Ridouane KHAFFOU Physique Statistique S5 LIFSAL R_K

①

Faculté des Sciences, Département de Physique, Université Ibn Zohr - Agadir

Examen de Physique Statistique (durée : 2 Heures) Session de rattrapage (Février 2016)
Documents non-autorisés

EXERCICE 1 (6 points)

Considérons une particule libre de masse m qui vibre selon une seule direction (axe x par exemple). Le mouvement de cette particule peut être assimilé à celui d'un oscillateur harmonique à une dimension de raideur k et de pulsation ω.

1) Donner l'expression classique de l'énergie du système
2) Définir l'espace de phase associé au système et préciser sa dimension.
3) Décrire le mouvement au cours du temps du système sachant qu'à $t=0$, $x=x_0$ et $p_x=0$.
4) Donner l'expression de la trajectoire de phase (relation entre $x(t)$ et $p_x(t)$) du système ainsi que sa nature pour une énergie E fixée. Faire un schéma.
5) Calculer le nombre de micro-états classiques accessibles au système dont l'énergie est comprise entre E et $E+\delta E$.
6) Déterminer la densité d'états ρ et conclure.

EXERCICE 2 (7 points)

Considérons une substance formée de N ions paramagnétiques par unité de volume identiques et sans interactions, chacun a un moment magnétique μ. Nous supposons que ce système est en contact avec un réservoir de chaleur à la température T.
Soit **J** le moment cinétique total d'un ion et J le nombre quantique associé. Placés dans une induction magnétique uniforme **B** (0,0,B), les ions peuvent occuper $2J+1$ niveaux d'énergie numérotés par l'indice m qui peut varier de $-J$ à $+J$.

1) Donner l'expression de l'énergie ε_m d'un ion.
2) Quelle est la probabilité P_m pour qu'un ion occupe le niveau m ? En déduire le nombre d'ions N_m dont l'énergie est égale à ε_m.
3) Calculer la fonction de partition z d'un ion.
4) Donner l'expression du moment magnétique moyen $<\mu_z>$ du système. En déduire l'expression de l'aimantation moyenne $<M_z>$.
5) Etudier les cas limites (hautes et faibles valeurs de B) de $<M_z>$.
6) Montrer que pour une induction B faible, $<M_z>$ suit la loi de Curie (dite en 1/T)

EXERCICE 3 (7 points)

Considérons un récipient isolé du milieu extérieur divisé en deux parties, de volumes V_1 et V_2, séparées par une paroi. La première partie contient N_1 atomes d'un gaz parfait monoatomique et la seconde contient N_2 atomes du même gaz. Nous supposons que les deux gaz sont à la même à la température T. Nous retirons par la suite la paroi, le volume accessible devient $V = V_1 + V_2$ et la variation d'entropie vaut : $\Delta S = S - (S_1 + S_2)$
Où S_1 et S_2 sont les entropies initiales des gaz contenus dans les deux parties 1 et 2 du récipient, et S l'entropie du système final (le mélange).

1) Rappeler l'expression de la fonction de partition Z d'un gaz parfait classique supposé canonique.
2) Calculer S_1, S_2, S et ΔS dans les deux cas suivants :
   a) L'indiscernabilité des atomes est ignorée.
   b) L'indiscernabilité des atomes est prise en compte.
3) Que deviennent les expressions de S_1, S_2, S et ΔS si $N_1=N_2$ et $V_1=V_2$. Etudier séparément les deux cas a) et b) de la question 2).

Examen de Physique Statistique
Session de rattrapage (Février 2016)

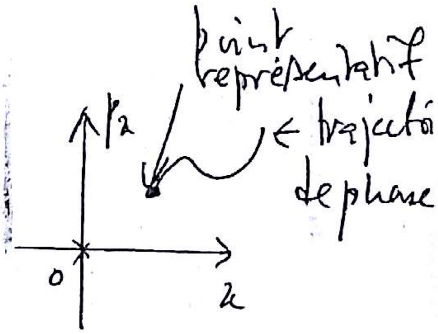
EXERCICE 1 (6 pts)

1/ Expression classique de l'énergie du système :

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2m}p_x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{p_x^2}{2m} \text{ avec}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

2/ Espace de phase (x, p_x), dim = 2 (0,5)



/ Le mouvement de la particule est sinusoïdal :

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $p_x = mV_x = -mA\omega\sin(\omega t + \varphi)$

à $t = 0$, $x = x_0 \Rightarrow A\cos\varphi = x_0$ et $p_x = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\Rightarrow A = x_0$

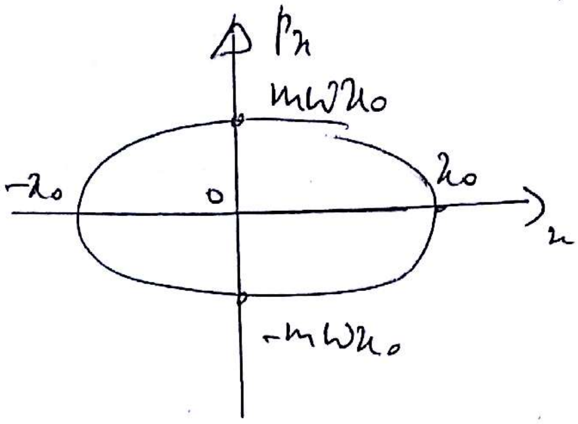
$\Rightarrow x(t) = x_0\cos\omega t$ (0,5) et $p_x = -m\omega x_0\sin\omega t$ (0,5) (1)

L'énergie $E = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2m}\omega^2m^2x_0^2\sin^2\omega t$

$= \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 = \text{Cons}$ (0,5)

D'après (1), on a : $\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{p_x(t)}{m\omega x_0}\right)^2 = 1$ (2)

(2) : Equation d'une ellipse $a = x_0$ et $b = m\omega x_0$ (1)



(0,5)

ii/ Nbre de micro-états accessibles :

$$\Phi(E) = \frac{\pi . ab}{h_0} = \frac{\pi x_0 . m\omega x_0}{h_0} = \frac{2\times\pi m\omega^2 x_0^2 \times \frac{1}{2}}{\omega h_0}$$ (0,5)

$$\Phi(E) = \frac{2\pi}{h_0\omega} E \quad , \quad \Omega(E) = \frac{d\Phi}{dE} = \frac{2\pi}{h_0\omega}\delta E$$ (0,5)

$$\Omega(E) = \rho(E)\,\delta E \Rightarrow \rho(E) = \frac{2\pi}{h_0\omega} = \text{constante}$$ (0,5)

EXERCICE 2 : (7 pts)

1 Expression de l'énergie ε_m :

$$\varepsilon_m = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -mg\mu_B . B$$ (0,5) , $m = -J, \dots, +J$

1/ $P_m = \frac{1}{Z} e^{-\beta\varepsilon_m}$ (1) $= \frac{1}{Z} e^{-mx}$ avec $x = \beta g\mu_B . B$

ou $x = \frac{g\mu_B . B}{kT}$

- Le nbre d'ions N_m : $\frac{N_m}{N} = \frac{1}{Z} e^{-mx}$

$$N_m = \frac{N}{Z} e^{-mx}$$ (0,5)

Fonction de partition :

$$Z = \sum_{m=-J}^{m=+J} e^{-mx} = e^{Jx} \cdot \frac{1-e^{-(2J+1)x}}{1-e^{-x}} =$$

$$Z = \frac{\mathrm{sh}\,(J+\frac{1}{2})x}{\mathrm{sh}\,(\frac{x}{2})} \quad (1)$$

4/ moment magnétique moyen :

$$\langle \mu_z \rangle = g\mu_B \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial x} = g\mu_B \left[(J+\tfrac{1}{2}) \coth (J+\tfrac{1}{2})x - \tfrac{1}{2} \coth (\tfrac{x}{2}) \right] \quad (1)$$

$$\langle M_z \rangle = N \langle \mu_z \rangle = N g\mu_B \left[(J+\tfrac{1}{2}) \coth (J+\tfrac{1}{2})x - \tfrac{1}{2} \coth (\tfrac{x}{2}) \right] \quad (0{,}5)$$

5/ Cas limites :

a) B élevé $\Rightarrow x \gg 1 \Rightarrow \coth(\frac{x}{2}) \to 1$ et

$\coth (J+\frac{1}{2})x \to 1 \Rightarrow \langle M_z \rangle \simeq N g \mu_B J$ (aimantation saturée) (1)

b) B faible $\Rightarrow x \ll 1 \Rightarrow$

$\coth x \simeq \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \Rightarrow \langle M_z \rangle \simeq N g\mu_B \frac{J(J+1)x}{3}$ (1)

$$= N g^2 \mu_B^2 \cdot \frac{J(J+1)}{3kT} \cdot B = C \cdot \frac{B}{T} \text{ où}$$

C = constante de Curie

6/ D'après 5/b) on a $\langle M_z \rangle \simeq C \cdot \frac{B}{T}$ loi en $\frac{1}{T}$ (dite loi de Curie) avec $C = N g^2 \mu_B^2 \frac{J(J+1)}{3k}$. (0,5)

Exercice 3 : (4)

1/ Fonction de partition Z d'un gaz parfait classique

a) Cas discernable :

$$Z = \frac{V^N}{h_0^{3N}} \left(2\pi m kT\right)^{3N/2} \quad (0,5)$$

b) Cas indiscernable :

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h_0^{3N}} \left(2\pi m kT\right)^{3N/2} \quad (0,5)$$

2/ $S = k[\ln Z + \beta \bar{E}]$ (0,5)

Donc $S_1 = k[\ln Z_1 + \beta \bar{E}_1]$ et $S_2 = k[\ln Z_2 + \beta \bar{E}_2]$

a) Atomes discernables.

$S_1 = N_1 k[\ln V_1 + \frac{3}{2} \ln T + \sigma]$ avec

$$\sigma = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi m k}{h_0^2}\right) + \frac{3}{2} \quad (0,5)$$

$$S_2 = N_2 k[\ln V_2 + \frac{3}{2} \ln T + \sigma] \quad (0,5)$$

$$S = (N_1+N_2) k[\ln(V_1+V_2) + \frac{3}{2} \ln T + \sigma] \quad (0,5)$$

$S = S - (S_1+S_2) = (N_1+N_2) k \ln(V_1+V_2) - N_1 k \ln V_1 -$

(1) $N_2 k \ln V_2 \neq 0$ (En contradiction avec la thermodynamique classique)

0,5pt

2) Atomes indiscernables.

(p.5)

$$S_1 = kN_1\left[\ln\frac{V_1}{N_1} + \frac{3}{2}\ln T + \sigma_0\right]$$ avec

$$\sigma_0 = \sigma + 1 = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi m k}{h_0^2}\right) + \frac{5}{2}$$ (0,1)

$$S_2 = kN_2\left[\ln\frac{V_2}{N_2} + \frac{3}{2}\ln T + \sigma_0\right]$$ (0,1)

$$S = k(N_1+N_2)\left[\ln\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2} + \frac{3}{2}\ln T + \sigma_0\right]$$ (0,1)

3/ Si $N_1 = N_2$ et $V_1 = V_2$

Cas a/ $S_1 = S_2$ mais $\Delta S = S - (S_1+S_2)$

$= S - 2S_1 = \underline{2N_1 k\ln 2} \neq 0$ (0,1)

Cas b/ $S_1 = S_2$ mais $\Delta S = S - (S_1+S_2)$

$= S - 2S_1 = 0$ (0,1) (Résultat en accord avec la thermodynamique)

<u>Conclusion</u>: Pour calculer S, on doit tenir compte du facteur <u>indiscernabilité</u> $N!$

$\Rightarrow$ C'est le <u>Paradoxe de Gibbs</u> (0,1)