UNIVERSITE HASSAN II CASABLANCA
FACULTE DES SCIENCES BEN M'SIK
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
CASABLANCA

Année 2014-2015

CONTROLE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE
FILIERE SMP- S5 - SESSION AUTOMNE
DUREE 1H30

Partie I

A - Démontrer la condition sur les masses des atomes $M(^{A}_{Z}X)$ et $M(^{A}_{Z-1}Y)$ pour que le noyau $^{A}_{Z}X$ se transforme en $^{A}_{Z-1}Y$ par émission β^+. Montrer que lorsque l'émission β^+ est possible la capture électronique l'est également ; justifier votre réponse ?

B- On considère la filiation radioactive suivante

$$Y_1 \xrightarrow{\lambda_1} Y_2 \xrightarrow{\lambda_2} Y_3 \text{ (stable)}$$

- On désigne par $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$ respectivement les nombres de noyau des espèces Y_1, Y_2 et Y_3 présent à l'instant t, on suppose qu'à l'instant t = 0, on a $N_1(0) = No$ et $N_2(0) = N_3(0) = 0$.

1- Etablir les équations décrivant l'évolution en fonction du temps des nombres $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$.
2- Trouver les expressions de $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$ en fonction des constantes de désintégration λ_1 et λ_2.
3- Représenter graphiquement et interpréter l'évolution temporelle de ces substances.

C- Le rubidium naturel est composé de 72,15% de ^{85}Rb, isotope stable, et de 27,85% de ^{87}Rb, isotope radioactif. L'activité est de 675 d.p.s par gramme de rubidium naturel.

- Quelle est la période de ^{87}Rb ?

-27,05

Partie II :

On considère la série de noyaux isobare A=32 dont les excès de masse en keV sont donnés par le tableau (1) suivant :

Elément	${}^{A}_{Z}X$	Excès de masse (keV)
Silicium	${}^{32}_{14}Si$	-24081
Phosphore	${}^{32}_{15}P$	-24305
soufre	${}^{32}_{16}S$	-26016
chlore	${}^{32}_{17}Cl$	-13335
Argon	${}^{32}_{18}Ar$	-2200

On rappelle que l'excès de masse est exprimé par la relation
$\Delta = M(A, Z) - A{\times}u$, où M est la masse atomique exprimée en unité de masse atomique, A est le nombre de masse atomique c'est-à-dire le nombre total de nucléons ($A = N + Z$) et u l'unité de masse atomique

1/ . Comment décrire la stabilité nucléaire à partir de l'énergie de liaison? Déterminer le noyau le plus stable de la série A=32.

2/ Pour chacun des noyaux de la série : déterminer le(s) type de désintégration (s) qu'il subit

3/ Montrer que l'énergie de répulsion coulombienne W_c d'un noyau de rayon R et de charge Q s'écrit :

$$W_c = (1/4\pi\varepsilon_0).(3/5).(Q^2/R) \qquad (1)$$

4/ Deux noyaux miroirs ${}^{A}_{Z}X_{N}$ et ${}^{A}_{Z'}Y_{N'}$ sont deux noyaux isobares tels que le nombre de protons de l'un égale au nombre de neutrons de l'autre (N=Z' et Z=N'). Montrer en utilisant la formule de **Bethe** et **Weizsäcker** que la différence des énergies de liaison de deux noyaux miroirs ne dépend que du terme coulombien.

5/. Utiliser 2 couples de noyaux miroirs de la série A=32 (tableau 1) pour déterminer le rayon nucléaire R de ces noyaux (à partir de la relation (1)). Comparer les valeurs obtenues

On donne :

La formule de **Bethe** et **Weizsäcker** pour un noyau ${}^{A}_{Z}X$:

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2/A^{1/3} - a_a (N-Z)^2/A$$

$(e^2/4\pi\varepsilon_0)\hbar c = 1/137$; $\hbar c = 197$ MeV Fermi ; $M_p c^2 = 938{,}25$ MeV et $M_n c^2 = 939{,}55$ MeV

Condition d'émission β^+

Partie 1

- la conservation de l'énergie totale

$${}^{A}_{Z}M c^2 + T_X = {}^{A}_{Z-1}M c^2 + T_Y + m_0 c^2 + T_{\beta^+} + m_\nu c^2 + T_\nu$$

approximations

- le noyau père se désintegre au repos $T_X = 0$
- le noyau residuel se déplace lourdement $T_Y \ll T_{\beta^+} + T_\nu$
- $m_\nu \simeq 0 \Rightarrow m_\nu c^2 \simeq 0$

Donc :

$${}^{A}_{Z}M c^2 = {}^{A}_{Z-1}M c^2 + m_0 c^2 + T_{\beta^+} + T_\nu$$

$${}^{A}_{Z}M c^2 = {}^{A}_{Z-1}M + m_0 c^2 + (T_{\beta^+})_{max} \quad \text{avec } (T_{\beta^+})_{max} = T_{\beta^+} + T_\nu$$

Par définition : ${}^{A}_{Z}M_{Atomique}\, c^2 + \beta(A,Z) = {}^{A}_{Z}M c^2 + Z m_0 c^2$

$$\underbrace{{}^{A}_{Z}M c^2 + Z m_0 c^2} = \underbrace{{}^{A}_{Z-1}M + (Z-1) m_0 c^2} + 2 m_0 c^2 + (T_{\beta^+})_{max}$$

$${}^{A}_{Z}M_A c^2 + \beta(A,Z) = {}^{A}_{Z-1}M c^2 + \beta(A, Z-1) + 2m_0 c^2 + (T_{\beta^+})_{max}$$

$${}^{A}_{Z}M_A c^2 - {}^{A}_{Z-1}M c^2 + (\beta(A,Z) - \beta(A, Z-1)) = 2m_0 c^2 + (T_{\beta^+})_{max}$$

Avec $(\beta(A,Z) - \beta(A, Z-1)) \simeq 0$

$${}^{A}_{Z}M_A - {}^{A}_{Z-1}M = 2m_0 c^2 + (T_{\beta^+})_{max}$$

Donc $M_x c^2 - M_y c^2 - 2m_0 c^2 = (T_{\beta^+})_{max} \geqslant 0$

Alors la condition d'émission β^+ est :

$$M_x c^2 - M_y c^2 - 2m_0 c^2 \geqslant 0$$

$$\boxed{M_x c^2 - M_y c^2 \geqslant 2m_0 c^2}$$

Filiation radioactive : [désintegration en chaine]

un enchainement d'émission de radioactivités sucessives par les éléments qui se forment

$$ {}^{A_1}_{Z_1}X \longrightarrow {}^{A_2}_{Z_2}Y \longrightarrow {}^{A_3}_{Z_3}Z $$

	X	Y	Z
$t = 0s$	N_0	0	0
$t \neq 0s$	$N_1(t)$	$N_2(t)$	$N_3(t)$

- On veut déterminer le nombre de noyau présents à un instant t pour chaque espèce : $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$

on a : $N_0 = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$

$N_1(t=0) = N_0$ et $N_2(t=0) = N_3(t=0) = 0$

- les eq différentielles donnant la variation de nombre de noyau pour chaque espèce

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) & (1) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) & (2) \\ \dfrac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t) & (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{N_1(t) = N_0 \exp(-\lambda_1 t)}$ ← nombre de noyau ${}^{A_1}_{Z_1}X$ présent à l'insant t

ave λ_1 : la probabilité que le noyau X se désintegre en Y

(2) $\Rightarrow$ $\dfrac{dN_2(t)}{dt} + \lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_1(t) \Rightarrow \dfrac{dN_2(t)}{dt} + \lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_0 \exp(-\lambda_1 t)$

$\Rightarrow$ $\exp(\lambda_2 t) \dfrac{dN_2(t)}{dt} + \exp(\lambda_2 t)\lambda_2 N_2(t) = \lambda N_0 \exp((\lambda_2 - \lambda_1) t)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{d(N_2(t)\exp(\lambda_2 t))}{dt} = \lambda_1 N_0 \exp((\lambda_2 - \lambda)t)$

$\Rightarrow$ $\int d(N_2(t)\exp(\lambda_2 t)) = \int \lambda_1 N_0 \exp((\lambda_2 - \lambda)t)\, dt$

$N_2(t)\exp(\lambda_2 t) = \dfrac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t)\exp(\lambda_2 t) + \cancel{cte}\ A$

$N_2(t) = \dfrac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t) + A\exp(-\lambda_2 t)$

d'après la condition initiale $N_2(t=0s)=0$

$$A = -\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}$$

donc : $$\boxed{N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\right)}$$

③ $\Rightarrow \dfrac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t)$

$$\Rightarrow dN_3(t) = \frac{\lambda_2\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\exp(-\lambda_1 t)-\exp(-\lambda_2 t)\right) dt$$

$$\Rightarrow N_3(t) = \frac{\lambda_2\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\int\left(\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\right) dt$$

$$N_3(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2}\right) + B$$

$$N_3(t) = \frac{\cancel{\lambda_1}\cancel{\lambda_2} N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1\exp(-\lambda_2 t) - \lambda_2\exp(-\lambda_1 t)}{\cancel{\lambda_1\lambda_2}}\right) + B$$

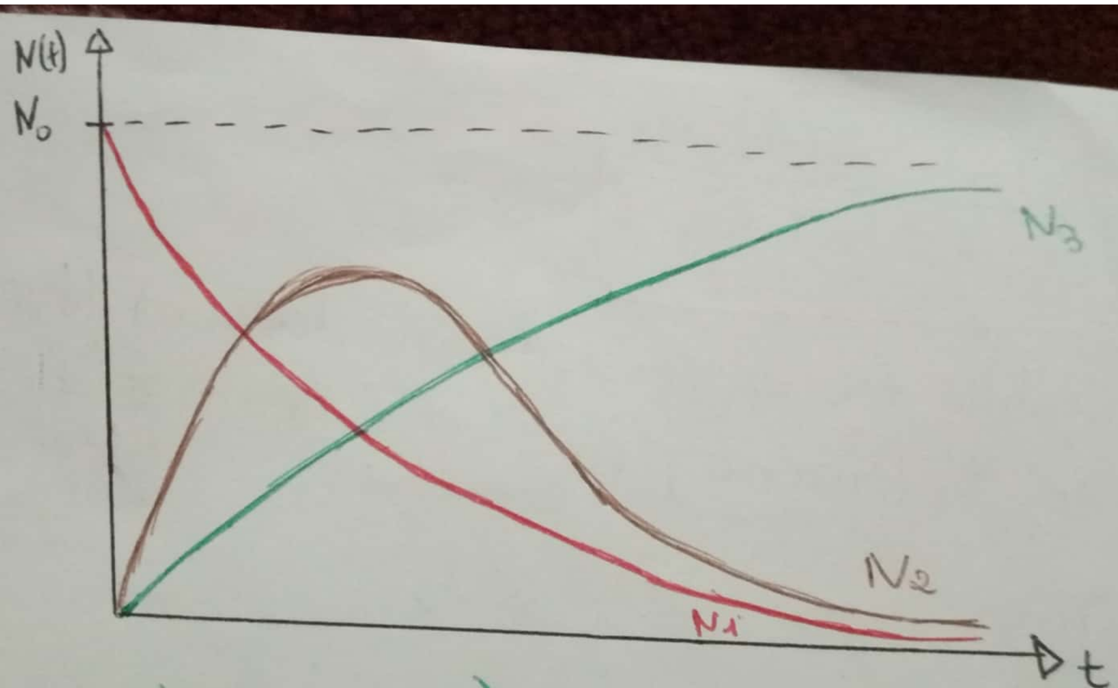
$$N_3(t) = \frac{N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\lambda_1\exp(-\lambda_2 t) - \lambda_2\exp(-\lambda_1 t)\right) + B$$

d'après la condition initiale $N_3(t=0s)=0$

$$\Rightarrow \frac{N_0}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_1-\lambda_2) + B = 0 \Rightarrow B = N_0$$

Donc :

$$\boxed{N_3(t) = \frac{N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\lambda_1\exp(-\lambda_2 t) - \lambda_2\exp(-\lambda_1 t)\right) + N_0}$$



ctivité de chaque espèce

c) Le nbr d'atomes du ^{87}Rb

1g du Rb naturel est:

$$N = \frac{0,2785 \times 6,02 \times 10^{23}}{85 \times 0,7215 + 87 \times 0,2785} \simeq 1,85 \times 10^{21} \text{ atomes.}$$

$$T = \ln 2 / \lambda = \frac{0,693}{A} \times N \simeq 6,33 \times 10^{10} \text{ années.}$$

Partie 2

1) L'element le plus stable correspond a on faible Excès de masse :

Le noyau le plus stable : $^{32}_{16}S$

therme coulombien : Démonstrat° ▷

le Noyau à une forme spherique

$$\rho = \frac{Q}{V} \Rightarrow \rho^2 = \frac{Q^2}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2}$$

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

potentiel electrostatique :

$$V(r) = \frac{Q(r}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

$$V(r) = \frac{r^2 \rho}{3\varepsilon_0}$$

$$dW = V(r)\, dq(r)$$

$$q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$dq = \frac{4}{3}\pi 3 r^2 dr \rho$$

$$dq = 4\pi \rho r^2 dr$$

Donc : $dW = \frac{r^2 \rho}{3\varepsilon_0} \times 4\pi \rho r^2 dr$

$$dW = \frac{4\rho^2\pi}{3\varepsilon_0} r^4 dr$$

$$W = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0} r^4 dr$$

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R$$

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{R^5}{5}$$

$$W = \frac{Q^2}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2} \times \frac{4\pi R^5}{15\varepsilon_0 \times 3}$$

$$W = \frac{9 Q^2 \cancel{R^5}}{4 \times 15\, \varepsilon_0 R}$$

$$W_c = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

4) $\beta(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A}$

$\beta(A,Z') = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z'^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z')^2}{A}$

$\beta(A,Z) - \beta(A,Z') = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_c \frac{Z'^2}{A^{1/3}}$

$- a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_a \frac{(Z-N)^2}{A}$

$\beta(A,Z) - \beta(A,Z') = \frac{a_c}{A^{1/3}} Z'^2 - Z^2$

$$\beta(A,Z) - \beta(A,Z') = a_c \frac{Z'^2 - Z^2}{A^{1/3}}$$

Trouver a_c

On a $w_c = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$w_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 |e|^2}{4\pi \varepsilon_0 R}$

$w_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 |e|^2}{4\pi \varepsilon_0 r_0 A^{1/3}}$

$w_c = \frac{3}{5} \frac{|e|^2}{4\pi \varepsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$

d'où : $a_c = \frac{3}{5} \frac{|e|^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

5) Les noyaux miroirs

Couple ① : ${}^{32}_{14}Si$ / ${}^{32}_{18}Ar$

$\beta(A,Z) - \beta(A-Z') = \frac{3}{5} \frac{|e|^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z'^2 - Z^2}{r A^{1/3}}$

$\beta(A,Z) - \beta(A-Z') = \frac{3}{5} \frac{|e|^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z'^2 - Z^2}{R}$

$\beta(32,14) - \beta(32,18) = \frac{3}{5} \frac{|e|^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{18^2 - 14^2}{R}$

$27,041 \text{ mev} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{137} \times 197 \; \frac{128}{R}$

$27,041 \text{ mev} = \frac{110,435 \text{ Mev.Ferm.}}{R}$

$R = 4,08$ Fermi

Vérification $R = r_0 A^{1/3} \Rightarrow r_0 = \frac{R}{A^{1/3}}$

$r_0 = 1,28$ Fermi

Couple ② $^{32}_{15}P$, $^{32}_{17}Cl$

$\beta(32,15) - \beta(32,17) = 55,217 \times \frac{1}{R}$

$13,63 \text{ mev} = 55,217 \times \frac{1}{R}$

$R = 4,05$

$r_0 = \frac{R}{A^{1/3}} = 1,2$ Fermi