

Rattrapage de physique Statistique

Nom :

Prénom :

Code apogé :

Questions de cours 6 pts

1- Rappeler la définition d'un état accessible. En donner un exemple.

C'est l'ensemble des états accessibles d'un système à l'équilibre thermodynamique.
et l'impulsion $\Gamma = (\vec{q}, \vec{p}) = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$

2- Donner l'expression de l'élément de volume de l'espace des phases, de

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^N dq_i dp_i = \frac{1}{h^{3N}} \prod_{i=1}^N dq_i dp_i$$

$\eta(N) = \frac{1}{h^{3N}}$ si les particules sont indistinguables

3- Quelles différences y-a-t-il entre l'ensemble canonique l'ensemble grand canonique et

l'ensemble isobare isotherme?

Ensemble canonique système en contact avec une source de chaleur.
Toutes les grandeurs $(N, V, \dots)$ sont connues exactement et l'énergie en moyenne :

$$P = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$$

E. G. & système en contact avec une source de chaleur T et un réservoir de particules N et E sont connues en moyenne :

$$P = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta H - \lambda_N N}$$

E. Isobare isotherme l'énergie et le volume sont connus en moyenne :

$$P = \frac{1}{\Omega} e^{-\beta H - \lambda_V V}$$

Exercice 1 (7pts)

On considère une particule de masse m libre de se déplacer à l'intérieur d'une boîte de volume $V = L_x L_y L_z$, où $L_x = L_y = L_z$.

Les niveaux d'énergie de la particule sont données par :

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$$

1- Calculer le nombre $\Phi(E)$ d'états d'énergie inférieur à E .

Nbre d'états $\Phi(E) : E \leq E$ (E fixé)

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \Rightarrow n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{2mL^2}{\hbar^2 \pi^2} E = R^2$$

$n_x, n_y, n_z \geq 0 \Rightarrow \Phi(E) = \frac{1}{8}$ d'une sphère de rayon R .

$$\Phi(E) = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} R^3 \text{ avec } R = \frac{L}{\hbar \pi} \sqrt{2mE}$$

2- Calculer le nombre d'états accessibles $\Omega(E)$ dont l'énergie est compris entre E et $E + \delta E$.

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{d\Phi}{dE} \delta E = \frac{d}{dE} \left(\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \frac{L^3}{\hbar^3 \pi^3} \sqrt{2mE}^3 \right) \delta E \quad (L^3 = V) \\ &= \frac{V(2m)^{3/2}}{6\hbar^3 \pi^2} \cdot \frac{3}{2} E^{1/2} \delta E = \frac{mV}{2\hbar^3 \pi^2} \sqrt{2mE} \delta E \end{aligned}$$

3- En déduire la densité d'états $\rho(E)$.

$$\rho(E) = \frac{mV}{2\hbar^3 \pi^2} \sqrt{2mE}$$

Exercice 2 (7pts)

On s'intéresse à un système en équilibre avec un thermostat à la température T et un réservoir de particule de potentiel chimique μ .

Le système est un gaz parfait monoatomique de N atomes.

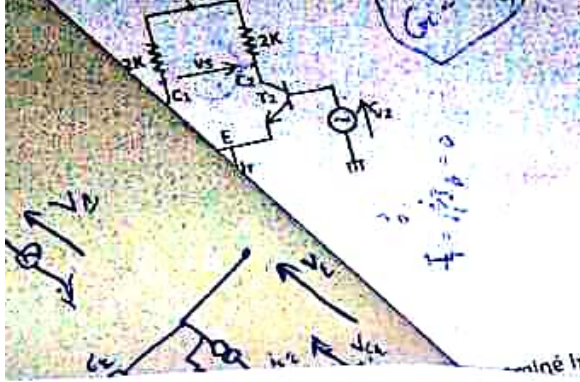
Le système est dans un récepteur de volume V découpé en petits cube de volume v .

Chaque petit cube peut contenir au plus une particule (c'est-à-dire 0 ou 1 particule).

1- Calculer la fonction de partition Z d'un petit cube. En déduire celle de tout le système.

$$Z_i = \sum_{0,1} e^{-\beta(\epsilon_i - \mu) n_k} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$$

$$Z = \prod_i Z_i = \prod_i (1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)})$$



SM

$$Z = \frac{1}{N_1} \prod_{i=1}^N z_i \quad (\text{aussi valable})$$

- 2- Calculer le nombre moyen N_i de particule dans un cube et donner sans faire de calcul l'expression du nombre total moyen de particule.

$$N_i = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log z_i}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log (1 + e^{-\beta(E_i - \mu)})}{\partial \mu}$$

$$= \frac{1}{1 + e^{\beta(E_i - \mu)}}$$

$$N = \sum_i N_i = \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(E_i - \mu)}}$$

- 3- Donner l'expression du grand potentiel J

$$J = -k_B T \log Z = -k_B T \log \prod_i z_i = -k_B T \sum_i \log z_i$$

$$= -k_B T \sum_i \log (1 + e^{-\beta(E_i - \mu)})$$

NB : il n'y a pas d'intégration ~~sur~~ cet exercice

Questions de cours : 4pts

On considère un système A constitué de deux sous systèmes A_1 et A_2 .
Le système A_1 a la probabilité $P_r^{(1)}$ d'accéder au micro état r ; le système A_2 a la probabilité $P_s^{(2)}$ d'accéder au micro état s .
Pour le système total A , le micro état considéré est caractérisé par le couple d'indices (r, s) et la probabilité $P_{r,s}$ qui est la probabilité pour le système A d'accéder au micro état (r, s) .

1 - a) Donner l'entropie des systèmes A_1 et A_2 en fonction respectivement de $P_r^{(1)}$ et de $P_s^{(2)}$ et de la constante de Boltzmann.

1 - b) Donner l'entropie du système A en fonction de $P_{r,s}$.

2 - Montrer que si les systèmes A_1 et A_2 sont statistiquement indépendants, alors $S = S_1 + S_2$.

3 - On suppose que les systèmes A_1 et A_2 ne sont pas statistiquement indépendants.

Sachant que dans ce cas $P_r^{(1)} = \sum_s P_{r,s}$ et $P_s^{(2)} = \sum_r P_{r,s}$

a) Exprimer les conditions de normalisation des probabilités $P_r^{(1)}$ et $P_s^{(2)}$ à partir des $P_{r,s}$

b) Déduire que :

$$S - (S_1 + S_2) = k \sum_{r,s} P_{r,s} \log \frac{P_r^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{r,s}}$$

c) Sachant que la fonction $\log x$ admet une tangente en $x=1$, donc on a l'inégalité $\log x \leq x-1$ et en utilisant les conditions de normalisation des probabilités, montrer que $S \leq S_1 + S_2$.

d) A quoi correspond l'égalité? Quelles sont les conséquences sur l'entropie de la présence de corrélations entre les deux systèmes.

Problème I : 6pts

Soit un système formé de N particules libres sans interactions mutuelles qui se déplacent sur l'axe $\vec{x}$ entre deux murs réfléchissants situés entre $x=0$ et $x=L$.
Chaque particule "i" est caractérisée par sa position x_i et sa quantité de mouvement p_i .
Toutes les particules ont la même masse " m ". Elles sont discernables, leur mouvement est traité de manière classique.

1 - Donner l'expression de l'énergie totale E_{tot} du système.
En déduire une relation simple qui lie la somme des P_i^2 à l'énergie totale E_{tot} .

2 - a) Donner en le justifiant la dimension de l'espace de phase d'une particule.

2 - b) Définir l'espace de phase total associé au problème. Quelle est sa dimension.

3 - Evaluer $\Phi(E)$, nombre de micro-états dont l'énergie est inférieure à E_{tot} , pour un nombre de particules $N=3$.

① 4- Calculer pour $N=3$ $\Omega(E)$, nombre de micro-états du système dont l'énergie est comprise entre E et $E + \delta E$.

5- Donner $\Omega(E_{tot})$ dans les cas suivants:

- Les trois particules sont de spin zéro.
- Les trois particules sont de spin $1/2$.
- Comparer les deux résultats.

Problème II :

On considère un système quantique de N particules identiques indépendantes et discernables.

Partie I:

On suppose dans un premier temps que chaque particule occupe l'un des deux niveaux d'énergie $-e_0$ ou e_0 .

1- Si le nombre de particules dans l'état d'énergie $(-e_0)$ est N_- ; le nombre de particules dans l'état d'énergie e_0 est N_+ . Donner l'expression de l'énergie totale E en fonction de N_- ; N_+ et e_0 . Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme $E = M e_0$.

2- Exprimer les nombres de particules N_+ et N_- en fonction de N et de M .

3-a) Déterminer le nombre de façons de placer N_- particules parmi les N particules dans l'état d'énergie $(-e_0)$.

1- Déterminer en fonction de N et de M la probabilité thermodynamique W_M (poids statistique correspondant aussi au nombre d'états accessibles).

4- Calculer l'entropie du système.

5- Calculer la température du système et montrer qu'elle s'exprime en fonction de k , M , N , e_0 .

6- A partir de la question précédente exprimer les rapports: N_-/N_+ ; N_-/N ; N_+/N .

7- En déduire l'expression de l'énergie en fonction de N , e_0 , k et T .

Partie II:

On suppose que les niveaux d'énergie occupés par les N particules sont ϵ_1 (occupé par N_1 particules) et ϵ_2 (occupé par N_2 particules) avec $N = N_1 + N_2$.

1-a) Donner en fonction de ϵ_1 ; ϵ_2 ; N_1 et N_2 l'énergie totale E .

1-b) En prenant $\epsilon_1 = 0$ (origine des niveaux d'énergie) et $\epsilon_2 = \epsilon$; en déduire le nombre de particules N_1 et N_2 en fonction de E et de N .

2- Exprimer le poids statistique W en fonction de N ; N_1 ; N_2 .

3- Calculer l'entropie statistique et exprimer le en fonction de k , ϵ , N , E .

4- Calculer la température T du système.

5- En déduire les populations N_1 et N_2 en fonction de T .

N.B On donne la formule de Sterling: $\log x! = x \log x - x + \dots$

Solution de l'examen
physique statistique (janvier 2000-2001)

questions de cours

Sait un système $A = A_1 + A_2$

$$A_1 \rightsquigarrow P_n^{(1)}$$

$$A_2 \rightsquigarrow P_s^{(1)}$$

$$A \rightsquigarrow P_{n,s}$$

$$1) a) S_1 = -k \sum_n P_n^{(1)} \log P_n^{(1)}; S_2 = -k \sum_s P_s^{(1)} \log P_s^{(1)}$$

$$b) S = -k \sum_{n,s} P_{n,s} \log P_{n,s}$$

c) S_1 et S_2 sont statistiquement indépendants $\Rightarrow S \stackrel{?}{=} S_1 + S_2$

$$P_{n,s} = P_n \cdot P_s \Rightarrow S = -k \sum_{n,s} P_{n,s} \log P_{n,s}$$

$$= -k \sum_{n,s} P_n P_s \log P_n P_s$$

$$= -k \sum_{n,s} P_n P_s \log P_n = -k \sum_{n,s} P_n P_s \log P_s$$

$$= -k \sum_n P_n \log P_n \sum_s P_s - k \sum_s P_s \log P_s \sum_n P_n$$

$$= -k \sum_n P_n \log P_n - k \sum_s P_s \log P_s = S_1 + S_2$$

$$\boxed{S = S_1 + S_2}$$

3) A_1 et A_2 ne sont plus statistiquement indépendantes.

$$P_n^{(1)} = \sum_s P_{n,s} \quad P_s^{(2)} = \sum_n P_{n,s}$$

$$a) 1 = \sum_n P_n^{(1)} = \sum_{n,s} P_{n,s}$$

$$1 = \sum_s P_s^{(2)} = \sum_{n,s} P_{n,s}$$

$$\begin{aligned} b) S - (S_1 + S_2) &= -k \sum_{n,s} P_{n,s} \log P_{n,s} + k \sum_n P_n \log P_n + k \sum_s P_s \log P_s \\ &= -k \left[\sum_{n,s} P_{n,s} \log P_{n,s} - \sum_{n,s} P_{n,s} \log P_n - \sum_{n,s} P_{n,s} \log P_s \right] \\ &= -k \left[\sum_{n,s} P_{n,s} \left[\log P_{n,s} - \log P_n - \log P_s \right] \right] \end{aligned}$$

$$S - (S_1 + S_2) = -k \sum_{n,s} \log \frac{P_{n,s}}{P_n P_s} = k \sum_{n,s} \log \frac{P_n P_s}{P_{n,s}}$$

$$\text{d) } \log x \leq x - 1 \quad \text{①}$$

$$x = \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} \Rightarrow \log x = \log \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}}$$

$$\text{d'après ①} \Rightarrow \log \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} \leq \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} - 1$$

$$\Rightarrow k \log \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} \leq k \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} - k = k \left\{ \sum_{n,s} P_{n,s} \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} - \sum_{n,s} P_{n,s} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= k \sum_{n,s} \left[\frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} - 1 \right] \\ \Rightarrow k \log \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} &\leq k \left(\sum_{n,s} \frac{P_n^{(1)} P_s^{(2)}}{P_{n,s}} - \sum_{n,s} P_{n,s} \right) \\ &= k \left(\underbrace{\sum_n P_n}_{=1} \underbrace{\sum_s P_s}_{=1} - \sum_{n,s} P_{n,s} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$D'au \quad S - (S_1 + S_2) \leq 0. \Rightarrow S \leq S_1 + S_2 \quad (3)$$

Problème I

N particules libres se déplaçant entre $x=0$ et $x=L$.

$$1) E_{tot} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} \Rightarrow \sum_i p_i^2 = 2mE_{tot}$$

2-a) particule qui se déplace sur une seule dimension

$\vec{x} \Rightarrow d = 2$ (position x et impulsion p)

2-b) Espace de phase et l'espace associé à N particules qui se déplacent sur l'axe $\vec{x} \Rightarrow D = 2 \cdot N$

3) $\Phi(E)$ pour N particules et:

$$\Phi(E) = \frac{1}{h^N} \int dx_1 \dots dx_N \int_{p \leq \sqrt{2mE}} dp_1 \dots dp_N$$

pour $N=3$

$$\Phi(E) = \frac{1}{h^3} \int dx_1 dx_2 dx_3 \int_{\leq \sqrt{2mE}} dp_1 dp_2 dp_3$$

$$= \frac{L^3}{h^3} \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2mE})^3 = \frac{L^3}{h^3} \frac{4}{3} \pi (2mE)^{3/2}$$

$$4) \quad \mathcal{N}(E) = \frac{d\phi(E_{tot})}{dE} \delta E = \frac{4\pi}{h^3} \cdot L^3 m \cdot \sqrt{2mE_{tot}} \delta E \quad (4)$$

5a) les trois particules sont de spin égal à zéro $\Rightarrow$
 $g = 2n + 1 = 1 \Rightarrow \mathcal{N}_1(E) = \frac{4\pi}{h^3} L^3 m \sqrt{2mE_{tot}}$

b) les trois particules sont de spin égal à $\frac{1}{2}$ $g = 2n + 1 = 2$
 $\mathcal{N}(E) = 2 \cdot \frac{4\pi}{h^3} L^3 m \sqrt{2mE_{tot}}$

c) $\frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1} = 2 = g$

Problème II
Partie I.

problème II

(3)

$$1) -\varepsilon_0 \leadsto N_-$$

$$\varepsilon_0 \leadsto N_+$$

$$E = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 = -N_- \varepsilon_0 + N_+ \varepsilon_0 = (N_+ - N_-) \varepsilon_0 = N \varepsilon_0$$

$$\text{Avec } N = N_+ - N_-$$

$$2) \begin{cases} N = N_+ - N_- \\ N = N_+ + N_- \end{cases} \Rightarrow N_+ = \frac{N + M}{2}$$

$$N_- = \frac{N - M}{2}$$

$$3-a) P_{N_-}^{\text{PB}} = \frac{N!}{N_+! N_-!}$$

$$3-b) W_H = \frac{N!}{\frac{1}{2}(N-M)! \frac{1}{2}(N+M)!}$$

$$\begin{aligned} 4a) S(E) &= k \log W_H \\ &= k \left[N \log N - \frac{1}{2}(N-M) \log \frac{1}{2}(N-M) - \frac{1}{2}(N+M) \log \frac{1}{2}(N+M) \right] \\ &= -k \left[N \log \left(\frac{N}{2} \right) + \frac{N-M}{2} \log \left(\frac{N-M}{2} \right) + \frac{N+M}{2} \log \left(\frac{N+M}{2} \right) \right] \\ &= -k \left[N \log \left(\frac{N}{2} \right) + N_+ \log \left(\frac{N_+}{N} \right) + N_- \log \left(\frac{N_-}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a) \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial E_0 H} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial S}{\partial H} = \frac{k}{\varepsilon_0} \log \frac{N-M}{N+M} \\ &= \frac{k}{\varepsilon_0} \log \frac{\frac{N-M}{2}}{\frac{N+M}{2}} = \frac{k}{\varepsilon_0} \log \frac{N_-}{N_+} \end{aligned}$$

Soit $S = R [N \log N - N_1 \log N_1 - N_2 \log N_2 + N_1 \log N_2 + N_2 \log N_1]$ (6)

$$= R [N \log N - N_1 \log N_1 - N_2 \log N_2]$$

$$= R \left(N \log N - \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) \log \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) - \frac{E}{\epsilon} \log \frac{E}{\epsilon} \right)$$

$$\begin{aligned} 4^o) \quad \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{R}{\epsilon} \left[\log \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) - \log \frac{E}{\epsilon} \right] \\ &= \frac{R}{\epsilon} \log \frac{N - \frac{E}{\epsilon}}{\frac{E}{\epsilon}} = \frac{R}{\epsilon} \log \left(\frac{NE}{E} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$5^o) \Rightarrow \frac{\epsilon}{kT} = \log \left(\frac{NE}{E} - 1 \right) \Rightarrow e^{\epsilon/kT} = \frac{NE}{E} - 1$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\epsilon/kT} = \frac{N \cdot E}{E} = \frac{N}{N_2}$$

Avec $N_2 = \frac{E}{\epsilon}$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N} = \frac{1}{1 + e^{\epsilon/kT}} \Rightarrow N_2 = \frac{N}{1 + e^{\epsilon/kT}}$$

$$\text{Avec } N_1 = N - \frac{E}{\epsilon} = N - \frac{N}{1 + e^{\epsilon/kT}} = N \left[\frac{1 - e^{\epsilon/kT}}{1 + e^{\epsilon/kT}} \right]$$

$$N_1 = N \frac{1 - e^{\epsilon/kT}}{1 + e^{\epsilon/kT}}$$

$$b) \log \frac{k \epsilon_0}{T} = \log \cdot \frac{N_-}{N_+}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{kT}{\epsilon_0}} = \frac{N_-}{N_+} \Rightarrow N_- = N_+ e^{\frac{kT}{\epsilon_0}}$$

$$N = N_+ + N_- = N_+ e^{\frac{kT}{\epsilon_0}} + N_+ = N_+ \left[1 + e^{\frac{kT}{\epsilon_0}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{N_+}{N_-} = \frac{1}{1 + e^{\frac{kT}{\epsilon_0}}} \dots$$

$$7) E = (N_+ - N_-) \epsilon_0 = -N \epsilon_0 \frac{1}{1 + e^{\frac{kT}{\epsilon_0}}} \cdot \frac{\epsilon_0}{kT}$$

$$= -N \epsilon_0 \frac{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}} + 1}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}} - e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}}}$$

Partie II:

$$N_1 \rightsquigarrow \epsilon_1$$

$$N_2 \rightsquigarrow \epsilon_2$$

$$N = N_1 + N_2$$

1-a) $E = N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2$

$$\epsilon_1 = 0 \quad \epsilon_2 = 0$$

$$E = N_2 \epsilon_2 \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{E}{\epsilon_2}$$

$$N_1 + N_2 = N \Rightarrow N_1 = N - N_2 \Rightarrow$$

$$N - \frac{E}{\epsilon_2} = N_1$$

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

$$\Rightarrow S = k \log \frac{N!}{N_1! N_2!} = k \log \frac{N!}{N_1! \left(N - \frac{E}{\epsilon_2} \right)!}$$

$$= k \log N! - \log N_1! - \log N_2!$$

Contrôle de physique Statistique

Questions de cours

- 1- Donner Les conditions qu'il faut satisfaire pour établir la distribution de Boltzmann Gibbs
- 2- Enoncer le théorème d'équipartition de l'énergie
- 3- Sachant que $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = - \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta}$
 - 3-a Montrer que $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = k_B T^2 C_V$
 - 3-b Montrer que dans le cas d'un gaz idéal de N atomes ayant uniquement à leur énergie cinétique on a :

$$\frac{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = \frac{2}{3N}$$

On donne : $\frac{\partial}{\partial \beta} = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T}$

Exercice 1

On considère un gaz parfait classique bidimensionnel de N particules indiscernables de surface S maintenu à la température T.

La fonction de partition z pour une particule est donnée par :

$$z = \int_0^\infty \rho(E) e^{-\beta E} dE \quad \text{Avec } \rho(E) = A = \frac{S}{4\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} = \text{Constante}$$

- 1- Calculer la fonction de partition d'une particule et en déduire celle de tout le système
- 2- Calculer l'énergie moyenne et l'énergie libre du gaz
- 3- Trouver l'équation d'état : $pS = Nk_B T$, où p est la pression

Exercice 2

On considère un système d'oscillateurs harmoniques quantique à trois dimensions de même fréquence ν indépendants (discernable) maintenu à une température T.

L'énergie d'un oscillateur quantique est :

$$E = (n_x + n_y + n_z + 3/2) h \nu \quad n_x = 0, 1, \dots, \infty, \quad n_y = 0, 1, \dots, \infty, \quad n_z = 0, 1, \dots, \infty$$

1- Donner l'expression de l'opérateur densité

✓ 2- Calculer la fonction de partition d'une particule et en déduire celle de tout le système

3- On suppose que la fonction de partition du système est de la forme :

$$Z = \left(\frac{1}{2sh \frac{\beta h \nu}{2}} \right)^{3N}$$

Calculer l'énergie moyenne du système et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\langle E \rangle = 3N \left(\frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \right)$$

4- Calculer la capacité calorifique à volume constant : c_v

NB on donne $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} = \frac{1}{1-e^{-a}}$

Pour montrer l'expression de l'énergie il faut montrer que : $\coth x = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}$

Exercice 3

Le grand potentiel d'un gaz parfait monoatomique est:

$$J = -k_B T \log Z_G = - \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} V (k_B T)^{5/2} e^{\frac{\mu}{k_B T}}$$

On pose $C = \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2}$

1- Calculer le nombre moyen de particules (qu'on exprime en fonction de J est d'autres paramètres) en déduire le potentiel chimique

2- Calculer la pression. En déduire l'équation d'état du gaz

3-a) Montrer que l'entropie du gaz est égale à :

$$S = - \frac{5}{2} \frac{J}{T} + \frac{\mu}{k_B T^2}$$

3-b) Sachant que $J = \mu N - E - TS$ Montrer que l'énergie interne est: $E = - \frac{3}{2} J$

NB : $P = - \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{T, \mu}$; $N = - \left(\frac{\partial J}{\partial \mu} \right)_{T, V}$; $S = - \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{V, \mu}$

Tous les résultats doivent être exprimés en fonction de J est d'autres paramètres.

- contrôle de physique statistique.

quest de cours 2015/2016

8.8.2016 normale

1 - Les conditions qu'il faut satisfaire pour établir la distribution de Boltzmann-Gibbs sont:

1. le système étudié est en contact avec un thermostat de température T .
2. on choisie un opérateur ρ qui contient les informations sur un système.
3. on doit compenser le manque d'information par la fonction entropie S .

1-

Le Théorème d'équipartition de l'énergie

L'énergie Moyenne d'un système dont l'énergie Totale est la somme des carrés des composantes de l'impulsion ou des coordonnées (Terme quadratique) est égale à $\frac{1}{2} k_B T$. (Fois le Nombre de ces termes quadratique)

|| Chaque Terme quadratique est remplacé par $\frac{1}{2} k_B T$ ||

Exemple pour un gaz parfait contenant N particules

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m} \Rightarrow \langle H \rangle = \langle E \rangle = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{P_i^2}{2m} \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{P_{xi}^2}{2m} \right\rangle + \left\langle \frac{P_{yi}^2}{2m} \right\rangle + \left\langle \frac{P_{zi}^2}{2m} \right\rangle$$

- e

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right) k_B T \sum_{i=1}^N$$

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

L'énergie ~~de~~ ^{plusieurs} oscillateur harmonique

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k x_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{p_{xi}^2}{2m} + \frac{p_{yi}^2}{2m} + \frac{p_{zi}^2}{2m} + \frac{1}{2} k x_i^2 + \frac{1}{2} k y_i^2 + \frac{1}{2} k z_i^2$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T$$

$$\langle E \rangle = N (3 k_B T) \text{ si } H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k r^2$$

$$\langle E \rangle = 3 k_B T$$

3/ sachant que :

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta}$$

3a) on montre que

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = kT^2 C_V$$

on a d'après l'énoncé de l'exercice

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T}$$

$$\Rightarrow \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = +kT^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$$

et on voit que $\left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{N, V} = C_V$

3-b/ Dans le cas d'un gaz idéal à
 N particule ayant uniquement à
 leur énergie cinétique l'énergie
 Moyenne $\langle E \rangle$ s'écrit

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle^2 = \left(\frac{3}{2} N k_B T \right)^2$$

avec $C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{3}{2} N k_B$

Alors

$$\Rightarrow \frac{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = \frac{k_B T^2 \times \left(\frac{3}{2} N k_B \right)}{\left(\frac{3}{2} N k_B T \right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2} N} = \frac{2}{3N}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = \frac{2}{3N}$$

Remarque [⚠] Importante ①

• si le gaz est soumis au champ de pesanteur n . Alors

$$\langle E \rangle = \frac{5}{2} N k_B T$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5}{2} N k_B$$

$$\text{et } \langle E \rangle^2 = \left(\frac{5}{2} N k_B T \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = \frac{k_B T^2 \left(\frac{5}{2} N k_B \right)}{\left(\frac{5}{2} N k_B T \right)^2} = \frac{2}{5N}$$

6-

Exercice ①

gaz parfait classique bidimensionnel
de N particules Indiscernables
de surface s à T .

- Z pour une particule est

$$Z = \int_0^{+\infty} \rho(E) e^{-\beta E} dE$$

Donner l'an.

① Z d'une particule

$$Z = \int_0^{+\infty} A e^{-\beta E} dE = \frac{A}{-\beta} [e^{-\beta E}]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{A}{\beta} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{A}{\beta}$$

avec $A = \frac{S}{4\pi^2} \frac{p_m}{h^2}$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\beta 4\pi^2} \frac{e S m}{h^2} = \frac{1}{\beta 4\pi^2 h^2} p_m$$

les particules sont Indiscernables

$$\Rightarrow Z = \frac{Z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left(\frac{1 S m}{\beta 4\pi^2 h^2} \right)^N$$

l'énergie Moyenne $\langle E \rangle$ est
 obtenue par $\langle E \rangle = - \frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= - \frac{\partial \log (C \frac{1}{\beta})^N}{\partial \beta} \\ &= - N \frac{\partial \log \frac{1}{\beta}}{\partial \beta} \end{aligned}$$

-

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \left(\frac{1}{N!} \left(\frac{1}{\beta} \frac{8m}{\pi^2 h^2} \right)^N \right)$$

je dois conserver seulement
le terme $\left(\frac{1}{\beta}\right)^N$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \left(\left(\frac{1}{\beta}\right)^N \right)$$

$$= -N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\log \left(\frac{1}{\beta} \right) \right)$$

$$= -N \frac{\frac{\partial \left(\frac{1}{\beta} \right)}{\partial \beta}}{\frac{1}{\beta}}$$

$$= -N \times \left(\frac{1}{\beta^2} \right) \times \beta$$

$$\langle E \rangle = \frac{N}{\beta}$$

g-

l'énergie libre est donnée par

$$F = -k_B T \log Z$$

$$F = -k_B T \log \left(\frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^N \right)$$

3/ pour trouver l'équation d'état
il faut dériver

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}$$

$$\Rightarrow P = k_B T \frac{\partial}{\partial V} \log(Z)^N$$

$$\Rightarrow P = \frac{N k_B T}{V} \frac{\partial \log Z}{\partial \log Z}$$

$\Rightarrow$

$$P = N k_B T \propto \frac{1}{V}$$

$$\Rightarrow P V = N k_B T$$

2013

Contrôle physique Statistique

Questions de cours

- 1) Donner les postulats de physique statistique. *3 postulats*
- 2) Sans faire de calcul et en expliquant pourquoi, donner l'énergie moyenne de

l'Hamiltonien suivant: $H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_{\theta i}^2}{2I} + \frac{mgI}{2} \theta_i^2 \right)$

- 3) Donner le Facteur de Fermi et celui de Bose et faire une représentation graphique détaillée à $T = 0$ de chacun des deux facteurs.

Exercice 1

non identiques

Soit un système isolé constitué de $N \gg 1$ particules discernables de spin $1/2$. Chaque particule a un moment magnétique μ . Le système est placé dans un champ magnétique B , chaque particule a alors la possibilité de s'orienter soit dans une direction parallèle à B soit dans une direction antiparallèle à B avec la même probabilité.

Soit n_1 le nombre de spin parallèle à B et n_2 le nombre de spin antiparallèle à B .

- 1) Donner le nombre total de particules N . Exprimer l'énergie du système en fonction de B , n_1 , n_2 et μ . Montrer qu'elle peut aussi s'écrire sous la forme: $E = (N - 2n_1) \mu B$.

- 2) On suppose que l'énergie E est exactement fixée, Calculer le nombre total d'états accessibles $\Omega(E)$, qui est aussi le nombre de façons de choisir n_1 spins parmi N .

- 3) En utilisant la formule de Sterling, Calculer:

a- l'entropie microcanonique $S = k_B \log(\Omega(E))$

b- la température du système et en déduire le nombre de particule n_1

c- Que devient n_1 , si $\frac{\mu B}{k_B T} \ll 1$ ou $\frac{\mu B}{k_B T} \gg 1$.

NB: $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial E}$

Formule de Sterling: $\ln N! \sim N \ln N - N$

$\log(x!) = x \log(x) - x$

Rattrapage Physique Statistique

Exercice 1

On considère un cristal, d'énergie E comportant $N+n$ sites dont N sites sont occupés et n sites sont vides.

Chaque site occupé a une énergie nulle

Chaque site vide a une énergie $\varepsilon > 0$. L'énergie du système est donc $E = n\varepsilon$

- 1- Déterminer le nombre de micro-états Ω (ou états microscopiques) qui est le nombre de façons de choisir aléatoirement n sites vides parmi $N+n$ sites
- 2- Calculer l'entropie micro canonique
- 3- En utilisant la formule de Stirling ($N, n \gg 1$) montrer qu'elle est de l'ordre :

$$S \approx k_B [(N+n) \ln(N+n) - n \ln n - N \ln N]$$

- 4- Calculer la température T et en déduire le nombre de lacunes n en fonction de T (pour $n \ll N$)

NB : $\ln X! \approx X \ln X - X$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \varepsilon$$

Exercice 2

On considère un système de N oscillateurs harmoniques classiques tridimensionnels. Chaque oscillateur a une masse m et une énergie ε telle que : $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + K \frac{r^2}{2}$

Où, l'impulsion $\mathbf{p}$ a pour composantes p_x, p_y, p_z . La position $\mathbf{r}$ a pour composantes x, y, z

- 1- Donner la densité en phase du système
- 2- Calculer la fonction de partition z d'une particule et en déduire celle de tout le système (N oscillateurs discernables)

NB : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

n parmi $N \Rightarrow \binom{N}{n} ; \binom{2}{2} = \frac{2!}{1!(2-2)!} = 2$

- 3- Calculer l'énergie moyenne du système. Comment sans faire de calculer peut-on trouver cette énergie.
- 4- Calculer l'énergie libre en déduire l'entropie
- 5- Calculer la capacité calorifique

Exercice 3

Soit un système constitué de N particules identiques et indépendant assimilés à N oscillateurs harmoniques quantiques vibrant avec une fréquence ω .

L'énergie d'une particule est $E_i = (n_i + \frac{1}{2}) \hbar \omega$

Celle de tout le système est: $E_N = \sum_{n_i=1}^N (n_i + \frac{1}{2}) \hbar \omega$

- 1- Donner l'expression de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ du système
- 2- Calculer la fonction de partition d'une particule et montrer que celle de tout le système est de la forme : $Z_c(\beta, N) = \left(\frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right)^N$
- 3- Exprimer Z_c en fonction du Sinus hyperbolique
- 4- Calculer l'énergie moyenne du système.
- 5- Déterminer l'énergie libre d'Helmoltz
- 6- Calculer la capacité calorifique à volume constant

$$S = k_B \ln Z_c$$

$$F = -k_B T \ln Z_c$$

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$$



1) n parmi $(N+n)$ a parmi B

$$\Omega = C_{N+n}^n = \frac{(N+n)!}{n!(N+n-n)!} = \frac{(N+n)!}{n!N!} C_B^a$$

2) $S = +k_B \log \Omega \Rightarrow S = k_B \log (N+n)! - k_B \log n! - k_B \log N!$

3) $S \Rightarrow S = k_B \left[(N+n) \log (N+n) - (N+n) - n \log n + n - N \log N + N \right]$

$$S = k_B \left[(N+n) \log (N+n) - n \log n - N \log N \right]$$

4) $T = \frac{\partial E}{\partial S} \Rightarrow T = \frac{\partial E}{\partial S} \frac{\partial n}{\partial n} = \frac{\partial E}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial S}$

$$T = \epsilon \cdot \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial n}} = \epsilon \cdot \frac{1}{k_B \log \frac{N+n}{n}} = \epsilon \cdot \frac{1}{k_B \log \frac{N}{n}} \quad \text{Car } n \ll N$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial n} &= k_B \left[\log (N+n) + \frac{(N+n)}{N+n} \frac{1}{N+n} - \log n - n \frac{1}{n} \right] \\ &= k_B \left[\log (N+n) - \log n \right] = k_B \log \frac{N+n}{n} \end{aligned}$$

①

Ex 2

1) - $\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta E}}{Z_c}$

2) - une particule:

$Z_c = \int dZ e^{-\beta E}$

$Z_c = \frac{1}{h^3} \int dx dy dz dp_x dp_y dp_z \cdot e^{-\beta \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \right)}$

$Z_c = \frac{1}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta k}{2} (x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} dp_x dp_y dp_z$

$Z_c = \frac{1}{h^3} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta k}{2} x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta}{2m} p_x^2} dp_x \right]^3$

$= \frac{1}{h^3} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{\beta k}} \cdot \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \right]^3 = \frac{1}{h^3} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{3}{2}}$

$Z_{sg} = Z_c^N = \frac{1}{h^{3N}} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{3N} \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{3N}{2}}$

(2)

$$3) \quad U = - \frac{\partial \log Z_y}{\partial \beta}$$

$$\text{Avec } \log Z_y = N \log Z = N \log \left[\frac{1}{h^3} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 \left(\frac{m}{k} \right)^{3/2} \right]$$

$$- \frac{\partial \log Z_y}{\partial \beta} = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 = + \frac{3N}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 = 3N K_B T$$

$$4) \quad F = - K_B T \log Z_y = - K_B T N \log Z$$

$$\text{avec } Z = \frac{1}{h^3} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 \left(\frac{m}{k} \right)^{3/2} \Rightarrow F = - K_B T N \log \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 \left(\frac{m}{k h^2} \right)^{3/2} \right]$$

$$S = - \frac{dF}{dT} \quad ; \quad \frac{dF}{dT} = - K_B N \log Z - K_B T N \frac{3}{T}$$

$$\frac{dF}{dT} = - K_B N (\log Z + 3) \Rightarrow S = K_B N (\log Z + 3)$$

$$5) \quad C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3N K_B$$

(3)