définit ainsi le mouvement : "Mais si, au lieu de nous arrêter à ce qui n'a point d'autre fondement que l'usage ordinaire, nous désirons savoir ce que c'est que le mouvement selon la vérité, nous dirons [...] qu'il est le transport d'une partie de la matière, ou d'un corps, du voisinage de ceux qui le touchent immédiatement, et que nous considérons comme au repos, dans le voisinage de quelques autres."

Objectifs :

- Définir et identifier la nature d'un mouvement (uniforme, accéléré, retardé).
- Définir et identifier un mouvement circulaire, en spirale, hélicoïdal.
- Représenter les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires et calculer leurs modules.
- Etablir l'équation cartésienne d'une trajectoire. Représenter et interpréter la trajectoire.
- Connaître la relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire.



La table à coussin d'air permet de définir le vecteur vitesse en un point.

Questionnaire :

1. Un mouvement est uniforme si :

- ☐ Sa vitesse est constante.
- ☐ Son vecteur vitesse est constant.
- ☐ Son vecteur accélération est constant.
- ☐ Son accélération est nulle.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

2. Un mouvement est uniformément décéléré si :

- ☐ La valeur algébrique de l'accélération tangentielle est constante.
- ☐ La valeur algébrique de l'accélération normale est constante.
- ☐ $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$.
- ☐ $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

3. Le trièdre de Frénet est composé des trois vecteurs $\vec{e}_n$, $\vec{e}_t$ et $\vec{e}_b$, tels que

- ☐ $(\vec{e}_n, \vec{e}_t, \vec{e}_b)$ est une base orthonormée directe.
- ☐ $(\vec{e}_b, \vec{e}_n, \vec{e}_t)$ est une base orthonormée directe.
- ☐ $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b)$ est une base orthonormée directe.
- ☐ $(\vec{e}_t, \vec{e}_b, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée directe.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

4. Le vecteur unitaire $\vec{e}_n$ est :

- ☐ Constant.
- ☐ Dirigé vers la concavité.
- ☐ Dirigé vers l'extérieur de la trajectoire.
- ☐ Garde une direction fixe.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

5. Concernant l'accélération d'entraînement :

- ☐ $\vec{a}_e(M, R' / R) = \left[\frac{d\vec{v}_e(M, R' / R)}{dt} \right]_R$
- ☐ $\vec{a}_e(M, R' / R) = \left[\frac{d\vec{v}_e(M, R' / R)}{dt} \right]_{R'}$
- ☐ $\vec{a}_e(M, R' / R) = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_e(M, R' / R)$
- ☐ $\vec{a}_e(M, R' / R) = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}(M, R')$
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

Exercices :

Exercice 1 : Mouvement plan circulaire uniforme (A faire avant le TD)

Dans le repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, un point P a pour coordonnées polaires ρ et φ à l'instant t , tels que : $\rho = A \cos \varphi + B \sin \varphi$ avec $\varphi = \omega t$, où A , B , et ω sont des constantes positives.

a) **Déterminer** les composantes cylindriques du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/R}$ en fonction du temps. **En déduire** la nature du mouvement.

b) Quelles sont les composantes cylindriques du vecteur accélération $\vec{a}_{P/R}$ en fonction du temps ?

c) **Déterminer** l'équation cartésienne de la trajectoire. **Montrer** que celle-ci est un cercle.

e) **Déduire** de l'expression de $\|\vec{a}_{P/R}\|$ le rayon du cercle.

Exercice 2 : Mouvement en spirale

Dans le plan (xOy) d'un repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le mouvement d'un point P est décrit par la variation de ses coordonnées cartésiennes en fonction du temps t :

$$x = be^{-kt} \cos kt ; y = be^{-kt} \sin kt , \text{ où } b \text{ et } k \text{ sont deux constantes positives.}$$

a) 1- **Déterminer** en fonction de t les coordonnées polaires ρ et φ de P .

2- **En déduire** l'équation polaire de la trajectoire de P .

3- **Représenter** la trajectoire.

b) 1- **Déterminer** en fonction de t les composantes polaires du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/R}$.

2- **En déduire** l'angle $\alpha = (\vec{OP}, \vec{v}_{P/R})$.

3- **Indiquer** la nature du mouvement (uniforme, accéléré ou retardé).

c) 1- **Déterminer** en fonction de t les composantes polaires du vecteur accélération $\vec{a}_{P/R}$.

2- **Préciser** la direction de $\vec{a}_{P/R}$ et représenter ce vecteur sur la figure.

d) 1- **Déterminer** en fonction de t les composantes tangentielle et normale de $\vec{a}_{P/R}$.

2- **En déduire** la valeur du rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 3 : (A faire après le TD)

Dans le plan (xOy) d'un repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un point P décrit la parabole d'équation :

$$y = \frac{(x^2 - 1)}{2}. \text{ Son mouvement est à accélération centrale de centre } O.$$

1.
 - a. **Tracer** le graphe de la trajectoire.
 - b. **Calculer** l'aire balayée par le vecteur espace $\vec{OP}$ lorsque l'angle polaire θ de P varie de π à 2π
2. Montrer que l'équation polaire de la trajectoire est: $r = \frac{1}{(1 - \sin \theta)}$
3.
 - a. **Donner** l'expression de la vitesse $\vec{v}$ de P en fonction de C (constante des aires) et de r . On pourra utiliser la première formule de Binet.
 - b. **En déduire** la valeur de la constante des aires C , sachant que pour $\theta = 3\pi/2$, $\vec{v} = 4 \text{ m s}^{-1}$.
 - c. Combien de temps met $\vec{OP}$ pour balayer la surface indiquée de la première question ?
4. **Donner** l'expression de l'accélération $\vec{a}$ de P en fonction de r .

Exercice 4 : Mouvement hélicoïdal (A faire après le TD)

Un point matériel M décrit, par rapport à un repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, une trajectoire définie par les équations paramétriques :

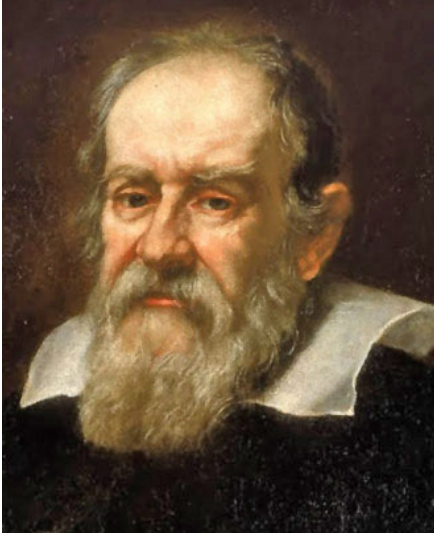
$$x = b \sin \omega t, \quad y = b(1 - \cos \omega t) \quad \text{et} \quad z = \omega t, \quad \text{où } b \text{ et } \omega \text{ constantes positives.}$$

- a) **Donner** les coordonnées polaires ρ et φ de H , projeté orthogonal de M dans (xOy) .
- b) Quels sont la trajectoire et le mouvement, par rapport à R , de H ?
- c) **Donner** les composantes cartésiennes, cylindriques et intrinsèques des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport à R .

Eléments de réponse :

- a) mouvement circulaire uniforme ($v = \omega b$) de centre (O, b)
- b) $\rho = 2b \sin \frac{\omega t}{2}$ et $\varphi = \frac{\omega t}{2}$
- c) 1- $\vec{v}_{M/R} = b\omega \cos \omega t \vec{e}_x + b\omega \sin \omega t \vec{e}_y + b\omega \vec{e}_z$; $\vec{a}_{M/R} = -b\omega^2 \sin \omega t \vec{e}_x + b\omega^2 \cos \omega t \vec{e}_y$
 2- $\vec{v}_{M/R} = b\omega \cos \frac{\omega t}{2} \vec{e}_\rho + b\omega \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_\varphi + b\omega \vec{e}_z$; $\vec{a}_{M/R} = -b\omega^2 \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_\rho + b\omega^2 \cos \frac{\omega t}{2} \vec{e}_\varphi$
 3- $\vec{v}_{M/R} = \sqrt{2}(b\omega) \vec{e}_t$; $\vec{a}_{M/R} = b\omega^2 \vec{e}_n$

Thème 3 : Changement de référentiel



Galileo Galilei dit Galilée (1564 - 1642)

Ardent défenseur du système de Nicolas Copernic (héliocentrisme), il s'est heurté à de vives critiques émanant des partisans du géocentrisme ainsi qu'à celles de l'Église catholique romaine. Il est considéré comme le père de l'observation astronomique et de la physique moderne.

Ses réalisations comprennent le perfectionnement de la lunette astronomique ainsi qu'une amélioration notable au niveau des observations astronomiques comme la possibilité, par exemple, de confirmer les phases de Vénus. Dans le domaine des mathématiques et de la physique, il a surtout contribué à faire avancer les connaissances relatives à la cinématique et la dynamique.

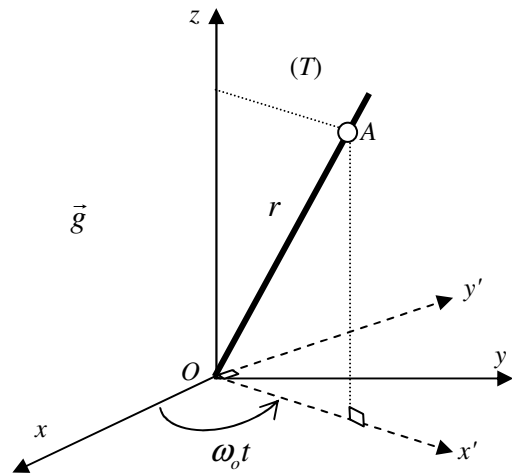
Exercices :

Exercice 1 : Mouvement d'une masselotte sur une tige

Une masselotte A , de masse m , peut coulisser sans frottements, sur une tige (T) . On note r la distance OA entre l'extrémité de la tige et la masselotte A considérée comme ponctuelle.

Cette tige, inclinée de l'angle θ_0 par rapport à l'axe Oz du repère d'observation $R(O,xyz)$, tourne uniformément à la vitesse angulaire ω_0 autour de Oz .

On note $R'(O, x'y'z')$ le repère orthonormé direct lié à la tige, et indiqué sur la figure ci-contre.



- Exprimer** le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction de r et θ_0 , dans la base B' liée à R' . En déduire la vitesse de A dans R' $\overrightarrow{v}_{A/R'}$, que l'on exprimera dans B' .
- Caractériser** le mouvement de R' par rapport à R (vitesse de l'origine, vecteur rotation).
- Déterminer** l'expression de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis, liées à A , dans le mouvement de R' par rapport à R .
- Retrouver**, par application des lois de composition des mouvements, les expressions de la vitesse et de l'accélération de A dans R .

Exercice 2 : Manège du "service à thé"

Sur le plateau $(\mathcal{P})$ d'un manège (plateforme circulaire de centre O et de rayon R), on a installé un disque $(\mathcal{D})$, de centre C et de rayon $r < R$, sur la circonférence duquel est fixé un siège, repéré par le point M .

Le plateau $(\mathcal{P})$ du manège tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour de son axe vertical ascendant Oz , par rapport à son bâti, auquel est associé le référentiel galiléen $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le disque $(\mathcal{D})$ a, par rapport au plateau $(\mathcal{P})$, un mouvement de rotation uniforme, de vitesse ω autour de l'axe de révolution Cz .

On définit alors les référentiels $R_p(O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ lié à $(\mathcal{P})$, et $R_D(C, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ lié à $(\mathcal{D})$, avec $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y) = \Omega t$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \omega t$.

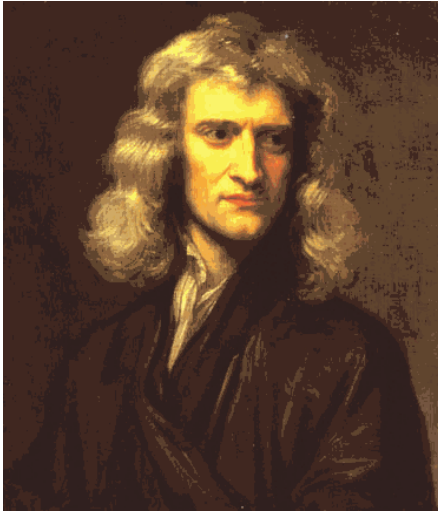
On pose $\overrightarrow{OC} = L \overrightarrow{e_x}$ ($L < R$ constant) et $\overrightarrow{CM} = r \overrightarrow{e_1}$.

a) **Définir** les vecteurs rotation $\vec{\Omega}(R_P / R)$, $\vec{\Omega}(R_D / R_P)$ et $\vec{\Omega}(R_D / R)$.

b) **Calculer** indépendamment les uns des autres, les vitesses $\vec{V}(M / R_P)$, $\vec{V}_e(M, R_P / R)$ et $\vec{V}(M / R)$. **Vérifier** la loi de composition des vitesses.

c) **Calculer** indépendamment les uns des autres, les accélérations $\vec{a}(M / R_P)$, $\vec{a}_e(M, R_P / R)$, $\vec{a}_c(M, R_P / R)$ et $\vec{a}(M / R)$. **Vérifier** la loi de composition des accélérations.

Thème 4 : Dynamique du point



Isaac Newton (1642 - 1727)

En 1687, Newton met en évidence que des forces universelles régissent les mouvements de toute masse dans l'univers. Il énonce la théorie de la gravité dans son ouvrage intitulé "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*". Il donne ainsi naissance à la "mécanique newtonienne" dite aussi "mécanique classique".

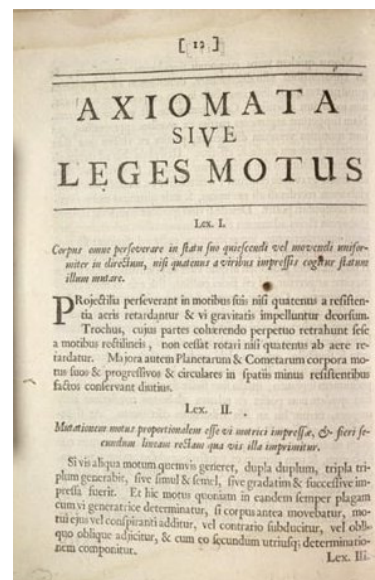
Pré-requis :

- Savoir résoudre les équations différentielles du 1^{er} et 2^{ème} ordre (1^{er} semestre).

Objectifs :

- Différencier repère galiléens et non galiléens.
- Enoncer et appliquer le principe de l'inertie (1^{ère} loi de Newton).
- Identifier et définir les différentes forces s'appliquant sur un objet ou particule (poids, force de rappel, force de frottements visqueux, force électrostatique, force de Lorentz, forces d'inertie).
- Enoncer et appliquer la loi fondamentale de la dynamique (2^{ème} loi de Newton).
- Enoncer et appliquer le théorème du moment cinétique.
- Enoncer et appliquer le principe de l'action et de la réaction (3^{ème} loi de Newton).

Les deux premières lois de Newton en latin dans l'édition originale du *Principia Mathematica* de 1687.



Questionnaire :

1. Un référentiel est galiléen s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport :

- ☐ Au référentiel de Copernic.
- ☐ Au référentiel de Képler.
- ☐ Au référentiel géocentrique.
- ☐ Au référentiel terrestre.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

2. Les forces suivantes sont des forces dites "fondamentales" :

- ☐ La force de gravitation.
- ☐ La force électromagnétique.
- ☐ La force élastique.
- ☐ La force de pesanteur.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

3. Soit deux référentiels $\mathcal{R}$ galiléen et $\mathcal{R}'$ non galiléen. La loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule ponctuelle de masse m , s'énonce :

- ☐ $\sum \vec{F}(M/R) = m\vec{a}(M/R)^2$
- ☐ $\sum \vec{F}(M/R') = m\vec{a}(M/R')$
- ☐ $\sum \vec{F}(M/R) = m\vec{a}(M/R') + m\vec{a}_e(M, R/R') + m\vec{a}_c(M, R/R')$
- ☐ $\sum \vec{F}(M/R') = m\vec{a}(M/R') + m\vec{a}_e(M, R/R') + m\vec{a}_c(M, R/R')$
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

4. Le théorème, en un point fixe A , du moment cinétique s'écrit :

- ☐ $\vec{L}_A(M/R) = m\vec{AM} \times \vec{v}(M/R)$
- ☐ $\vec{M}_A(M/R) = \vec{AM} \times \sum \vec{F}(M/R)$
- ☐ $\left[\frac{d\vec{L}_A}{dt}(M/R) \right]_R = \vec{AM} \times \sum \vec{F}(M/R)$
- ☐ $\left[\frac{d\vec{L}_A}{dt}(M/R) \right]_R = \vec{M}_A(\sum \vec{F}(M/R))$
- ☐ Aucune réponse n'est correcte

5. La troisième loi de Newton :

- ☐ Est valable dans tout référentiel, galiléen ou non.
- ☐ Précise que $F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1}$
- ☐ Stipule que la force de réaction est directement opposée à l'action.
- ☐ S'applique pour toute force, comme par exemple la force de gravitation.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte

Exercices :

Exercice 1 : Mouvement rectiligne (A faire avant le TD)

Un point A , de masse m et repéré par sa coordonnée x , est astreint à se déplacer sur l'axe Ox d'un référentiel galiléen $R(O, xyz)$. Il est soumis, dans la direction (Ox) , à la force

$\vec{F} = -\lambda m \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$, où λ est une constante positive. A l'instant $t=0$, A se trouve en O et

possède le vecteur vitesse $\vec{v}_o = v_o \vec{e}_x$ avec $v_o > 0$.

- Déterminer** l'équation horaire $x(t)$ du mouvement.
- Tracer** le graphe de $x(t)$ et décrire le mouvement.

Réponse : $x(t) = \frac{v_o}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \rightarrow$ existence de $x_{\lim} = \frac{v_o}{\lambda}$.

Exercice 2 : Glissement d'une bille sur un cylindre (A faire avant le TD)

Sur un cylindre fixe, de centre O et de rayon R , une bille M , assimilable à une masse ponctuelle m , est lâchée, sans vitesse initiale, du point A , situé sur la verticale ascendante Oz du référentiel galiléen $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le mouvement de M s'effectue, sans frottement, dans le plan perpendiculaire à l'axe Oy de révolution du cylindre.

On repère la position de M par l'angle $\theta = (\widehat{OA, OM})$.

- Réaliser** le bilan des forces s'exerçant sur M . Quel est le repère d'étude le plus adapté ? Quelle est la base de projection la plus judicieuse ?
- Appliquer** le théorème du moment cinétique en O , et en **déduire** une intégrale première du mouvement.
- Déduire** du principe fondamental de la dynamique l'expression de la réaction exercée par le cylindre sur la bille, en fonction de θ et de sa dérivée par rapport au temps $\dot{\theta}$, puis uniquement en fonction de θ .
- Pour quelle valeur de θ la bille quitte-t-elle son support ?

Exercice 3 : Mouvement sous l'action de la pesanteur

Dans un référentiel terrestre $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen, où Oz est la verticale ascendante et (xOy) le sol, on étudie le mouvement d'un point A , de masse m et de coordonnées (x, y, z) , sous la seule action de son poids. A l'instant $t = 0$, A se trouve en O et possède le vecteur vitesse $\vec{v}_o = (v_o \cos \alpha) \vec{e}_y + (v_o \sin \alpha) \vec{e}_z$ avec $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) **Déterminer** les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Montrer que la trajectoire est plane.

b) On se place dans le cas général où $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

1- **Former** l'équation cartésienne de la trajectoire et identifier celle-ci.

2- **Représenter** le graphe de la trajectoire. Indiquer l'altitude maximale.

3- **Déterminer** la distance y_c qui sépare O du point d'impact C de A sur le sol (y_c est la portée). **Indiquer** pour quelle valeur de α la portée est maximale.

c) Toujours avec α quelconque, le point A est soumis à une force supplémentaire de frottement $\vec{F} = -k \vec{v}_{A/R}$, où k est une constante et $\vec{v}_{A/R}$ le vecteur vitesse de A dans R .

1- i) **Etablir** les équations différentielles auxquelles obéissent les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}_{A/R}$.

ii) **Déterminer** alors ses composantes et montrer qu'il existe une vitesse limite dont on déterminera les caractéristiques.

2- i) **Déterminer** les expressions de $y(t)$ et de $z(t)$.

ii) En admettant que $z(t)$ peut prendre des valeurs négatives, **montrer** que la trajectoire admet une asymptote que l'on déterminera.

iii) A quel instant l'altitude est-elle maximale?

iv) Quelle est alors l'abscisse du sommet de la trajectoire ? Comparer ce résultat avec la valeur obtenue en b)2- en faisant tendre k vers 0.

Exercice 4 : Influence de la force de Coriolis sur une particule en chute libre (A faire après le TD)

Soit le référentiel terrestre local représenté par le repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où $\vec{e}_x$ est orienté vers l'est, $\vec{e}_y$ est orienté vers le nord, et $\vec{e}_z$ désigne la verticale ascendante. Ce repère est en rotation par rapport au référentiel géocentrique à la vitesse angulaire Ω_T , et on note $\vec{g} \approx -g \vec{e}_z$ la pesanteur terrestre en O (on négligera le faible écart à la verticalité de $\vec{g}$ associé à la force d'inertie d'entraînement de la rotation de la Terre sur elle-même), et R_T le rayon terrestre.

Une bille est lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur $h \ll R_T$ sur l'axe Oz .

a) **Réaliser** un schéma de la Terre, avec le référentiel géocentrique R_o , le référentiel terrestre local R_T , le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}_T$, le vecteur champ de pesanteur terrestre, et la latitude λ de O .

b) Approche qualitative.

1) **Faire** un schéma de la situation initiale et du début du mouvement dans le plan yOz , sur lequel on représentera les forces en présence à $t=0$ et à l'instant infiniment voisin dt .

2) Pourquoi la trajectoire de chute libre d'un point matériel n'est pas verticale ?

3) Dans quel sens a lieu la déviation principale ? On pourra **s'appuyer** sur le schéma et sur l'importance relative des différentes forces pour déterminer le sens de la déviation.

c) Approche quantitative.

1) **Ecrire** le système d'équations différentielles du mouvement.

2) **Justifier** que $v_x \ll \frac{g}{\Omega_T}$, de sorte que l'on peut négliger le terme en $\dot{x}$ dans

l'équation suivant $\vec{e}_x$.

3) **Résoudre** alors le système différentiel, pour déterminer $z(t)$, puis $x(t)$ et enfin $y(t)$.

d) Vérification expérimentale : la première expérience de vérification de la déviation vers l'est a été tentée sans succès par Cassini dans le puits de l'observatoire de Paris. Elle a été réussie en 1831 par Reich dans un puits de mine de Freiburg. En 1903, Flammarion a refait l'expérience avec des billes d'acier lâchées à vitesse nulle du haut du Panthéon (hauteur $h = 67$ m, latitude $\lambda(\text{Paris}) = 48^\circ 51'$). Il a mesuré une déviation de 7,6 mm.

1) Quelle est la durée de la chute ?

2) Quelle valeur aurait-il dû trouver pour la déviation ? On **vérifiera** que la déviation vers le nord est bien négligeable devant la déviation vers l'est.

3) Quel phénomène physique négligé est susceptible de justifier l'écart observé, et pourquoi ?

Exercice 5 : Centrifugeuse (Principe de l'essoreuse à salade) (A faire après le TD)

Soit un point matériel M ($m = 10$ g) pouvant se déplacer sans frottement dans un tube horizontal de longueur $d = 40$ cm. Le tube tourne à vitesse constante autour d'un axe vertical passant par une de ses extrémités. M est attaché par un fil de longueur $l = 20$ cm à l'axe de rotation.

a) 1) **Réaliser** un schéma du dispositif.

2) **Définir** le référentiel galiléen R de référence, et le choix du repère associé.

3) **Définir** le référentiel d'étude R' le plus judicieux associé au système et **définir** son mouvement par rapport au référentiel galiléen R de référence.

b) **Réaliser** le bilan des forces exercées sur M dans le référentiel R , puis dans le référentiel R' . En **déduire** la base de projection B_{sys} la plus appropriée pour réaliser l'étude du système.

c) **Donner**, dans la base B_{sys} , l'expression de chacune des forces s'exerçant sur M .

d) **Etudier** l'équilibre de M par rapport au tube. Quel est son mouvement par rapport au sol ?

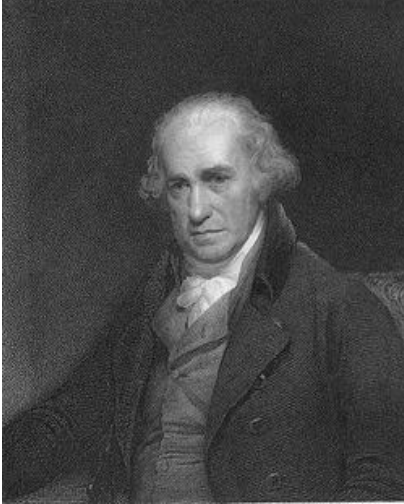
e) Le fil casse.

1) Quelle est la vitesse du point matériel à la sortie du tube, par rapport au tube, puis par rapport au sol ?

2) Quelle est la force exercée par le tube sur M en fonction du temps ?

3) Quel est le type de trajectoire par rapport au sol, après la sortie du tube ?

Thème 5 : Energétique



James Watt (1736-1819)

Mathématicien et ingénieur écossais, Watt a contribué à améliorer la machine à vapeur, étape clé dans la révolution industrielle.

Objectifs :

- Définir énergie cinétique, énergie potentielle et énergie mécanique.
- Identifier les forces conservatives ou non conservatives.
- Définir la puissance de toutes les forces, y compris des forces d'inertie.
- Enoncer et appliquer les théorèmes de l'énergie mécanique et de l'énergie cinétique.
- Définir un équilibre stable, un équilibre instable, et trouver les positions d'équilibre.



1 CV : quantité d'énergie indispensable pour faire en sorte qu'un poids de 75 kilos s'élève de 1 mètre en 1 seconde.

Questionnaire :

1. L'énergie cinétique d'un point matériel $M(m)$ en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ est :

- ☐ $E_c = m v$
- ☐ $E_c = \frac{1}{2} m v$
- ☐ $E_c = m v^2$
- ☐ $E_c = \frac{1}{2} m v^2$
- ☐ Aucune réponse n'est correcte

2. Le travail d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M le long d'un trajet allant du point A au point B entre les instants t_1 et t_2 en suivant la courbe (ζ) est :

- ☐ $W(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F}) dt$
- ☐ $W(\vec{F}) = \int_A^B P(\vec{F}) dl$, dl étant le déplacement élémentaire
- ☐ $W(\vec{F}) = \int_{(\zeta)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$, $d\vec{l}$ étant le déplacement élémentaire
- ☐ $W(\vec{F}) = mg(z_B - z_A)$
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

3. La puissance $P(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M possédant une vitesse $\vec{v}(M)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ est :

- ☐ $P(\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{v}(M)$.
- ☐ $P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)$.
- ☐ $P(\vec{F}) = \vec{v}(M) \times \vec{F}$.
- ☐ Toujours positive.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

4. L'énergie mécanique d'un système est définie comme :

- ☐ La dérivée de l'énergie potentielle du système.
- ☐ La somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
- ☐ La dérivée de l'énergie cinétique du système.
- ☐ Constante quel que soit les forces appliquées au système.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

5. Un point matériel M est dit à l'équilibre en x_0 si :

- ☐ Déposé en ce point sans vitesse, il reste en ce point.
- ☐ La somme des forces agissant sur M en x_0 est nulle.
- ☐ La variation de l'énergie potentielle du point M en x_0 est nulle.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

Exercices :

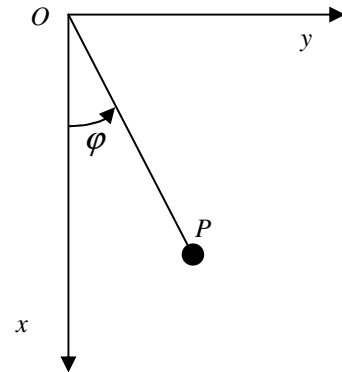
Exercice 1 : Le pendule simple : passage en force mais aussi avec énergie (A faire avant le TD)

On souhaite établir l'équation $\varphi(t)$ d'un pendule oscillant dans le plan vertical (Figure ci-contre).

Pour cela, deux méthodes différentes vont être utilisées :

- la première reprend le thème précédent : la dynamique.
- la seconde utilise la méthode énergétique.

Bien évidemment, les deux méthodes permettent d'aboutir au même résultat. Par contre, bien souvent, l'une ou l'autre des méthodes permet de résoudre plus facilement le problème posé. Lorsque la méthode est au choix de l'étudiant, une réflexion s'impose avant de commencer les calculs, afin de choisir la "bonne" méthode.



- a) Après avoir fait le choix du repère qui semble le plus adapté, **établir** l'équation différentielle à laquelle obéit φ .
- b) **En appliquant** le théorème de l'énergie cinétique, **retrouver** cette équation différentielle.
- c) **Retrouver** cette équation avec le théorème de l'énergie mécanique.
- d) En se plaçant dans le cas des oscillations de faible amplitude, **résoudre** complètement l'équation différentielle du mouvement.

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$: $\varphi(0) = 0$ et $\dot{\varphi}(0) = \frac{\pi}{4} \text{ rad.s}^{-1}$.

Exercice 2 : Energie d'une particule sur une ellipse (A faire avant le TD)

Une particule M de masse m décrit la trajectoire elliptique d'excentricité e , de demi-axes a et b , de centre O , et d'équation $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = a \cos(\omega t) \vec{i} + b \sin(\omega t) \vec{j}$. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignent les vecteurs unitaires dans le repère cartésien Oxy orthonormé tandis que a , b et ω sont des constantes.

1.

- a. **Montrer** que la résultante $\vec{F}$ des forces agissant sur M dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on déterminera en fonction de m , ω et $r = OM$. On prendra $E_p(r=0) = 0$.
- b. **En déduire** le travail de $\vec{F}$ lorsque la particule se déplace de M_1 ($OM_1 = r_1$) vers M_2 ($OM_2 = r_2$).

2. **Montrer** que l'énergie mécanique totale est conservée.

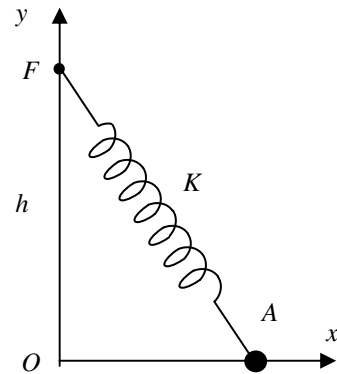
3. **Déterminer** les instants où l'énergie se répartit en quantités égales sous forme cinétique et sous forme potentielle.

Exercice 3 : Effet non linéaire sur un pendule élastique vertical

Une masselotte A , de masse m , coulisse sans frottement sur une tige horizontale Ox . Elle est soumise à l'action d'un ressort, de raideur K et de longueur à vide l_0 , dont l'extrémité fixe F est située à une distance h de la tige (Figure ci-contre).

On désigne par x l'abscisse de A sur la tige, comptée à partir de O , projection de F sur l'axe associé à la tige.

On étudie le mouvement de A par rapport au référentiel $R(O, xyz)$ que l'on supposera galiléen.



a) **Réaliser** le bilan des forces s'exerçant sur A . Les **exprimer** dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

b) **Montrer** que l'expression de l'énergie potentielle de A est :

$$\varepsilon_p(x) = K \left[\frac{x^2}{2} - l_0 (x^2 + h^2)^{1/2} + l_0 h \right] \text{ si l'origine des énergies potentielles est choisie en } x = 0.$$

c) Que devient $\varepsilon_p(x)$ lorsque $h = 0$? Quelle est alors l'équation différentielle en x décrivant le mouvement de A ? N'a-t-on pas affaire ainsi à un oscillateur harmonique ? **Calculer** sa fréquence propre sachant que $K = 400 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m = 0,1 \text{ kg}$.

d) Pour h quelconque, **étudier** la fonction $\varepsilon_p(x)$, puis tracer le graphe correspondant. Quelles sont les positions d'équilibre stables x_e ?

Application numérique : **calculer** x_e dans le cas où $h = 10 \text{ cm}$ et $l_0 = 15 \text{ cm}$.

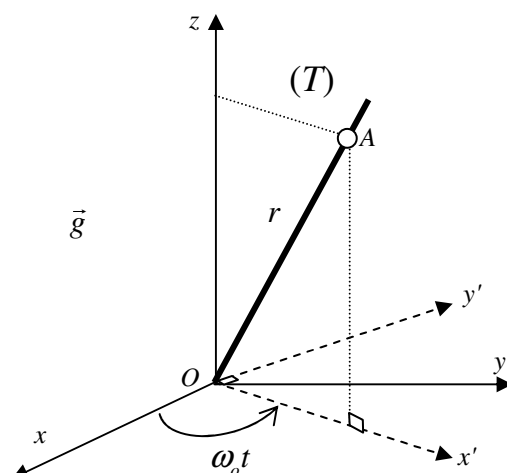
e) A partir du développement au second degré de $\varepsilon_p(x)$ autour de $x = x_e$, **trouver**, à l'aide du théorème de l'énergie mécanique, l'expression de la pulsation des petits mouvements autour des positions d'équilibre stable. **Calculer** la fréquence de ces oscillations avec les données de la question c).

Exercice 4 : Mouvement dans un référentiel non galiléen

Une masselotte A , de masse m , peut coulisser sans frottements, sur une tige (T) . On note r la distance OA entre l'extrémité de la tige et la masselotte A considérée comme ponctuelle.

Cette tige, inclinée de l'angle θ_0 par rapport à l'axe Oz du repère galiléen $R(O, xyz)$, tourne uniformément à la vitesse angulaire ω_0 autour de Oz .

On note $R'(O, x'y'z')$ le repère orthonormé direct lié à la tige, et indiqué sur la figure ci-contre.



A l'instant initial, A est lâché sans vitesse initiale à la distance r_o et l'on cherche à étudier le mouvement ultérieur de A dans R' .

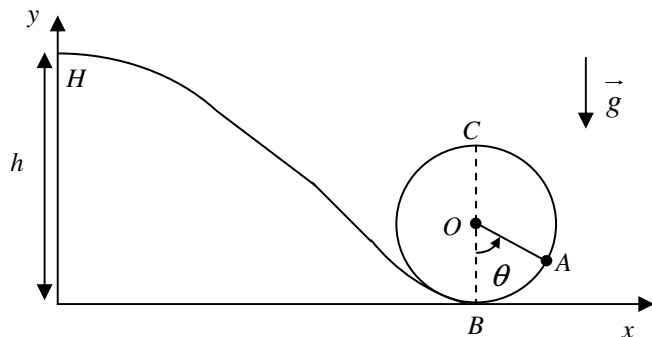
- Effectuer** le bilan des forces qui s'exercent sur A .
- Calculer** l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement (on prendra l'origine de l'énergie potentielle en O).
- En déduire** l'expression de l'énergie potentielle totale $E_P(r)$.
- Déterminer** la position d'équilibre r_e de l'anneau et discuter de sa stabilité.
- Donner** l'allure de la courbe $E_P(r)$.
- Selon la valeur de r_o par rapport à r_e , **discuter** des différents mouvements possibles de A sur la tige une fois qu'il est lâché.

Exercice 5 : Mouvement d'un point matériel guidé sur une courbe circulaire (A faire après le TD)

Dans le référentiel terrestre $R(O,xyz)$ supposé galiléen, un point matériel A , de masse m , se déplace sur un rail situé dans un plan vertical (Figure ci-dessous). Le rail comporte une partie circulaire, de diamètre $BC = 2l$, que le mobile parcourt à l'intérieur du cercle.

Le point est libéré sans vitesse initiale en H à la hauteur h au-dessus de B , point le plus bas du cercle, et on étudie uniquement le mouvement de A dans la partie circulaire.

La liaison est unilatérale et on néglige tous les frottements.



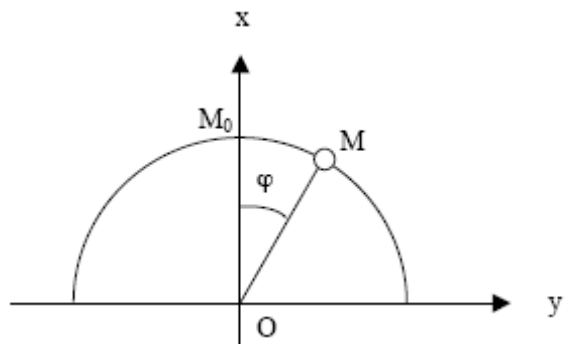
- Par application du théorème de l'énergie, **exprimer** la vitesse $\vec{v}(A/R)$ de A dans R en fonction de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
- Par application du principe fondamental de la dynamique dans le repère de Frénet, **donner** l'expression de la réaction $\vec{R}$ exercée par le guide sur A en fonction de θ .
- Quelle condition traduit l'existence du contact entre le point matériel et le rail ?
Montrer que cela se traduit dans cet exercice par la relation $E_m > E_p(\theta) - \frac{1}{2}mgl \cos \theta$.
- De quelle hauteur minimale h_{min} , doit-on lâcher le point pour qu'il fasse le looping sans perdre le contact ?
- Dans le cas particulier où $h = 3l$, $l = 10$ m et $m = 350$ kg, **calculer** les vitesses de passage en B et C ainsi que les réactions du rail lors du passage en ces points.

Eléments de réponse :

1. $v(A/R) = \{2g[h - l(1 - \cos \theta)]\}^{1/2}$
2. $\vec{R} = R \vec{e}_n$ avec $R = mg \left[3 \cos \theta + 2 \left(\frac{h}{l} - 1 \right) \right]$
3. $R > 0 \rightarrow E_m > E_p(\theta) - \frac{1}{2} mgl \cos \theta$
4. Par définition de E_m , $E_m \geq E_p$; par ailleurs, ici, $E_m > E_p(\theta) - \frac{1}{2} mgl \cos \theta$ pour que le contact se maintienne. On a donc une double contrainte à respecter pour qu'il n'y ait pas déraillement. Or, en $\theta = \pi$ (en C, point le plus haut où le contact doit être maintenu pour que le looping soit réussi), la seconde condition est plus restrictive que la première et impose donc son rôle. Ainsi, $h > h_{\min} = \frac{5}{2} l$.
5. $v_B = 24,5 \text{ ms}^{-1}$; $v_C = 14,1 \text{ ms}^{-1}$; $R_B = 24,5 \text{ kN}$; $R_C = 3,5 \text{ kN}$.

Exercice 6 : Mouvement d'une masselotte sur une demi-boule (A faire après le TD)

Dans un référentiel lié à la surface de la terre mais supposé galiléen, un point M de masse m est placé au sommet M_0 d'une demi sphère de rayon r . On lui communique une vitesse angulaire initiale $\dot{\phi}_0$. On suppose que le déplacement de M sur la demi sphère est repéré par l'angle ϕ et demeure exempt de tout frottement. $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur.



- 1- Quel est le mouvement ultérieur de M ?
- 2- Que peut-on dire du travail de la réaction $\vec{R}$ du support ?
- 3- a) **Calculer** l'énergie mécanique du point M . On prendra l'origine des énergies potentielles au point O , centre de la sphère.
b) **En déduire** l'expression générale de $\dot{\phi}$ en fonction de g , r , $\dot{\phi}_0$ et ϕ . A priori, M peut-il décrire la totalité de la demi sphère ?
- 4- En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, **déterminer** l'expression de $\|\vec{R}\|$.
- 5- Lorsque $\dot{\phi}_0$ est négligeable, **montrer** qu'il existe une valeur de $!$ pour laquelle $\|\vec{R}\|$ s'annule. Quel est alors le mouvement de M ?

Quelques petits calculs non traités en TD (Autoévaluation)

- 1- Une dépanneuse remorque une voiture en panne sur une côte à 20° . En supposant que le câble fait 30° avec le plan de la route et que la tension est constante et vaut 1600 N , quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si elle la remorque sur une distance de 500 mètres ? (Réponse : $W = 6,9.10^5\text{ J}$)
- 2- Un tambour de 30 cm de diamètre tourne à 10 tours par minute autour de son axe horizontal. Un fil est enroulé autour du tambour. Ce fil porte à son extrémité une charge de 200 N . Quel est le travail effectué par le fil sur la charge, s'il la hisse à vitesse constante pendant 2 minutes ? (Réponse : $W = 3,8.10^3\text{ J}$)
- 3- En marchant normalement à vitesse constante, une personne exerce une force d'environ $0,3\text{ N}$ pour surmonter la résistance de l'air. Quel est le travail de cette personne pour vaincre la résistance de l'air en parcourant deux fois une piste circulaire de rayon $0,25\text{ km}$? (Réponse : $W = 9.10^2\text{ J}$)
- 4- L'ascenseur express de la tour Sears à Chicago a une vitesse moyenne de $548,6\text{ m.min}^{-1}$, lors de sa montée au $103^{\text{ème}}$ étage, à $408,4\text{ m}$ au-dessus du sol. Supposant que la charge totale est de 1 tonne , quelle est la puissance moyenne de son moteur ? (Réponse : $P_{\text{moy}} = 90\text{ kW}$)
- 5- La vitesse de décollage d'un avion de ligne Boeing 747, pesant $2,2.10^6\text{ N}$, est de 268 m/s . Calculer alors son énergie cinétique. Sachant qu'un kilo de TNT produit une énergie de $4,6.10^6\text{ J}$, quelle est la masse de TNT équivalent à cette énergie cinétique ? (Réponses : $E_k = 8,0.10^9\text{ J}$; $\text{masse}_{\text{TNT}} = 1,7\text{ tonnes}$)
- 6- Selon, le livre des records, Alexandre Zass (surnommé « Samson »), quand il ne pliait pas des barreaux de fer, pouvait attraper une femme de 463 N tirée d'un canon à une vitesse proche de 72 km.h^{-1} . En supposant que Samson stoppait notre héroïne en la ralentissant uniformément sur une distance de 1 mètre , calculer la force qu'il exerçait alors. On suppose que la vitesse de la femme était de $8,94\text{ m/s}$ lorsque Samson l'attrapait. (Réponse : $F = 1,89\text{ kN}$)
- 7- Quelle est la variation d'énergie potentielle d'un météorite de 100 kg , s'il tombe en chute libre de 1000 km jusqu'à la surface de la Terre. La Terre a une masse de $6,0.10^{24}\text{ kg}$ et un diamètre de $1,28.10^7\text{ m}$. (Réponse : $\Delta E_p = -8,5.10^8\text{ J}$)
- 8- Un sauteur portant sa perche (tube épais de masse environ 2 kg en graphite et fibre de verre) se prépare à franchir la barre. A quelle vitesse doit-il courir pour atteindre $6,10\text{ m}$ de hauteur ? Négligez toute perte d'énergie et supposez que son centre de gravité est à 1 m du sol. (Réponse : $v = 10\text{ ms}^{-1}$)
- 9- Une skieuse de 60 kg part de l'arrêt au sommet d'une pente de hauteur 60 m et descend sans utiliser ses bâtons.
 - (a) Quelle est son énergie potentielle gravitationnelle initiale par rapport au bas de la pente ? (Réponse : $E_{pi} = 3,5.10^4\text{ J}$)
 - (b) En négligeant les frottements, calculez sa vitesse théorique au bas de la pente ? (Réponse : $v_f = 34\text{ m.s}^{-1}$)
 - (c) En fait, elle atteint le bas avec une vitesse de 25 m.s^{-1} . Quelle est l'énergie totale perdue par frottements ? (Réponse : $W_f = -1,7.10^4\text{ J}$)
- 10- Soit une planète immobile de rayon R et de masse M . Quel travail doit être effectué sur une fusée de masse m , pour l'éloigner lentement de la surface de cette planète jusqu'à une distance infinie ? On négligera tout frottement. (Réponse : $W = GMm/R$)

Thème 6 : Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

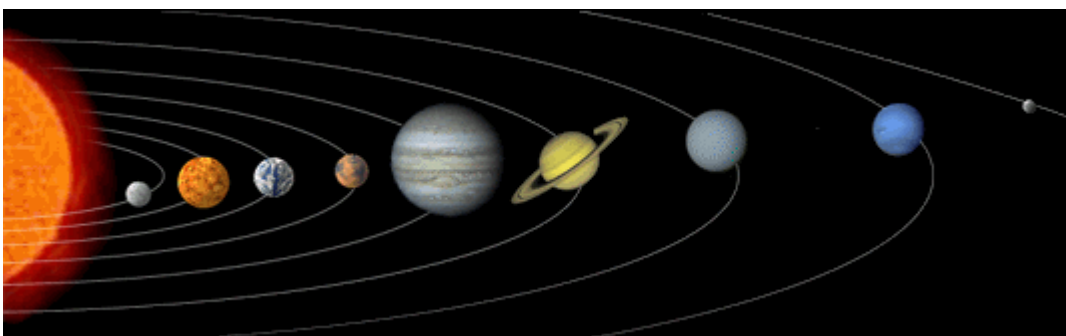


Johannes Képler ou Kepler (1571-1630)

Képler découvre que les planètes suivent des trajectoires elliptiques autour du soleil et énonce les relations mathématiques qui régissent leur mouvement.

Objectifs :

- Définir référentiel géocentrique, quantité de mouvement et moment cinétique en un point
- Enoncer le théorème du moment cinétique en un point
- Enoncer les lois générales de conservation (loi des aires, énergie mécanique)
- Enoncer les lois de Kepler
- Définir l'excentricité e et en déduire la trajectoire associée en fonction de la valeur de e



Tous les corps célestes qui composent le système solaire gravitent autour du soleil suivant des orbites elliptiques. En première approximation ces ellipses sont assimilables à des cercles ayant pour centre le centre du soleil, sauf pour deux exceptions : Pluton et Mercure. Les trajectoires des planètes autour du soleil sont toutes contenues dans un même plan (l'écliptique) à l'exception de Mercure (inclinaison de 9°) et de Pluton (inclinaison de $17,2^\circ$). Les planètes rocheuses sont: Mercure, Vénus, la Terre, Mars et Pluton. Les planètes géantes essentiellement gazeuses sont: Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Les comètes se composent de glace. Les météorites sont faites de roches ou de métal.

Questionnaire :

1. La force d'interaction gravitationnelle est :

- ☐ Conservative.
- ☐ Non conservative.
- ☐ Centrale.
- ☐ Non centrale.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

2. Le module de la force d'interaction gravitationnelle exercée par un point A de masse M sur un point B de masse m distants de r est :

- ☐ Inversement proportionnel à la distance r .
- ☐ Inversement proportionnel au carré de la distance r .
- ☐ Proportionnel au produit M par m .
- ☐ Proportionnel à la constante de gravitation universelle.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

3. L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle exercée par un point A de masse M , sur un point B de masse m , distants de r est :

- ☐ Inversement proportionnelle à la distance r .
- ☐ Inversement proportionnelle au carré de la distance r .
- ☐ Proportionnelle au produit M par m .
- ☐ Proportionnelle à la constante de gravitation universelle.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

4. La force d'interaction gravitationnelle exercée par un point A de masse M sur un point B de masse m , distants de r :

- ☐ Dérive d'un potentiel de gravitation.
- ☐ Dérive d'une énergie potentielle.
- ☐ Est attractive si son module est positif.
- ☐ Est attractive si son module est négatif.
- ☐ Aucune réponse n'est correcte.

Exercices :

Exercice 1 : Utilisation de la formule de Binet (A faire avant le TD)

Un point matériel M de masse m est soumis à une force centrale $\vec{F}$ dirigée vers O , point fixe et origine du référentiel galiléen dans lequel est étudié le mouvement. On repère ce point par ses coordonnées polaires (r, θ) .

On désigne par C la constante de la loi des aires, soit $r^2 \dot{\theta} = C$, et on pose $u = \frac{1}{r}$. On rappelle la seconde formule de Binet concernant l'accélération radiale de M :

$$\vec{a}_r = -C^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] \vec{u}_r$$

a) Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ dans le cas où le point décrit une spirale d'équation :

- 1) $r\theta = K$ (K constante),
- 2) $r = r_0 \exp(-\lambda\theta)$ (λ constante positive)

b) Même question pour une trajectoire du type: $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$.

Exercice 2 : Caractéristiques d'un mouvement à force centrale

Une particule P , de masse m , est attirée par une particule fixée en O , de masse M , selon la force $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r}$.

G représente la constante de gravitation, et $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

a) Soit $\vec{p}$ la quantité de mouvement de la particule P , et $\vec{L}$ son moment cinétique.

- 1) **Calculer** le vecteur $\frac{d\vec{L}}{dt}$. Le moment cinétique est-il une constante du mouvement ?
- 2) **Evaluer** la quantité $\vec{L} \cdot \vec{r}$

b) On pose le vecteur $\vec{R}$ tel que $\vec{R} = \vec{p} \times \vec{L} - Gm^2 M \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$.

- 1) **Evaluer** la quantité $\vec{L} \cdot \vec{R}$ et conclure quant à l'orientation de $\vec{L}$ par rapport à $\vec{R}$ et celle de $\vec{R}$ par rapport au plan de la trajectoire.
- 2) A l'aide du calcul de $\frac{d\vec{R}}{dt}$, **montrer** que le vecteur $\vec{R}$ est également une constante du mouvement.

- c) Soit θ l'angle que font les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{R}$ **Déterminer** l'équation de la trajectoire de P .
La mettre sous la forme $\|\vec{r}\| = f(\|\vec{L}\|, \|\vec{R}\|, \theta)$.

Exercice 3 : Troisième loi de Képler (A faire après le TD)

On désigne par M la masse de la Terre et par m celle d'un satellite artificiel ($m \ll M$).

On note $\frac{C}{2}$ la vitesse aréolaire, R le rayon de la Terre, et $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ le champ de gravitation à la surface de la Terre.

On désigne par z l'altitude d'un point quelconque de l'orbite du satellite, par z_A celle de l'apogée et par z_P celle du périégée.

On donne : $z_A = 5,65.10^3 \text{ km}$ et $z_P = 0,95.10^3 \text{ km}$.

- Etablir** l'expression littérale du paramètre p de la conique trajectoire en fonction de R , g_0 et de C . **Donner** son expression numérique.
- Calculer** littéralement l'excentricité e et le demi grand axe a de cette conique en fonction de R , z_A et z_P . Application numérique.
- Etablir** littéralement la période de rotation du satellite en fonction de g_0 , R , z_A et z_P . Retrouver la troisième loi de Kepler. Application numérique.

Exercice 4 : Satellites artificiels (A faire après le TD)

Soit $G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle, $R = 6378 \text{ km}$ le rayon moyen de la Terre, $M = 6,0.10^{24} \text{ kg}$ la masse de la Terre et T son centre.

a) Orbites circulaires

- Définir** le référentiel géocentrique R_o .
- Dans l'approximation d'une répartition des masses à symétrie sphérique, **déterminer** l'expression du module $g(r)$ du champ gravitationnel terrestre à une distance $r > R$ de T . On le donnera ensuite en fonction de r , R et $g_o = g(R)$.
- Déterminer**, en fonction de r , R , et g_o , la norme $V(r)$ de la vitesse, dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre de masse m en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre.
- En **déduire** la période $T(r)$ du mouvement du satellite en fonction de r , R , et g_o .
- Comparer** l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.
- Donner** l'énergie mécanique du satellite.
- Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?

- 8) **Déterminer** le plan de l'orbite d'un satellite géostationnaire.
 9) Peut-on lancer un satellite de telle sorte qu'il reste à la verticale de Paris ?

b) Transfert d'orbite d'un satellite

On désire faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse ($r \approx R$) dans le plan équatorial de la Terre à une orbite géostationnaire de rayon R_g . Pour cela, on communique une brusque variation (instantanée) de vitesse $\overrightarrow{\Delta v_B}$ au satellite en un point B de l'orbite basse, afin que le satellite se retrouve dans une orbite elliptique (orbite de transfert de Hohmann) tangente en B à l'orbite basse et tangente en un point H à l'orbite géostationnaire. On admettra que l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique est de la forme $E = -\frac{k}{a}$, où a est le demi-grand axe de l'ellipse et k une constante dépendant de la masse M de la Terre, de la masse m du satellite et de la constante G de gravitation universelle.

- 1) En identifiant l'expression de E à celle d'un satellite en orbite circulaire, **déterminer** k en fonction de m , R , et g_o .
- 2) **Faire** un schéma soigné sur lequel on placera le centre T de la Terre, les trajectoires circulaire basse et géostationnaire et l'orbite de transfert. On prendra soin de **justifier** le schéma.
- 3) **Déterminer** le demi-grand axe a de l'orbite de transfert en fonction de R et R_g .
- 4) **Déterminer** la variation de vitesse $\overrightarrow{\Delta v_B}$ (norme et direction).
- 5) **Déterminer** la variation de vitesse $\overrightarrow{\Delta v_H}$ (norme et direction) qu'il faudra appliquer en H pour passer sur l'orbite géostationnaire.

Thème 7 : Les oscillateurs



Claude Cohen-Tannoudji, né le 1^{er} avril 1933 à Constantine est un physicien français.

Avec Steven Chu et William Daniel Phillips, il reçoit le prix Nobel de Physique en 1997 pour ses travaux sur le ralentissement des atomes à l'aide de laser.

En mécanique quantique, les électrons des couches périphériques des atomes sont considérés comme des oscillateurs harmoniques. En particulier, pour les atomes qui composent l'air, leur pulsation propre correspond à une radiation ultraviolette du spectre électromagnétique, et l'étude de la puissance émise par ces oscillateurs permet d'expliquer la couleur bleue du ciel.

Objectifs :

- Etablir et identifier une équation différentielle décrivant un système oscillateur harmonique amorti et non amorti en régime libre
- Etablir et identifier une équation différentielle décrivant la réponse d'un oscillateur à une excitation sinusoïdale
- Représenter la réponse temporelle d'un oscillateur
- Représenter dans le cas du régime forcé la réponse fréquentielle d'un système soumis à une excitation sinusoïdale. Identifier la résonance.



Le Professeur Tournesol est curieux de tout : botanique, physique, électronique et même radiesthésie !

Questionnaire :

1. Le nombre de vibrations par seconde d'un oscillateur est appelé :
 - ☐ Période.
 - ☐ Fréquence.
 - ☐ Longueur d'onde.
 - ☐ Pulsation.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte.
2. La période d'un oscillateur mécanique non amorti est la durée :
 - ☐ Nécessaire pour aller d'un point extrême de la trajectoire à l'autre, qui lui est symétrique par rapport à l'origine.
 - ☐ Nécessaire pour revenir à la position d'équilibre en partant d'un point extrême de la trajectoire.
 - ☐ S'écoulant entre 2 passages consécutifs, effectués dans le même sens, par une position donnée.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte.
3. Pour un oscillateur mécanique non amorti :
 - ☐ L'énergie cinétique est constante.
 - ☐ L'énergie potentielle est constante.
 - ☐ L'énergie mécanique est constante.
 - ☐ Les forces appliquées sur le système sont toutes conservatives.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte.
4. Dans le cas d'un système oscillant soumis à une excitation sinusoïdale, la réponse forcée du système correspond à :
 - ☐ La solution générale de l'équation différentielle du système sans le second membre.
 - ☐ La solution particulière de l'équation différentielle du système.
 - ☐ La somme des deux solutions précédentes.
 - ☐ La solution particulière de l'équation différentielle du système qui est une constante.
 - ☐ Aucune réponse n'est correcte.

Exercices :

Exercice 1 : Le pendule simple (A faire avant le TD)

Un pendule simple est constitué d'une bille d'acier de masse $m = 50 \text{ g}$ suspendue à un fil de longueur $L = 2 \text{ m}$. On l'écarte de 4° de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse initiale.

1- **Etablir** l'équation différentielle du mouvement de la masse si les frottements sont négligeables. En déduire la période de l'oscillation.

Elément de réponse : $T_0 = 2.84 \text{ s}$

2- **Montrer** que la période a bien la dimension d'un temps.

3- Que vaudrait la période si on avait écarté le pendule de 8° ?

Donnée : $g = 9.81 \text{ N.kg}^{-1}$

Exercice 2 : Le pendule élastique (A faire avant le TD)

Un solide (S), de masse m , pouvant coulisser sans frottement sur un rail horizontal, est fixé à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un point fixe. On repère la position de (S) par l'abscisse $x(t)$ de son centre de gravité, choisie nulle lorsque le système est au repos. Ainsi, $x(t)$ est directement l'écart à l'équilibre.

1- **Etablir** l'équation différentielle du mouvement du solide (S).

2- On écarte le pendule élastique défini précédemment de $x_0 = 10 \text{ cm}$ avant de le lâcher sans vitesse initiale. **Déterminer** l'expression de $x(t)$.

Elément de réponse : $x(t) = 0.1 \cos(22.4t)$

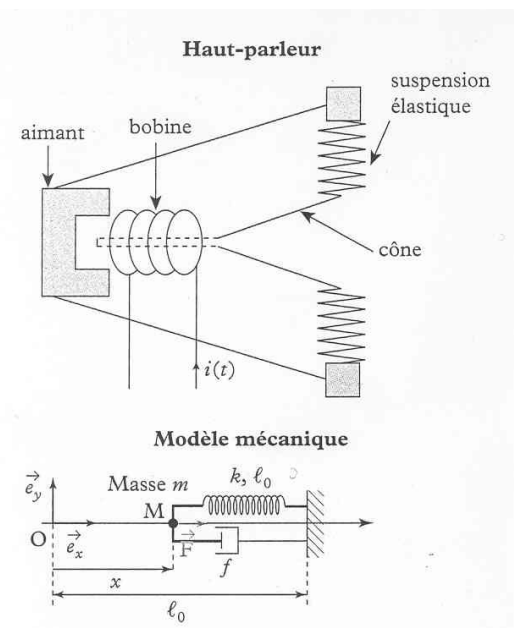
Données : $m = 100 \text{ g}$; $k = 50 \text{ N.m}^{-1}$

Exercice 3 : Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur, alimenté par le courant $i(t)$, à l'aide d'une masse m , se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \vec{e}_x)$. Cette masse, assimilée à un point matériel $M(m)$, est reliée à un ressort, de longueur à vide ℓ_0 et raideur k , et à un amortisseur fluide de constante f . Elle est également soumise à la force $\vec{F}(t) = K i(t) \vec{e}_x$, où K une constante.

On travaille dans le référentiel galiléen terrestre $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et on suppose que le courant d'alimentation $i(t)$ est sinusoïdal et vérifie $i(t) = I_m \cos(\omega t)$, avec ω la pulsation du générateur.

Données : $m = 10 \text{ g}$ – $k = 15 \text{ kN.m}^{-1}$ – $K = 200 \text{ N.A}^{-1}$ – $I_m = 1 \text{ A}$



- 1) **Ecrire** l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse m .
- 2) a) **Normaliser** l'équation en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q .
 b) On souhaite avoir $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire la valeur du coefficient f .
- 3) **Déterminer** l'expression de la réponse forcée $x(t)$. On la mettra sous la forme $X_m \cos(\omega t + \varphi)$, et on donnera les expressions de X_m et φ .
Donnée : $\omega = 6\,280 \text{ rad.s}^{-1}$
- 4) **Tracer** l'allure de la courbe $X_m(\omega)$. En déduire la bande passante du système.
Elément de réponse : $\omega_c = 1\,225 \text{ rad.s}^{-1}$

Exercice 4 : Oscillations forcées d'une particule sur un cerceau mobile (A faire après le TD)

Une particule, assimilée à un point matériel M de masse m , se déplace sur la rainure intérieure d'un cerceau de centre O , de rayon R et d'axe horizontal Oz , avec une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse relative de la particule par rapport au cerceau, et α est un coefficient positif constant.

La particule est repérée par l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, où Ox désigne la verticale descendante. On supposera θ petit dans tout le problème. On désigne par g l'accélération de la pesanteur.

La particule est abandonnée à l'instant initial $t = 0$ depuis la position θ_0 sans vitesse initiale par rapport au cerceau.

Le cerceau est animé d'un mouvement oscillatoire de rotation, de faible amplitude autour de son axe de révolution Oz : $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\Omega t)$, où $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$, OA désignant un rayon fixe du cerceau.

- 1) **Ecrire** l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.
- 2) **Déterminer** l'amplitude θ_M de l'élongation $\theta(t)$ en régime forcé, ainsi que le rayon R_r du cerceau qui permet d'obtenir la résonance d'amplitude.

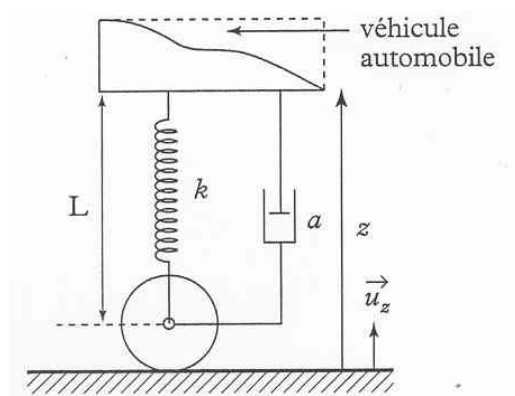
Problème : Comportement routier d'une automobile

On se propose d'étudier quelques problèmes relatifs à la suspension d'un véhicule automobile et au comportement dynamique de ce véhicule sur route déformée.

A) Modèle simplifié de la suspension

La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, constitués chacun :

- D'un ressort métallique hélicoïdal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 .
- D'un amortisseur tubulaire à piston à huile, fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de coefficient d'amortissement f .



On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Les pneus de rayon extérieur R sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude. Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement suivant la verticale ascendante de vecteur unitaire $\vec{e}_z$.

1) Le véhicule étant immobile sans frein sur un sol horizontal, quelle est la longueur l_e des ressorts au repos et la garde au sol z_0 du véhicule ?

2) Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé d'une hauteur h , puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

a) **Etablir** l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \beta z = \delta$$

où α , β et δ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de f , k , M et z_0 .

b) On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final le plus bref possible. Quelle doit être la valeur de α en fonction de β ? En déduire l'expression de f en fonction de M et k .

c) **Déterminer** alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_0 , h et $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$.

d) **Tracer** le graphe $z(t)$. On prendra pour échelle : $z_0 = 1$, $h = z_0/4$, $\omega_0 = 1$.

3) On effectue de nouveau le même essai en charge nominale, le véhicule contenant quatre personnes de masses égales chacune à m , également réparties sur les quatre systèmes. La garde au sol est z_0' .

a) **Etablir** la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$ sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha' \dot{z} + \beta' z = \delta'$$

Exprimer les nouvelles constantes α' , β' et δ' en fonction de f , k , m et z_0' .

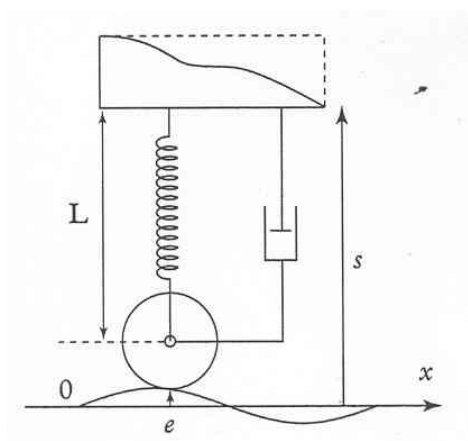
b) **Montrer** que, dans ces conditions, le véhicule oscille.

c) **Déterminer** l'expression de la période T des oscillations autour de la position d'équilibre finale en fonction de k , M et m .

d) On souhaite obtenir $T = \frac{\pi}{3}$ pour $M = 1000$ kg et $m = 100$ kg. **En déduire** la valeur de k puis de a .

B) Etude de la réponse harmonique

1) On étudie maintenant le comportement sur route difficile du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun.



a) On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la cote de référence horizontale 0 suivant la relation :

$$e(x) = e_m \cos(\gamma x)$$

Quelle est, en fonction de γ , la distance λ entre deux bosses ?

Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule à une vitesse constante V ?

b) On repère maintenant le châssis par sa position $s(t)$ par rapport à la cote de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige le décalage angulaire du point de contact pneu-route par rapport à la verticale.

Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la position $s(t)$ du châssis est de la forme :

$$\ddot{s} + \alpha' \dot{s} + \beta' s = u + \delta'$$

où u est une fonction du temps que l'on exprimera en fonction de e et de $\dot{e}$.

2) On étudie le régime forcé permanent.

a) **Expliquer** la signification de cette expression.

b) En utilisant les notations complexes, exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ des oscillations du châssis en fonction de e_m , ω , α' et β' , sous la forme :

$$\underline{S} = e_m \frac{1 + j \frac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j \frac{\Omega}{Q}}$$

où $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite, ω_0' et Q étant des constantes que l'on exprimera en fonction de α' et β' puis de a , k , M et m .

c) **En déduire** l'amplitude S des oscillations en fonction de Ω et Q . Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

d) On montre que S atteint un maximum S_m tel que :

$$\frac{S_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1 - \Omega_m^4}}$$

Calculer Q , Ω_m et $\frac{S_m}{e_m}$. Discuter.

e) **Tracer** avec soin le graphe $\frac{S}{e_m}$ en fonction de Ω pour $0 \leq \Omega \leq 10$.

f) **Calculer** la pulsation propre ω'_0 . **En déduire** la distance λ_m entre les ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à une vitesse V de 90 km/h. Comment réagit le châssis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse ?