Département de Physique
Faculté des Sciences / Université Ibn Zohr/Agadir **Février 2015**

Examen de Physique Statistique
Durée : 1 Heure 30' / Documentation non autorisée

EXERCICE (8 points) : Identiques (distingués)

On se propose d'étudier les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait formé de N atomes identiques indiscernables de masse m chacun et enfermés dans un récipient de volume V en équilibre avec un thermostat à la température T.

1) Quelle est l'expression de l'énergie totale E du gaz.
1) Déterminer l'expression de la fonction de partition Z du gaz en utilisant un traitement semi-classique.
2) Déterminer l'expression de la pression moyenne P du gaz. En déduire l'équation d'état du gaz parfait.
3) Déterminer l'expression de l'énergie moyenne <E> et celle de l'enthalpie H du gaz. Conclure.
4) En déduire les expressions des capacités calorifiques à volume constant C_v et à pression constante C_p. En déduire $C_p - C_v$. Conclure.
5) Déterminer l'expression de l'entropie S du gaz.

$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$

PROBLEME (12 points) :

A- Considérons un oscillateur harmonique à une dimension en équilibre avec un réservoir de chaleur à la température T.
Dans une description classique, le mouvement (vibration) de cet oscillateur dans une direction (l'axe des x par exemple), est repéré par sa position x et par son impulsion p_x.
1) Donner l'expression de l'énergie E de cet oscillateur.
2) On suppose que les conditions de validité du théorème d'équipartition de l'énergie sont vérifiées, calculer l'énergie moyenne <E> de cet oscillateur.

B- On suppose maintenant que l'énergie associée au mouvement de l'oscillateur harmonique à une dimension est quantifiée.
1) Ecrire l'expression de l'énergie E de cet oscillateur.
2) Calculer sa fonction de partition Z.
3) Calculer son énergie moyenne <E>.
4) Etudier <E> dans les cas limites suivants :
   a) $\hbar.\omega \ll K.T$
   b) $\hbar.\omega \gg K.T$
5) Calculer le nombre moyen <n> d'occupation du niveau d'énergie E_n.

C- Dans le modèle d'Einstein, on admet que le mouvement dans une direction d'un atome appartenant à un solide peut, en première approximation, être assimilé à celui d'un oscillateur harmonique à une dimension.
L'atome peut vibrer dans trois directions indépendantes.
On admet aussi que tous les atomes vibrent avec la même pulsation ω et que les interactions entre ces atomes sont négligeables.
Soit N, le nombre d'atomes du solide considéré.
1) Calculer l'énergie moyenne $\langle E_{solide} \rangle$ associée aux vibrations des différents atomes du solide.
2) Calculer l'énergie libre F du solide. En déduire l'entropie S.
3) Calculer la capacité calorifique C_v du solide et l'écrire en fonction du rapport θ_E/T où θ_E est la température d'Einstein caractéristique du solide considéré. Déterminer θ_E.
4) Donner l'expression de C_v dans les cas limites suivants :
   a) $T \gg \theta_E$;
   b) $T \ll \theta_E$.
5) Donner la représentation graphique de C_v en fonction du rapport T/θ_E.

Correction d'examen de Physique Statistique Février 2015.

Exercice :

1) $E = E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i^2}{2m}$ or $P_i^2 = P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + P_{iz}^2$

2) $Z = \frac{z_{at}^N}{N!}$

$$z_{at} = \frac{1}{h^3} \int_{\{\vec{p},\vec{q}\}} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} d\vec{p}\, d\vec{q}.$$

$$= \frac{V}{h^3} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta P_x^2}{2m}} dP_x \right)^3 = \frac{V}{h^3} \left(\frac{\pi \cdot 2m}{\beta} \right)^{3/2}.$$

Rappel : $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$

$$\longrightarrow Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3} \right)^N \left(\frac{\pi \cdot 2m}{\beta} \right)^{3N/2}$$

3) $\bar{P} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}\Big|_\beta = \frac{1}{\beta} \frac{N}{V}$

$\longrightarrow \bar{P}V = NkT = nRT$ (loi des Gaz parfait).

4) $\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} = \frac{3}{2} NkT = N\bar{\varepsilon}$.

$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT =$ Energie moyenne d'un atome.

$$H = U + PV = \langle E \rangle + \bar{P}V$$

$$= \frac{3}{2} NkT + NkT = \frac{5}{2} NkT.$$

$\bar{E}$ et $\bar{H}$ ne dépendant que de T (1ère et 2ème loi de Joule)

5) $$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V = \frac{3}{2} Nk = \frac{3}{2} nR.$$

$$C_P = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P = \frac{5}{2} Nk = \frac{5}{2} nR.$$

$$C_P - C_V = \frac{nR}{2}(5-3) = nR$$ (loi de Mayer).

6) $$S = k(\ln Z + \beta \bar{E}).$$

$$= Nk\left[\ln V - \frac{3}{2}\ln\beta + \ln\bar{E} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right) + \frac{3}{2}\right]$$

$$S = Nk\left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + 0\right).$$

<u>Problème :</u>

A) 1) $$E = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$; k = cte de raideur.

2) A hautes T^e (limite classique)

le théorème d'équipartition de l'énergie donne :

$$\bar{E}_{os} = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT.$$

k = cte de Boltzmann.

B) 1) $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$; $n \in \mathbb{N}$.

$n=0 \rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ niveau fondamental.

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

2) $$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega}$$

$$= e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta n\hbar\omega}.$$

$$Z = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \times \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}.$$

3) $$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}.$$

4) a) $\hbar\omega \ll kT \rightarrow \langle E\rangle \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\beta\hbar\omega} \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + kT \simeq kT$

b) $\hbar\omega \gg kT \rightarrow \langle E\rangle \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}} \simeq \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + e^{-\beta\hbar\omega}\right)$

$\langle E\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} = E_0$.

5) $\overline{E_n} = (\bar{n}+1/2)\hbar\omega \longrightarrow \bar{n} = \frac{\overline{E_n}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \simeq \frac{\langle E\rangle}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}.$$

C) 1) $\langle E_{solide}\rangle \simeq 3N\langle E_{vib}\rangle$; $3N$ = nbre total de vibrations.

$$\langle E_{solide} \rangle \simeq 3N\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right].$$

2) $$F = -kT \ln Z^{3N} = -kT \ln\left(e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \times \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)^{3N}$$

$$F = F(T,V) = 3N\frac{\hbar\omega}{2} + 3NkT \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V = -3kN \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$- \frac{3NkT\, e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\hbar\omega \times \frac{\partial \beta}{\partial T}\Big|_V.$$

$$S = -3Nk \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) + \frac{3N}{T} \times \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}.$$

Rq : $E = F + TS$.

3) $$c_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\Big|_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial T}\Big|_V = -\frac{1}{kT^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta}\Big|_V.$$

$$C_V = -\frac{3N\hbar\omega}{kT^2}\left[-\frac{e^{\beta\hbar\omega} \times \hbar\omega}{\left(e^{\beta\hbar\omega}-1\right)^2}\right].$$

$$C_V = 3nR\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{\left(e^{\theta_E/T}-1\right)^2}.$$

avec $\beta\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{k \cdot T} = \frac{\theta_E}{T} \longrightarrow \boxed{\theta_E = \frac{\hbar\omega}{k}}$

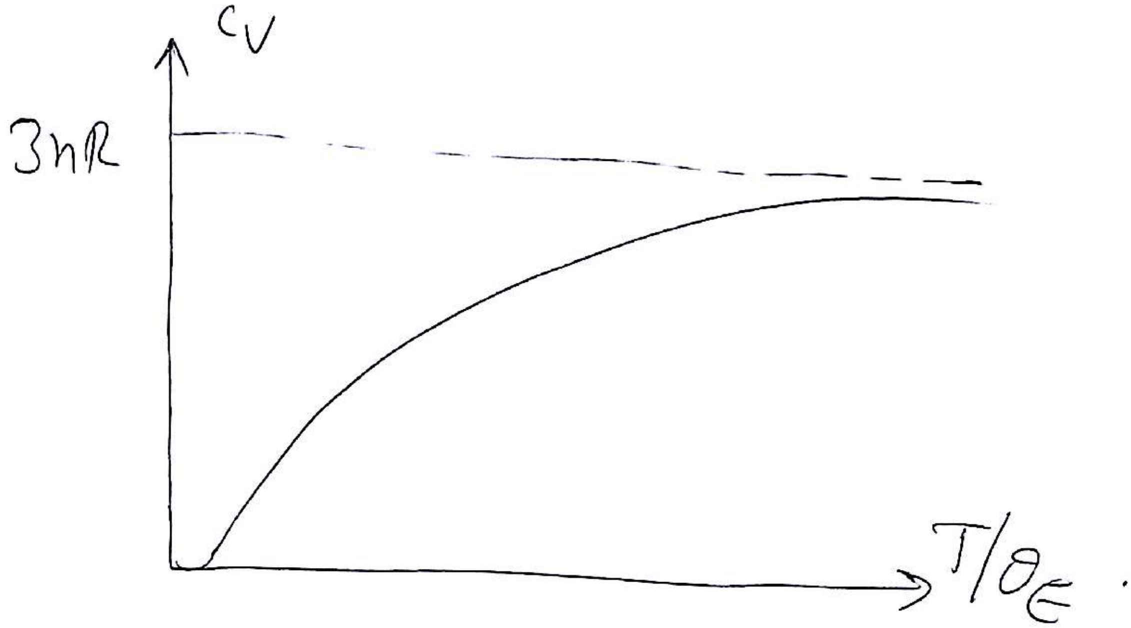
Si $n = 1 \longrightarrow C_V = c_V = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \times \frac{e^{\theta_E/T}}{\left(e^{\theta_E/T}-1\right)}$

$R = N_a \cdot k.$

4) a) si $T \gg \theta_E$: $C_V \simeq 3nR.$

b) si $T \ll \theta_E$: $C_V \simeq 3nR\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\theta_E/T} \longrightarrow 0.$

5)



Département de Physique
Faculté des Sciences
Université Ibn Zohr
Agadir

Juin 2012

Epreuve de Physique Statistique
(Durée : 1 Heure 30')

NB : l'utilisation des calculatrices et des téléphones portables est strictement interdite

EXERCICE 1 (4 points) :

1) Enoncer et démontrer le théorème d'équipartition de l'énergie.
2) Faire une description quantique d'une particule libre placée dans une boîte cubique.

$E = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ $E = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}$

$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$

EXERCICE 2 (8 points) :

On se propose d'étudier les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait formé de N atomes identiques de masse m chacun et enfermés dans un récipient de volume V à une température T. Le système est mis en contact avec un réservoir de chaleur.

$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m}$

Dans un premier temps les atomes sont supposés **discernables.**

1) Quelle est l'expression de l'énergie totale E du gaz.
1) Déterminer l'expression de la fonction de partition Z du gaz en utilisant un traitement semi-classique.
2) Déterminer l'expression de la pression moyenne P. En déduire l'équation d'état du gaz parfait.
3) Etablir l'expression de l'énergie moyenne <E> du gaz. Comparer ce résultat avec celui obtenu à l'aide du théorème d'équipartition de l'énergie et Conclure
4) Déterminer l'expression de l'énergie libre F.
5) En déduire les expressions des capacités calorifiques à volume constant C_v et à pression constante C_p.
6) Calculer l'entropie S du gaz.

Supposons maintenant que les atomes du gaz sont **indiscernables** (paradox de Gibbs)

7) Etablir les nouvelles expressions de Z, E et S. Conclure.

$E = \frac{3}{2} N R$

EXERCICE 3 (8 points) :

Considérons un solide formé de N atomes identiques sans interaction et en équilibre thermique avec un thermostat. Dans le modèle d'Einstein, chaque atome est assimilé à 3 oscillateurs harmoniques quantiques, identiques et indépendants. Chacun de ces oscillateurs est caractérisé par sa direction de vibration.

1) Rappeler l'expression de l'énergie d'un oscillateur harmonique quantique à 1 dimension.
2) Donner l'expression de la fonction de partition z_{osc} de cet oscillateur.
3) En déduire celle de la fonction de partition Z_{sol} du solide.
4) Quelle est l'expression de l'énergie moyenne <E> du solide ?
5) En déduire l'expression de la capacité calorifique molaire à volume constant C_v. Donner son expression en fonction de la température caractéristique d'Einstein Θ_E.

6) Etudier les cas limites du C_v et faire une représentation graphique. Comparer les résultats théoriques obtenus avec ceux empiriques (Loi de Dulong et Petit).

7

Correction de Physique Statistique

SMP5 - Juin 2012.

Exercice 1 :

1) L'énergie moyenne d'un système dont l'énergie totale est la somme des carrés des composants de l'impulsion ou des coordonnés est égale à $\frac{1}{2}kT$ fois le nombre de ces termes quadratiques.

Exercice 2 :

1) $N = N\mathcal{E}. \longrightarrow \mathcal{E} = \dfrac{P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2}{2m} = \dfrac{N(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)}{2m}$

2) $Z = (z)^n.$

$$Z = \frac{1}{h^3}\int dx\,dy\,dz \iiint e^{-\frac{\beta}{2m}(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)}\,dP_x\,dP_y\,dP_z$$

$$= \frac{V}{h^3}\int e^{-\frac{\beta P_X^2}{2m}}dP_x \int e^{-\frac{\beta P_Y^2}{2m}}dP_y \int e^{-\frac{\beta P_Z^2}{2m}}dP_z$$

$$= \frac{V}{h^3}\left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\right)^3$$

or $P_X = P_Y = P_Z$ et $\int e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

alors $\boxed{Z = \left[\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right]^N}$

3) $P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$

$$\ln Z = N \ln \left[\frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right].$$

$$= N \ln \frac{V}{h^3} + N \ln \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}.$$

$$= N \ln \frac{V}{h^3} + \frac{3N}{2} \ln(2\pi m) - \frac{3}{2} N \ln |\beta|.$$

$$= N \ln V - N \ln (h^3) + \frac{3N}{2} \ln(2\pi m) - \frac{3}{2} N \ln |\beta|$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{N}{V} \quad \text{et } k_B T = \frac{1}{\beta}.$$

$$P = k_B T . \frac{N}{V} \quad \text{et } N k_B = nR.$$

$$P = \frac{nRT}{V} \longrightarrow \boxed{PV = nRT}.$$

4) $\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\left[-\frac{3}{2\beta} N \right] = \frac{3}{2} nRT.$

$$\langle E \rangle = 3N \times \frac{1}{2} k_B T. = \frac{3}{2} N k_B T. = \frac{3}{2} nRT.$$

5) $F = \langle E \rangle - TS.$

$$= \langle E \rangle - T \left[k_B \ln Z + \frac{\langle E \rangle}{T} \right] = -T k_B \ln Z$$

$$F = -k_B T \left[N \ln \left(\frac{V}{h^3} \right) + \frac{3}{2} N \ln \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right) \right].$$

6) $C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{3}{2} nR$

$$C_P = \frac{\partial H}{\partial T} \rightarrow H = \langle E \rangle + PV = \frac{3}{2} nRT + nRT = \frac{5}{2} nRT$$

$$C_P = 5/2 \, nR.$$

7) $S = k_B \ln Z + \frac{\langle E \rangle}{T}$.

$$= k_B \left[N \ln\left(\frac{V}{h^3}\right) + \frac{3}{2} N \ln\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)\right] + \frac{3}{2} N k_B .$$

8) $$Z_{ind} = \frac{(z_{atome})^N}{N!} = \frac{\left[V/h^3 \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right]^N}{N!}$$

$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} nRT . \Rightarrow \langle E \rangle_{dis} = \langle E \rangle_{ind}$$

$$\langle S \rangle = k_B \ln Z + \frac{\langle E \rangle}{T} .$$

$$= k_B \left[N \ln\left(\frac{V}{h^3}\right) + \frac{3}{2} N \ln\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right) - N \ln N + N \right] + \frac{3}{2} n$$

$$\longrightarrow \boxed{\langle E \rangle_{dis} = \langle E \rangle_{ind}} .$$

<u>Ex3</u>;

1) $E_n = \hbar w (n + 1/2)$

si $n = 0 \longrightarrow E_0 = \frac{\hbar w}{2}$.

2) $$Z_{os} = \sum_{\forall n} e^{-\beta E_n} = \sum_{\forall n} e^{-\frac{\beta \hbar w}{2}} . e^{-\beta \hbar w n} .$$

$$= e^{-\frac{\beta \hbar w}{2}} \left[1 + e^{-\beta \hbar w} + e^{-2\beta \hbar w} + \dots \right] .$$

$$Z_{os} = e^{-\frac{\beta \hbar w}{2}} \frac{1 - \left(e^{-\beta \hbar w}\right)^{n+1}}{1 - e^{-\beta \hbar w}}$$

$$= e^{-\frac{\beta \hbar w}{2}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar w}} .$$

3) $Z_{Sd} = 3N Z_{osc}$.

4) $$\langle E \rangle_{os} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}.$$

$$\ln Z = -\left[\frac{\beta \hbar \omega}{2} - \ln\left(1 - e^{-\beta \hbar \omega}\right)\right].$$

$$\langle E \rangle_{os} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}.$$

$$\langle E \rangle_{os} = \hbar \omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right].$$

$$\langle E \rangle_{Sd} = \sum_{i=1}^{3N} E_{os} = 3N E_{os}.$$

$$= 3N \hbar \omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right].$$

5) $$C_V = \frac{\partial E_{So}}{\partial T}\Big|_V \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

$$d\beta = - \frac{dT}{k_B T^2}.$$

$$C_V = \frac{\partial E_{os}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T}\Big|_V \rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial T}\Big| = -\frac{1}{k_B T^2}.$$

$$C_V = -\frac{1}{k_\cdot T^2} \frac{\partial E_{Sd}}{\partial \beta}\Big|_V.$$

on pose $\theta_E = \frac{\hbar \omega}{2}$.

$$C_V = 3nR \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_E / T}}{\left(e^{\theta_E / T} - 1\right)^2}. \quad \text{or } \frac{\theta_E}{T} = \beta \hbar \omega.$$

6) $kT \gg 1 \longrightarrow \beta \ll 1$.

$e^{x} - 1 \simeq x$.

$e^{\beta\hbar w} - 1 = \beta\hbar w$.

$$E_{os} = \hbar w\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar w}\right] \simeq \hbar w \cdot \frac{1}{\beta\hbar w}.$$

$$= \frac{1}{\beta} = k_B T..$$

si $kT \ll 0 \longrightarrow \hbar w\beta \gg 1$.

$$E_{os} = \hbar w\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar w}}\right)$$

$$= \hbar w\left[\frac{1}{2} + e^{-\beta\hbar w}\right].$$

$$E_{os} = \frac{\hbar w}{2} \neq 0$$

Faculté des Sciences
Département de Physique
Université Ibn Zohr - Agadir

Examen de Physique Statistique (durée : 1H 30)
Session de rattrapage : Juin 2014

EXERCICE 1 (7 points)

On se propose d'étudier les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait formé de N atomes identiques de masse m chacun et enfermés dans un récipient de volume V à une température T.

1) Quelle est l'expression de l'énergie ε d'un atome supposé libre ?
1) Calculer la fonction de partition Z du gaz en utilisant un traitement semi-classique.
2) Calculer la pression P du gaz. En déduire l'équation d'état du gaz.
3) Calculer l'énergie moyenne E et l'enthalpie H du gaz. Montrer que E et H vérifient les lois de Joule pour un gaz parfait.
4) Calculer la capacité calorifique du gaz à volume constant : C_v.
5) Calculer l'entropie S du gaz.

EXERCICE 2 (6 points)

1) Rappeler l'expression des niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique à un degré de liberté

$E =$ [illegible]

Cet oscillateur est supposé en équilibre avec un thermostat à la température T.

(1 dimension) (suivant un axe)

2) Calculer la fonction de partition canonique Z du système
3) Calculer l'énergie moyenne E de l'oscillateur
4) Etudier les cas limites extrêmes $kT >> \hbar\omega$ et $kT << \hbar\omega$.
5) Tracer l'évolution de E en fonction de T.
6) Quelle est la valeur de l'énergie moyenne prédite par le théorème d'équipartition de l'énergie ?

EXERCICE 3 (7 points)

Considérons un système paramagnétique parfait formé de N atomes identiques par unité de volume. Supposons que ce système est en contact avec un réservoir de chaleur ayant une température T. $E_+ = -\mu H$, $E_- = +\mu H$

Ce système est placé dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique H (dirigé selon la direction z, prise comme direction vers le haut). Chaque atome a un moment magnétique μ tel que $\mu = g\,\mu\,J$ où $\hbar J$ représente le moment angulaire de l'atome.

1) Donner l'expression de l'énergie d'un atome.
2) Calculer la fonction de partition z de chaque atome.
3) Calculer le moment magnétique moyen μ de l'atome.
4) Calculer l'aimantation moyenne M du système.
5) Etudier les cas limites (valeurs faibles et valeurs élevées de H).
6) Montrer que la susceptibilité magnétique χ suit la loi en 1/T. Qu'appelle t-on cette loi ?

Correction de physique Statistique.

Session de rattrapage Juin 2014.

Exercice 1 :

1) l'atome est supposé libre $\to E_p = 0$.

$$E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m}.$$

2) $Z_{Gaz} = \left(Z_{Atome}\right)^N$

$$Z_{atome} = \frac{V}{h^3}\int e^{-\frac{\beta P_x^2}{2m}} dP_x \int e^{-\frac{\beta P_y^2}{2m}} dP_y \int e^{-\frac{\beta P_z^2}{2m}} dP_z$$

$$Z_{atome} = \frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}.$$

$$\longrightarrow Z_{Gaz} = \left[\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right]^N.$$

3) $\bar{P} = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial \ln(Z)}{\partial V}$

$$\frac{\partial \ln|Z|}{\partial V} = \frac{N}{V} \longrightarrow P = \frac{Nk_BT}{V} = \frac{nRT}{V}.$$

4) $\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} nRT.$

a) $H = \langle E\rangle + PV = \frac{3}{2} nRT + nRT = \frac{5}{2} nRT.$

Gaz diatomique : $\langle E\rangle = \frac{3}{2} nRT$ et $H = \frac{5}{2} nRT$.

E et H vérifiant les lois de Joule.

5) $C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} m R$.

6) $S = k_B \cdot \ln Z + \frac{\bar{E}}{T}$.

$= k_B \cdot \left[N \ln \frac{V}{h^3} + \frac{3N}{2} \ln\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)\right] + \frac{3}{2} N k_B$.

Exercice 2 :

1) $E = \frac{P_x^2}{2m}$ et $P = \hbar k$.

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ avec $k = \pm n \frac{\pi}{L}$.

$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \longrightarrow n^2 = \frac{2mEL^2}{\hbar^2 \pi^2}$

$\phi = n = \frac{L}{\hbar \pi} \sqrt{2mE}$.

2) $Z = \frac{1}{h} \int e^{\frac{-\beta P^2}{2m}} dP = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}$.

$Z = \frac{1}{h} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}$

3) $\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

$\ln Z = \ln\left(\frac{1}{h}\right) + \ln\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}$

$= \ln\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{1}{2} \ln(2\pi m) - \frac{1}{2} \ln |\beta|$.

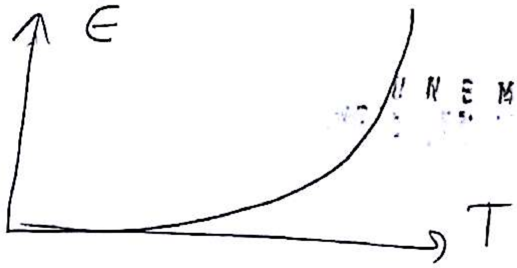
$\Rightarrow \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2} k_B T$.

15

$$\longrightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{1}{2} k_B T}.$$

4) $\lim\limits_{T \to 0} \bar{E} = 0 \longrightarrow \lim\limits_{T \to +\infty} \bar{E} = +\infty.$

5)



6) $\bar{E} = \frac{1}{2} k_B T$

Exercice 3.

1) $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{H}$ $\quad E \begin{cases} \text{si } \downarrow \mu_- \to E_- = \mu H. \\ \text{si } \uparrow \mu_+ \to E_+ = -\mu H \end{cases}$

2) $P(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E}.$

$$\sum P(E) = 1 = \frac{1}{Z} \sum e^{-\beta E}.$$

$$Z = \sum e^{-\beta E} = e^{\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H}.$$

3) $\bar{\mu} = \sum \mu_i \frac{e^{-\beta \mu_i}}{Z} = \sum \mu_i P(\mu_i)$

$$= \mu_+ P(\mu_+) + \mu_- P(\mu_-).$$

$$= \mu_+ \frac{e^{\beta \mu H}}{Z} + \mu_- \frac{e^{-\beta \mu H}}{Z}$$

$$= \frac{\mu_+ e^{\beta \mu H} + \mu_- e^{-\beta \mu H}}{e^{\mu \beta H} + e^{-\beta \mu H}}. \quad \text{si } \boxed{\mu_- = \mu_+}$$

AC

$$\bar{\mu} = \mu_+ \frac{e^{\mu\beta H} - e^{-\mu\beta H}}{e^{\mu\beta H} + e^{-\beta\mu H}} = \mu_+ \frac{\cosh(\beta\mu H)}{\sinh(\beta\mu H)}$$

$$= \mu_+ \, \mathrm{th}(\beta\mu H) = \mu_+ \, \mathrm{th}\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right).$$

4) $$\bar{M} = N\bar{\mu} = N\mu_+ \frac{e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}}.$$

$$= N\mu_+ \frac{e^{\frac{\mu H}{k_B T}} - e^{-\frac{\mu H}{k_B T}}}{e^{\frac{\mu H}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu H}{k_B T}}}$$

5) a) $k_B T \gg \mu H \longrightarrow \dfrac{\mu H}{k_B T} \longrightarrow 0.$

$$\begin{cases} e^{\frac{\mu H}{k_B T}} \sim 1 + \dfrac{\mu H}{k_B T}. \\ e^{-\frac{\mu H}{k_B T}} \sim 1 - \dfrac{\mu H}{k_B T}. \end{cases}$$

$$\bar{M} = N\mu \frac{\mu H}{k_B T} = \frac{N \mu^2 H}{k_B T}.$$

si $k_B T \ll \mu H \longrightarrow \dfrac{\mu H}{k_B T} \longrightarrow \infty.$

$$\bar{M} = N\mu.$$

b) si T élevé

$$\bar{M} = \chi H = \frac{N\mu^2}{k_B T} H. \longrightarrow \chi = \frac{N\mu^2}{k_B T}$$

$\chi = \dfrac{C}{T}$ avec $C = \dfrac{N\mu^2}{k_B}.$