Théorèmes généraux

Exercice 1

Soit une barre AB, homogène rectiligne, de longueur 2l, de centre d'inertie G et de masse m, en mouvement dans le plan vertical $(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ d'un repère fixe orthonormé direct galiléen $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ de manière à ce que l'extrémité A (respectivement B)se déplace le long de Oz_0 sans frottement (respectivement Oy_0).

1- Paramétrer la position de la barre, et donner $\vec{\Omega}\left({}^{AB}/_{R_0}\right)$.

2- Calculer l'énergie cinétique de la barre dans R_0.

3- Déterminer à l'aide des théorèmes généraux les équations du mouvement de la barre.

Solution

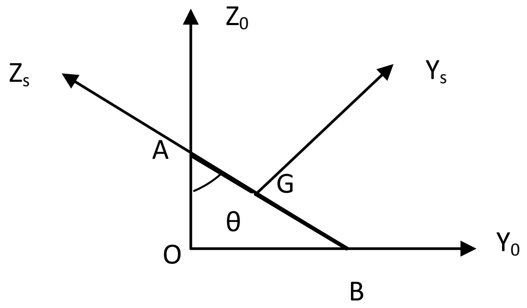
1- Paramétrage de la barre

Soit $R_S(G, X_s, Y_s, Z_s)$ le repère lié à la barre tel que OZ_s suivant BA et Y_s faisant l'angle θ avec Oy_0.

La position de G est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = l(sin\theta\, \overrightarrow{y_0} + cos\theta\, \overrightarrow{z_0})$$

$$\vec{\Omega}\left({}^{AB}/_{R_0}\right) = \dot{\theta}\, \overrightarrow{x_0} = \dot{\theta}\, \overrightarrow{x_S}$$



2- Energie cinétique de la barre.

$$T = \frac{1}{2}m\vec{V}^2\left({}^{G}/_{R_0}\right) + \frac{1}{2}\ {}^{t}\vec{\Omega}\left({}^{AB}/_{R_0}\right) M_G^{(AB)}\vec{\Omega}\left({}^{AB}/_{R_0}\right)$$

L'axe Y_s est axe de symétrie, donc axe principal d'inertie, et par conséquent les axes X_s et Z_s sont axes principaux d'inertie, et la matrice d'inertie dans la base (G, X_s, Y_s, Z_s).est diagonale. la barre est suivant Z_s, un élément de longueur dl de la barre n'a pas de composantes suivant Gx_S et Gy_S ($X_s=Y_s=0$)

$$A = B = \int_{-l}^{+l} z^2\lambda\, dz = \frac{2}{3}l^3\lambda = \frac{m}{3}l^2 \qquad C=0 \Rightarrow M_G^{(S)} = \frac{m}{3}l^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{R_S},$$

$$\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = l\,\dot{\theta}\,(cos\theta\,\overrightarrow{y_0} - sin\theta\,\overrightarrow{z_0})$$

$$E_C = \frac{1}{2}ml^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{\theta},0,0\right)\frac{m}{3}l^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{R_S}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\0\\0\end{pmatrix}_{R_S} = \frac{2}{3}ml^2\,\dot{\theta}^2$$

3- A) Calcul de la résultante dynamique

$$\vec{\Gamma}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} = \begin{pmatrix}0\\ l\ddot{\theta}\,cos\theta - l\dot{\theta}^2\,sin\theta\\ -l\ddot{\theta}\,sin\theta - l\dot{\theta}^2\,cos\theta\end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{R_d} = m\vec{\Gamma}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = ml\left[\left(\ddot{\theta}\,cos\theta - \dot{\theta}^2\,sin\theta\right)\overrightarrow{y_0} - \left(\ddot{\theta}\,sin\theta + \dot{\theta}^2\,cos\theta\right)\overrightarrow{z_0}\right]$$

Bilan des forces agissant sur la barre AB

A et B se déplacent respectivement sur OZ et OY sans frottement ; les réactions en ces points sont alors normales aux axes OZ et OY.

- Poids $\vec{P} = -mg\,\overrightarrow{z_0}$
- Réaction du bâti en A $\overrightarrow{R_A} = R_A\overrightarrow{y_0}$
- Réaction du bâti en B $\overrightarrow{R_B} = R_B\overrightarrow{z_0}$

$$\overrightarrow{R_d} = \vec{P} + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} \quad \Rightarrow \begin{cases} ml\left(\ddot{\theta}\,cos\theta - \dot{\theta}^2\,sin\theta\right) = R_A \\ -ml\left(\ddot{\theta}\,sin\theta + \dot{\theta}^2\,cos\theta\right) = -mg + R_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_A = ml\left(\ddot{\theta}\,cos\theta - \dot{\theta}^2\,sin\theta\right) \\ R_B = mg - ml\left(\ddot{\theta}\,sin\theta + \dot{\theta}^2\,cos\theta\right) \end{cases}$$

B) Calcul du moment dynamique en G de AB par rapport à R_0

- Calcul du moment cinétique

$$\vec{\sigma}\left(G, {}^{AB}/_{R_0}\right) = M_G^{(S)}\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) \quad \text{Avec} \quad M_G^{(S)} = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_S} \quad et \quad \vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) = \dot{\theta}\,\overrightarrow{X_S} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}\left(G, {}^{AB}/_{R_0}\right) = \frac{ml^2}{3}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0}$$

- Calcul du moment dynamique

$$\vec{\delta}\left(G, {}^{AB}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{\sigma}\left(G, {}^{AB}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\overrightarrow{x_0}$$

- Calcul des moments des forces au point G

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{P}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_G}\left(\overrightarrow{R_A}\right) = \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{R_A} = l\,\overrightarrow{Z_S} \wedge R_A\overrightarrow{y_0} = l\,(cos\theta\,\overrightarrow{z_0} - sin\theta\,\overrightarrow{y_0}) \wedge R_A\overrightarrow{y_0} = -l\,R_A\,cos\theta\,\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_G}\left(\overrightarrow{R_B}\right) = \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{R_B} = -l\,\overrightarrow{Z_S} \wedge R_B\overrightarrow{z_0} = l\,R_B\,sin\theta\,\overrightarrow{x_0}$$

- Théorème du moment dynamique

Le moment dynamique en un point est égale à la somme des moments de toutes les forces extérieures qui s'exercent sur le système au même point.

$$\vec{\delta}\left(G, {}^{AB}/_{R_0}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_G}\left(\overrightarrow{R_A}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_G}\left(\overrightarrow{R_B}\right)$$

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\overrightarrow{x_0} = (-l\,R_A\,cos\theta + l\,R_B\,sin\theta)\,\overrightarrow{x_0}$$

En remplaçant R_A et R_B par leurs valeurs, on obtient: $\ddot{\theta} - \frac{3}{4}\frac{g}{l}\,sin\theta = 0$

Exercice 2

Un anneau homogène A de masse M, de rayon a, de centre C_1 roule dans le sens positif d'un axe Ox du plan vertical xOy d'un repère fixe $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On désigne par x l'abscisse de C_1 sur l'axe Ox et I le point de contact de l'anneau avec l'axe Ox. $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$ étant le vecteur rotation propre de l'anneau par rapport à R. Un disque D homogène de masse m, de rayon r, de centre C_2 roule à l'intérieur de l'anneau. J étant le point de contact du disque et de l'anneau, f_1 et f_2 sont respectivement les coefficients de frottement de l'anneau sur l'axe Ox et du disque sur l'anneau. Soit R' $\left(C_1, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$un repère relatif obtenu à partir de R par une rotation ψ autour de $\overrightarrow{C_1 z}$ et R'' $\left(C_2, \vec{i''}, \vec{j''}, \vec{k''}\right)$ un repère lié au disque D, obtenu à partir de R' par une rotation φ autour de $\overrightarrow{C_2 z}$.

1- Paramétrer l'anneau A et le disque D.

2- Calculer, en projection dans R, la vitesse de glissement de l'anneau A sur l'axe Ox et en projection sur R', la vitesse de glissement du disque D sur l'anneau A. Donner les conditions de roulement sans glissement.

3- Calculer l'énergie cinétique du système (A+D) par rapport à R.

4- Calculer par rapport à R
- Le torseur cinétique de l'anneau A au point C_1 et du disque D au point C_2.
- En déduire le torseur dynamique de l'anneau au point C_1 et celui du disque au point C_2.

5- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'anneau A et du disque D, établir les équations du mouvement lorsque la vitesse de C_1 est constante et les coefficients de frottement sont nuls.

Solution

1- Anneau A

La position de C_1 est donnée par ses coordonnées dans R : (x, a, 0)

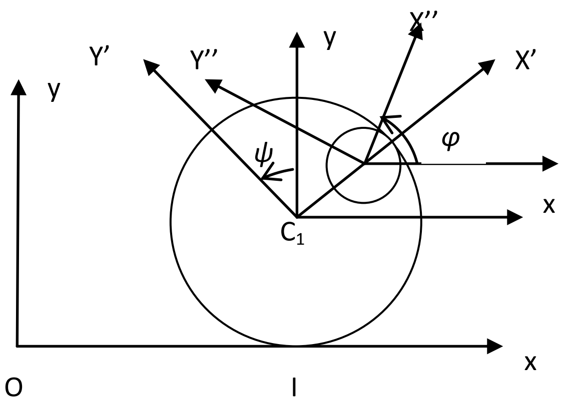
La rotation propre de l'anneau autour de son axe C_1z par rapport à R est : $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$

Disque D

Le repère R' est lié au centre C_2, la position de ce point est donnée par x et ψ

$\boldsymbol{\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overline{C_1C_2}\,(cos\psi\,\vec{i} + sin\psi\,\vec{j})}$

Avec $\overline{C_1C_2}$=a-r



Le repère R'' est lié au disque D, φ est l'angle de rotation propre du disque autour de son axe C_2z. La position d'un point M du disque est donnée par la position de C_2 et φ

$$R(O, x, y, z) \xrightarrow{\dot{\psi}\vec{k}} R'(C_1, x', y', z)$$

$$R(C_1, x, y, z) \xrightarrow{\dot{\varphi}\vec{k}} R''(C_2, x'', y'', z'')$$

2- Vitesse de glissement de l'anneau sur l'axe Ox

$$\vec{V_g}\left({}^{A}/_{Ox}\right) = \vec{V}\left({}^{I\,\in\,A}/_{R}\right) - \vec{V}\left({}^{I\,\in\,Ox}/_{R}\right) = \vec{V}\left({}^{I\,\in\,A}/_{R}\right)$$

Or $\vec{V}\left({}^{I\,\in\,A}/_{R}\right) = \vec{V}\left({}^{C_1}/_{R}\right) + \overrightarrow{IC_1} \wedge \vec{\Omega}\left({}^{A}/_{R}\right) = \dot{x}\vec{i} + a\vec{j} \wedge -\dot{\theta}\vec{k} = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{i}$

La condition de roulement sans glissement donne : $\dot{x} = a\dot{\theta}$

Vitesse de glissement du disque sur l'anneau

$$\vec{V_g}\left({}^{D}/_{A}\right) = \vec{V}\left({}^{J\in D}/_{R}\right) - \vec{V}\left({}^{J\in A}/_{R}\right)$$

$$\vec{V}\left({}^{J\in D}/_{R}\right) = \vec{V}\left({}^{C_2}/_{R}\right) + \overrightarrow{JC_2}\wedge\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OC_1}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{C_1C_2}}{dt}\right|_R - r\,\vec{\imath'}\wedge\dot{\varphi}\vec{k}$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{OC_1}}{dt}\right|_R + \left[\left.\frac{d\overrightarrow{C_1C_2}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\Omega}\left({}^{R'}/_{R}\right)\wedge\overrightarrow{C_1C_2}\right] - r\,\vec{\imath'}\wedge\dot{\varphi}\vec{k}$$

Or $\left.\frac{d\overrightarrow{C_1C_2}}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$ $\quad et \quad$ $\left.\frac{d\overrightarrow{OC_1}}{dt}\right|_R = \dot{x}\vec{\imath}$ $\quad et \quad$ $\vec{\Omega}\left({}^{R'}/_{R}\right)\wedge\overrightarrow{C_1C_2} = \dot{\psi}\vec{k}\wedge(a-r)\vec{\imath'} = \dot{\psi}(a-r)\vec{\jmath'}$

$$\vec{V}\left({}^{J\in D}/_{R}\right) = \dot{x}\vec{\imath} + [\dot{\psi}(a-r) + r\dot{\varphi}]\vec{\jmath'}$$

$$\vec{V}\left({}^{J\in A}/_{R}\right) = \vec{V}\left({}^{C_1}/_{R}\right) + \overrightarrow{JC_1}\wedge\vec{\Omega}\left({}^{A}/_{R}\right) = \dot{x}\vec{\imath} - a\vec{\imath'}\wedge -\dot{\theta}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} - a\dot{\theta}\vec{\jmath'}$$

$$\vec{V_g}\left({}^{D}/_{A}\right) = [\dot{\psi}(a-r) + r\dot{\varphi} + a\dot{\theta}]\vec{\jmath'}$$

D'où la condition de roulement sans glissement :

$$\dot{\psi}(a-r) + r\dot{\varphi} = -a\dot{\theta}$$

3- <u>Energie cinétique du système (A+D) par rapport à R</u>

L'énergie cinétique du système est égale à la somme des énergies de ses constituants.

$$T\left({}^{S}/_{R}\right) = T\left({}^{A}/_{R}\right) + T\left({}^{D}/_{R}\right)$$

<u>Energie cinétique de l'anneau</u>

$$T\left({}^{A}/_{R}\right) = \frac{1}{2}M\,\vec{V}^2\left({}^{C_1}/_{R}\right) + \frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}\left({}^{A}/_{R}\right)M_{C_1}^{(A)}\vec{\Omega}\left({}^{A}/_{R}\right)$$

Or $\vec{V}\left({}^{C_1}/_{R}\right) = \dot{x}\vec{\imath}$ $\quad et \quad$ $M_{C_1}^{(A)} = \frac{Ma^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}_R$

$$\Rightarrow\ {}^t\vec{\Omega}\left({}^{A}/_{R}\right)M_{C_1}^{(A)}\vec{\Omega}\left({}^{A}/_{R}\right) = \frac{Ma^2}{2}(0,0,-\dot{\theta})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}_R\begin{pmatrix}0\\0\\-\dot{\theta}\end{pmatrix}_R$$

$$et \qquad T\left({}^{A}/_{R}\right) = \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + a^2\,\dot{\theta}^2\right)$$

<u>Energie cinétique du disque</u>

$$T\left({}^{D}/_{R}\right) = \frac{1}{2}m\,\vec{V}^2\left({}^{C_2}/_{R}\right) + \frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R}\right)M_{C_2}^{(D)}\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R}\right)$$

$$\vec{V}\left({}^{C_2}/_{R}\right) = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{\psi}(a-r)\vec{\jmath'} = [\dot{x} - \dot{\psi}(a-r)sin\psi]\vec{\imath} + \dot{\psi}(a-r)cos\psi\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{1}{2}m\,\vec{V}^2\left({}^{C_2}/_{R}\right) = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 - 2\dot{x}\,\dot{\psi}\,(a-r)\sin\psi + \dot{\psi}^2(a-r)^2\right]$$

$$\frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R}\right)M_{C_2}^{(D)}\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R}\right) = \frac{1}{2}(0,0,\dot{\varphi})\frac{mr^2}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\varphi}\end{pmatrix} = \frac{mr^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

$$T\left({}^{D}/_{R}\right) = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 - 2\dot{x}\,\dot{\psi}\,(a-r)sin\psi + \dot{\psi}^2(a-r)^2 + \frac{r^2}{2}\dot{\varphi}^2\right]$$

<u>Energie cinétique du système</u>

$$T\left({}^{S}/_{R}\right) = \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + a^2\,\dot{\theta}^2\right) + \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 - 2\dot{x}\,\dot{\psi}\,(a-r)sin\psi + \dot{\psi}^2(a-r)^2 + \frac{r^2}{2}\dot{\varphi}^2\right]$$

4- <u>Torseur cinétique de l'anneau au point C_1</u>

Résultante cinétique : $\vec{R_C}\left({}^{A}/_{R}\right) = M\vec{V}\left({}^{C_1}/_{R}\right) = M\dot{x}\,\vec{\imath}$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}(C_1, A/R) = M_{C_1}^{(A)}\vec{\Omega}\left({}^{A}/_{R}\right) = -Ma^2\dot{\theta}\vec{k}$

Torseur cinétique du disque au point C_2

Résultante cinétique : $\overrightarrow{R_C}\left(D/_R\right) = m\vec{V}\left(C_2/_R\right)$

$$\overrightarrow{R_C}\left(D/_R\right) = m[\dot{x} - \dot{\psi}(a-r)sin\psi]\vec{\imath} + m\dot{\psi}(a-r)cos\psi\,\vec{\jmath}$$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}(C_2, D/R) = M_{C_2}^{(D)}\vec{\Omega}\left(D/_R\right) = -\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}\vec{k}$

Torseur dynamique de l'anneau au point C_1

Résultante dynamique : $\overrightarrow{R_d}\left(A/_R\right) = M\,\vec{\gamma}\left(C_1/_R\right) = M\,\ddot{x}\,\vec{\imath}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}\left(C_1, A/_R\right) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(C_1,A/R)}{dt}\right|_R = -Ma^2\,\ddot{\theta}\,\vec{k}$

Torseur dynamique du disque au point C_2

Résultante dynamique :

$$\overrightarrow{R_d}\left(D/_R\right) = m\vec{\gamma}\left(C_2/_R\right) = m\begin{pmatrix} \ddot{x} - \ddot{\psi}(a-r)sin\psi - \dot{\psi}^2(a-r)cos\psi \\ \ddot{\psi}\,(a-r)cos\psi - \dot{\psi}^2(a-r)sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}_R$$

Moment dynamique : $\vec{\delta}\left(C_2, D/_R\right) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(C_2,D/R)}{dt}\right|_R = -\frac{m}{2}r^2\,\ddot{\varphi}\,\vec{k}$

5- Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'anneau

$$\overrightarrow{R_d}\left(A/_R\right) = \sum\overrightarrow{F_{ext}} \quad et \quad \vec{\delta}\left(C_1, A/_R\right) = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_1}}\overrightarrow{F_{ext}}$$

- Les forces extérieures qui s'exercent sur l'anneau sont : son poids, les réactions en I et J.

$$\vec{P} = -Mg\,\vec{\jmath} \quad ; \quad \overrightarrow{R_I} = N_I\vec{\jmath} - T_I\vec{\imath} \quad ; \quad \overrightarrow{R_J} = N_J\vec{\imath'} - T_J\,\vec{\jmath'} = \begin{pmatrix} N_Jcos\psi + T_J\,sin\psi \\ N_J\,sin\psi - T_J\,cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}_R$$

Ce qui donne en remplaçant chaque terme par sa valeur :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -T_I + N_Jcos\psi + T_J\,sin\psi & \text{équation 1} \\ 0 = -Mg + N_I + N_J\,sin\psi - T_J\,cos\psi & \text{équation2} \end{cases}$$

- Moment du poids au point C_1 : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_1}}(\vec{P}) = \vec{0}$

Moment de la réaction en I au point C_1 :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_1}}(\vec{R}_I) = \overrightarrow{C_1I} \wedge \overrightarrow{R_I} = -a\vec{\jmath} \wedge (N_I\vec{\jmath} - T_I\vec{\imath}) = -aT_I\vec{k}$$

Moment de la réaction en J au point C_1 :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_1}}(\vec{R}_J) = \overrightarrow{C_1J} \wedge \overrightarrow{R_J} = a\vec{\imath'} \wedge \left(N_J\,\vec{\imath'} - T_J\,\vec{\jmath'}\right) = -aT_J\vec{k}$$

$$\vec{\delta}\left(C_1, A/_R\right) = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_1}}\overrightarrow{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad Ma\ddot{\theta} = T_I + T_J \qquad \text{équation3}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué au disque

$$\overrightarrow{R_d}\left(D/_R\right) = \sum\overrightarrow{F_{ext}} \quad et \quad \vec{\delta}\left(C_2, D/_R\right) = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_2}}\overrightarrow{F_{ext}}$$

- Les forces extérieures qui s'exercent su le disque sont : son poids et la réaction en J

D'après le principe de l'action et de la réaction, l'anneau exerce sur le disque une force égale à ($-\overrightarrow{R_J}$). On exprime tous les vecteurs dans la base R', ce qui donne :

$$\overrightarrow{R_c}\left({}^{D}/_{R}\right) = m\left[\dot{x}\vec{\imath} + \dot{\psi}\,(a-r)\vec{\jmath'}\right] = m\left[\dot{x}\,cos\psi\,\vec{\imath'} + \left(\dot{\psi}(a-r) - \dot{x}\,sin\psi\right)\vec{\jmath'}\right]$$

$$\overrightarrow{R_d}\left({}^{D}/_{R}\right) = m\vec{\gamma}\left({}^{C_2}/_{R}\right) = m\begin{pmatrix} \ddot{x}cos\psi \ -\dot{\psi}^2\,(a-r) \\ \ddot{\psi}(a-r)\ -\ddot{x}sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}_{R'}$$

$$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = -mg\vec{\jmath} - N_J\vec{\imath'} + T_J\,\vec{\jmath'} = -\left(N_J + mg\,sin\psi\right)\vec{\imath'} + \left(T_J - mg\,cos\psi\right)\vec{\jmath'}$$

$$\overrightarrow{R_d}\left({}^{D}/_{R}\right) = \sum\overrightarrow{F_{ext}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} m\ddot{x}\,cos\psi - m\dot{\psi}^2\,(a-r) = -N_J - mg\,sin\psi & \text{équation4} \\ -m\ddot{x}\,sin\psi + m\ddot{\psi}(a-r) = T_J - mg\,cos\psi & \text{équation5} \end{cases}$$

- Moment du poids en C_2 : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{C_2}(\vec{P}) = \vec{0}$

  Moment de la réaction en J au point C_2 :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{C_2}(\vec{R_J}) = \overrightarrow{C_2J} \wedge \overrightarrow{R_J} = r\vec{\imath'} \wedge -\left(N_J\,\vec{\imath'} - T_J\vec{\jmath'}\right) = rT_J\vec{k}$$

$$\vec{\delta}\left(C_2, {}^{D}/_{R}\right) = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_2}}\,\overrightarrow{F_{ext}} \;\Rightarrow\; \frac{m}{2}\,r\,\ddot{\varphi} = T_J \qquad \text{équation 6}$$

On a 8 inconnues (x, θ, ψ, φ, N_I, N_J, T_I, T_j) et 6 équations, donc le système a deux degrés de liberté.

<u>Cas particuliers</u>

$\dot{x} = C^{te}$; les frottements nuls $\Rightarrow$ $T_I = T_J = 0$

L'équation 1 donne N_J=0 ; l'équation 2 donne N_I=Mg ; l'équation3 donne $\ddot{\theta} = 0$

L'équation 4 donne $\dot{\psi}^2 = \frac{g\,sin\psi}{a-r}$; l'équation 5 donne :$\ddot{\psi} + \frac{g\,cos\psi}{a-r} = 0$

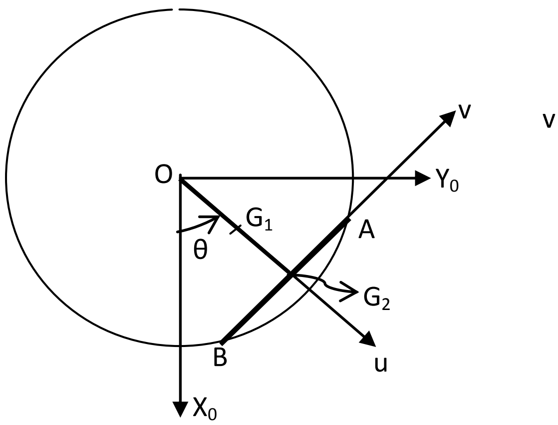
L'équation 6 donne : $\dot{\varphi} = C^{te}$

<u>Exercice 3</u>

On considère un cerceau (C) de centre O, de rayon R, immobile dans un plan vertical fixe (O, x_0, y_0) d'un repère fixe orthonormé direct R_0(O, x_0, y_0, z_0) où Ox_0 est la verticale descendante. A l'intérieur de (C) se trouve une tige homogène (T_2) de longueur 2l et de masse m_2. Les extrémités A et B de cette tige restent constamment en contact sans frottement avec (C) Une seconde tige (T_1) homogène, de masse m_1, joint le centre G_2 de (T_2) au centre O de (C). Les deux tiges constituent le système (Σ). Toutes les liaisons sont parfaites. On définit aussi un repère orthonormé direct R_1(O,u,v,z_0) lié au système (Σ), tel que l'angle que fait Ox_0 avec Ou est égale à θ.

1- Exprimer la puissance de la résultante des forces appliquées au système.
2- Donner l'expression de l'énergie potentielle de(Σ).
3- Donner l'expression de l'énergie cinétique de (Σ).par rapport à R_0
4- Etablir les équations du mouvement.

Solution



1- Coordonnées de G_2 et de G_1

Considérons le triangle rectangle OG_2B rectangle en G_2 :

$$\overline{OB}^2 = \overline{OG_2}^2 + \overline{G_2B}^2 \Rightarrow$$
$$\overline{OG_2} = \sqrt{R^2 - l^2} \Rightarrow \overrightarrow{OG_2} = \sqrt{R^2 - l^2}\,\vec{u}$$
$$\overrightarrow{OG_2} = \sqrt{R^2 - l^2}\,(cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + sin\theta\,\overrightarrow{y_0})$$

Et $\overrightarrow{OG_1} = \frac{\sqrt{R^2-l^2}}{2}\,(cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + sin\theta\,\overrightarrow{y_0})$

2- Résultante des forces appliquées au système

Les forces qui s'exercent sur le système sont :

Poids de T_1 : $\overrightarrow{P_1}$; Poids de T_2 : $\overrightarrow{P_2}$; Réaction en O : $\overrightarrow{R_0}$; Réaction en A : $\overrightarrow{R_A}$

Et Réaction en B : $\overrightarrow{R_B}$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{R_0} + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B}$$

Puissance de la résultante des forces appliquées au système

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{F_{ext}}) = \mathcal{P}(\overrightarrow{P_1}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{P_2}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{R_0}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{R_A}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{R_B})$$

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{R_0}) = \overrightarrow{R_0}\cdot\vec{V}\left({}^{O}/_{R_0}\right) = \vec{0}\ ;\ \mathcal{P}(\overrightarrow{R_A}) = \overrightarrow{R_A}\cdot\vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right) = \vec{0}\ ;\ \mathcal{P}(\overrightarrow{R_B}) = \overrightarrow{R_B}\cdot\vec{V}\left({}^{B}/_{R_0}\right) = \vec{0}$$

Car O fixe, et il n'y a pas de frottement en A et B ce qui se traduit par

$\overrightarrow{R_A} \perp \vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right)$ $\ et\ \overrightarrow{R_B} \perp \vec{V}\left({}^{B}/_{R_0}\right)$

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{P_1}) = \overrightarrow{P_1}\cdot\vec{V}\left({}^{G_1}/_{R_0}\right) = m_1 g\overrightarrow{x_0}\frac{\sqrt{R^2 - l^2}}{2}\dot{\theta}(-sin\theta\,\overrightarrow{x_0} + cos\theta\,\overrightarrow{y_0})$$
$$= -m_1 g\frac{\sqrt{R^2 - l^2}}{2}\dot{\theta}sin\theta$$
$$\mathcal{P}(\overrightarrow{P_2}) = \overrightarrow{P_2}\cdot\vec{V}\left({}^{G_2}/_{R_0}\right) = m_2 g\overrightarrow{x_0}\sqrt{R^2 - l^2}\,\dot{\theta}(-sin\theta\,\overrightarrow{x_0} + cos\theta\,\overrightarrow{y_0})$$
$$= -m_2 g\sqrt{R^2 - l^2}\,\dot{\theta}sin\theta$$
$$\mathcal{P}_{tot} = \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\sqrt{R^2 - l^2}\ g\dot{\theta}sin\theta$$

3- Energie potentielle

L'énergie potentielle du système est donnée par :

$$E_p = \int -\mathcal{P}_{Tot}dt = \int \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\sqrt{R^2 - l^2}\ g\dot{\theta}sin\theta\ dt$$
$$E_p = -\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\sqrt{R^2 - l^2}\ \mathrm{g\cos\theta} + \mathrm{C^{te}}$$

4- Energie cinétique.du système.

$$E_C\left({}^{\Sigma}/_{R_0}\right) = E_C\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) + E_C\left({}^{T_2}/_{R_0}\right)$$

- Energie cinétique de T_1

$$E_C\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) = \frac{1}{2}\ {}^{t}\vec{\Omega}\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) M_o^{(T_1)}\,\vec{\Omega}\left({}^{T_1}/_{R_0}\right)$$

Calculons la matrice d'inertie de la tige T_1 au point O. La tige T_1 est suivant Ou (Ou axe de symétrie), un élément de longueur dx a une masse dm=λdx.

On a donc A=0 et B=C=$\int_0^{\sqrt{R^2-l^2}} \lambda x^2\,dx = \frac{\lambda}{3}\left[\sqrt{R^2 - l^2}\right]^3 = \frac{m_1}{3}\,(R^2 - l^2)^2$

Ce qui donne : $M_O^{(T_1)} = \frac{m_1}{3}\ (R^2 - l^2)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(u,v,z)}$

$$\Rightarrow E_C\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) = \frac{m_1}{6}\ (R^2 - l^2)^2 \dot{\theta}^2$$

- Energie cinétique de T_2

$$E_C\left({}^{T_2}/_{R_0}\right) = \frac{1}{2} m_2 \vec{V}^2\left({}^{G_2}/_{R_0}\right) + \frac{1}{2}\ {}^t\vec{\Omega}\left({}^{T_2}/_{R_0}\right) M_{G_2}^{(T_2)}\ \vec{\Omega}\left({}^{T_2}/_{R_0}\right)$$

Calculons la matrice d'inertie au point G_2 dans le repère (u, v, z), la tige T_2 est suivant Ov (Ov axe de symétrie)

$$A = C = \int_{-l}^{l} y^2\, dm = \lambda \int_{-l}^{l} y^2 dy\ = \frac{m_2}{3} l^2 \quad ; \qquad B = 0$$

$$M_{G_2}^{(T_2)} = \frac{m_2}{3}\ l^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(u,v,z)} \qquad et \qquad \vec{\Omega}\left({}^{T_2}/_{R_0}\right) = \dot{\theta}\ \vec{z} \quad \Rightarrow$$

$$E_C\left({}^{T_2}/_{R_0}\right) = \frac{m_2}{2} \dot{\theta}^2 \left(R^2 - \frac{2}{3} l^2\right)$$

- Energie cinétique du système

$$E_C\left({}^{\Sigma}/_{R_0}\right) = \frac{m_1}{6}\ (R^2 - l^2)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\theta}^2 \left(R^2 - \frac{2}{3} l^2\right)$$

$$E_C\left({}^{\Sigma}/_{R_0}\right) = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\left[R^2\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) - \frac{l^2}{3}(m_1 + 2m_2)\right]$$

5- Equation du mouvement

Pas de frottement, et toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle, donc l'énergie mécanique est constante et par conséquent sa dérivée par rapport au temps est nulle.

$$E_C\left({}^{\Sigma}/_{R_0}\right) + E_p = E_m \Rightarrow \frac{dE_C\left({}^{\Sigma}/_{R_0}\right)}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} = \mathcal{P}_{Tot} \Rightarrow$$

$$\left[R^2\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) - \frac{l^2}{3}(m_1 + 2m_2)\right]\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\sqrt{R^2 - l^2}\ \mathrm{g}\dot{\theta} sin\theta \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{A}\ sin\theta = 0$$

Avec : A=$R^2\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) - \frac{l^2}{3}(m_1 + 2m_2) \quad et \quad B = \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\sqrt{R^2 - l^2}\ \ \mathrm{g}\, sin\theta$

Exercice 4

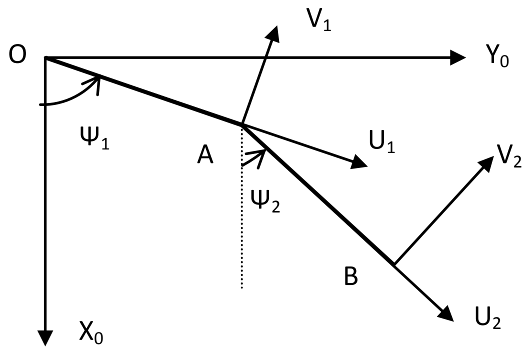
Dans le plan vertical (Ox, Oy) d'un repère fixe orthonormé direct galiléen R_0(O, x, y, z) où Ox est la verticale ascendante, on considère le mouvement d'un pendule double (S) constitué de deux tiges rectilignes homogènes (OA) et (OB), respectivement de masses m_1 et m_2, de longueurs l_1 et l_2, et de centres de gravités G_1 et G_2, articulées en A, où nous avons une articulation parfaite.

1- Déterminer le moment cinétique en O de la tige (OA) par rapport à R_0.
2- Déterminer le moment dynamique en O de la tige (OA) par rapport à R_0.
3- Donner l'expression de l'énergie cinétique de (AB) par rapport à R_0.
4- Déterminer le moment cinétique en G_2 de la tige (OA) par rapport à R_0.
5- Déterminer le moment dynamique en G_2 de la tige (AB) par rapport à R_0.
6- Donner l'expression de l'énergie cinétique de (AB) par rapport à R_0.
7- Ecrire, à l'aide des théorèmes généraux, les équations du mouvement.

8- Donner l'expression de l'énergie cinétique de (S) par rapport à R_0.

9- Donner l'expression de l'énergie potentielle de (S .

Solution



1- Moment cinétique en O de (OA)

$$\vec{\sigma}\left(OA/_{R_0}, O\right) = M_0\,(OA)\vec{\Omega}\left(OA/_{R_0}\right)$$

$$M_0\,(OA) = \frac{m_1 l_1^2}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{(u_1,v_1,z_0)} \Rightarrow$$

$$\vec{\sigma}\left(OA/_{R_0}, O\right) = \frac{m_1 l_1^2}{3}\dot{\psi}_1\vec{k}_0$$

2- Moment dynamique de OA en O

$$\vec{\delta}\left(OA/_{R_0}, O\right) = \left.\frac{d\vec{\sigma}\left(OA/_{R_0}, O\right)}{dt}\right|_{R_0} = \frac{m_1 l_1^2}{3}\,\ddot{\psi}_1\,\vec{k}_0$$

3- Energie cinétique de OA

$$E_C\left(OA/_{R_0}\right) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(OA/_{R_0}\right)\vec{\sigma}\left(OA/_{R_0}, O\right) = \frac{m_1 l_1^2}{6}\,\dot{\psi}_1{}^2$$

4- Moment cinétique en G_2 de AB

$$\vec{\sigma}\left(OA/_{R_0}, G_2\right) = M_{G_2}\,(AB)\vec{\Omega}\left(AB/_{R_0}\right)$$

$$M_{G_2}\,(AB) = \frac{m_2 l_2^2}{12}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{(u_2,v_2,z_0)} \Rightarrow \quad \vec{\sigma}\left(OA/_{R_0}, G_2\right) = \frac{m_2 l_2^2}{12}\,\dot{\psi}_2\vec{k}_0$$

5- Moment dynamique de AB en G_2

$$\vec{\delta}\left(AB/_{R_0}, G_2\right) = \left.\frac{d\vec{\sigma}\left(AB/_{R_0}, G_2\right)}{dt}\right|_{R_0} = \frac{m_2 l_2^2}{12}\,\ddot{\psi}_2\,\vec{k}_0$$

6- Energie cinétique de AB

$$E_C\left(AB/_{R_0}\right) = \frac{1}{2}m_2\vec{V}^2\left(G_2/_{R_0}\right) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(AB/_{R_0}\right)\vec{\sigma}\left(G_2, AB/_{R_0}\right)$$

$$\vec{V}\left(G_2/_{R_0}\right) = \vec{V}\left(A/_{R_0}\right) + \overrightarrow{G_2A}\wedge\vec{\Omega}\left(AB/_{R_0}\right) \;\; or \;\; \vec{V}\left(A/_{R_0}\right) = \overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}\left(OA/_{R_0}\right) = l_1\dot{\psi}_1\overrightarrow{v_1}$$

$$et \quad \overrightarrow{G_2A}\wedge\vec{\Omega}\left(AB/_{R_0}\right) = -\frac{l_2}{2}\,\overrightarrow{u_2}\wedge\dot{\psi}_2\overrightarrow{k_0} = \frac{l_2}{2}\,\dot{\psi}_2\overrightarrow{v_2}$$

$$avec: \overrightarrow{v_1} = -sin\psi_1\overrightarrow{x_0} + cos\psi_1\overrightarrow{y_0} \quad et \quad \overrightarrow{v_2} = -sin\psi_2\,\overrightarrow{x_0} + cos\psi_2\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{V}\left(G_2/_{R_0}\right) = -\left(l_1\dot{\psi}_1\,sin\psi_1 + \frac{l_2}{2}\,\dot{\psi}_2\,sin\psi_2\right)\overrightarrow{x_0} + \left(l_1\dot{\psi}_1\,cos\psi_1 + \frac{l_2}{2}\,\dot{\psi}_2\,cos\psi_2\right)\overrightarrow{y_0}$$

$$E_C\left(AB/_{R_0}\right) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\,\dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{3}l_2^2\dot{\psi}_2^2 + l_1 l_2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2 cos(\psi_1 - \psi_2)\right]$$

7- Equations du mouvement

- Tige OA

Les forces qui s'exercent sur la tige OA sont :

Le poids $\vec{P}_1 = m_1\,g\vec{x}_0 = m_1 g\,(cos\psi_1\,\vec{u}_1 - sin\psi_1\,\vec{v}_1)$

La réaction en O $\vec{R}_0 = R_0\vec{u}_1 + R'_0\vec{v}_1$

La réaction en A $\vec{R}_A = R_A\vec{u}_1 + R'_A\vec{v}_1$

L'accélération du centre de masse G$_1$ de OA est : $\vec{\gamma}\left({G_1}/{R_0}\right) = \left.\frac{d^2\,\overrightarrow{OG_1}}{dt^2}\right|_{R_0}$

$$\vec{\gamma}\left({G_1}/{R_0}\right) = \frac{l_1}{2}\left.\frac{d^2\,\overrightarrow{u_1}}{dt^2}\right|_{R_0} = \frac{l_1}{2}\left(-\dot{\psi}_1^2\vec{u}_1 + \ddot{\psi}_1\vec{v}_1\right)$$

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$m_1\vec{\gamma}\left({G_1}/{R_0}\right) = \vec{P}_1 + \vec{R}_0 + \vec{R}_A \Rightarrow \begin{cases} -\frac{m_1}{2}l_1\dot{\psi}_1^2 = R_0 + R_A + m_1\, g\, cos\psi_1 & équation\ 1 \\ \frac{m_1}{2}l_1\ddot{\psi}_1 = R_0' + R_A' + m_1\, g\, cos\psi_1 & équation\ 2 \end{cases}$$

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_0}\ \vec{F}_{ext} = \vec{\delta}(0, OA/R_0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 g\,\vec{x}_0 + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_A = \frac{m_1}{3}l_1^2\ddot{\psi}_1$$

$\frac{m_1}{3}l_1^2\ddot{\psi}_1 = -\frac{m_1}{2}l_1 g\, sin\psi_1 + l_1 R_A' \quad \Rightarrow \quad R_A' = \frac{m_1}{3}l_1\ddot{\psi}_1 + \frac{m_1}{2}g\, sin\psi_1 \quad équation\ 3$

- Tige AB

Les forces extérieures qui s'exercent sur AB sont :

Le poids : $\vec{P}_2 = m_2\, g\, \vec{x}_0 = m_2\, g\,(cos\psi_1\,\vec{u}_1 - sin\psi_1\,\vec{v}_1)$

La réaction en A : $\vec{R}_A = -R_A\vec{u}_1 - R_A'\,\vec{v}_1$

L'accélération du centre de masse G$_2$ de AB est : $\vec{\gamma}\left({G_2}/{R_0}\right) = \left.\frac{d\,\vec{V}\left({G_2}/{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0}$

Or $\vec{V}\left({G_2}/{R_0}\right) = l_1\dot{\psi}_1\overrightarrow{v_1} + \frac{l_2}{2}\,\dot{\psi}_2\overrightarrow{v_2} = l_1\dot{\psi}_1\overrightarrow{v_1} + \frac{l_2}{2}\,\dot{\psi}_2[cos(\psi_1-\psi_2)\overrightarrow{v_1} + sin(\psi_1-\psi_2)\overrightarrow{u_1}]$

$$\vec{V}\left({G_2}/{R_0}\right) = \frac{l_2}{2}\,\dot{\psi}_2 sin(\psi_1-\psi_2)\overrightarrow{u_1} + \left[l_1\dot{\psi}_1 + \frac{l_2}{2}\,\dot{\psi}_2 cos(\psi_1-\psi_2)\right]\overrightarrow{v_1}$$

$$\vec{\gamma}\left({G_2}/{R_0}\right) = \left.\frac{d\,\vec{V}\left({G_2}/{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}\left({R_1}/{R_0}\right) \wedge \vec{V}\left({G_2}/{R_0}\right)$$

$$\vec{\gamma}\left({G_2}/{R_0}\right) = \begin{pmatrix} \frac{l_2}{2}\ddot{\psi}_2\, sin(\psi_1-\psi_2) - \frac{l_2}{2}\dot{\psi}_2^2\, cos(\psi_1-\psi_2) - l_1\dot{\psi}_1^2 \\ l_1\ddot{\psi}_1 + \frac{l_2}{2}\ddot{\psi}_2\, cos(\psi_1-\psi_2) + \frac{l_2}{2}\dot{\psi}_2^2\, sin(\psi_1-\psi_2) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

- La quantité d'accélération du centre de masse est égale à la somme des forces extérieures appliquées à la tige AB.

$$m_2\vec{\gamma}\left({G_2}/{R_0}\right) = \vec{\mathrm{P}}_2 + \vec{\mathrm{R}}_\mathrm{A}$$

$$\begin{cases} m_2\, gcos\psi_1 - R_A = m_2\left(\frac{l_2}{2}\ddot{\psi}_2\, sin(\psi_1-\psi_2) - \frac{l_2}{2}\dot{\psi}_2^2\, cos(\psi_1-\psi_2) - l_1\dot{\psi}_1^2\right) & équat\ 4 \\ -m_2\, gsin\psi_1 - R_A' = m_2\left(l_1\ddot{\psi}_1 + \frac{l_2}{2}\ddot{\psi}_2\, cos(\psi_1-\psi_2) + \frac{l_2}{2}\dot{\psi}_2^2\, sin(\psi_1-\psi_2)\right) & équat\ 5 \end{cases}$$

- Le moment dynamique de la tige en G$_2$ est égal à la somme des moments des forces en ce point G$_2$.

$$\vec{\delta}\left(G_2, {AB}/{R_0}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G_2}\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G_2}\overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G_2}\overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{G_2A} \wedge \overrightarrow{R_A} = \frac{l_2}{2}\overrightarrow{u_2} \wedge (\,R_A\overrightarrow{u_1} + R_A'\overrightarrow{v_1}\,)$$

$$= \frac{l_2}{2}[cos(\psi_1-\psi_2)\overrightarrow{u_1} - sin(\psi_1-\psi_2)]\overrightarrow{v_1} \ \wedge (\,R_A\overrightarrow{u_1} + R_A'\overrightarrow{v_1}\,)$$

$$\Rightarrow \quad R_A'\, cos(\psi_1-\psi_2)\overrightarrow{u_1} + R_A\, sin(\psi_1-\psi_2) = \frac{m_2}{6}\,\ddot{\psi}_2 \qquad équation\ \ 6$$

En remplaçant R_A' par sa valeur (donnée par l'équation 3) dans l'équation 5, on obtient :

$$\ddot{\psi}_1 l_1\left(m_2+\frac{m_1}{3}\right)+\frac{m_2 l_2}{2}\left[\ddot{\psi}_2 cos(\psi_1-\psi_2)+\dot{\psi}_2^2 sin(\psi_1-\psi_2)\right]+g\left(m_2+\frac{m_1}{2}\right)sin\psi_1=0 \; équ\ 7$$

Si on multiplie l'équation **4** par $\frac{l_2}{2}sin(\psi_1-\psi_2)$ et on lui ajoute l'équation **6**, on obtient :

$$\frac{m_2 l_2}{2} g\ cos\psi_1 sin(\psi_1-\psi_2)+\frac{m_1 l_1 l_2}{6}\ddot{\psi}_1 cos(\psi_1-\psi_2)+\frac{m_1 l_2}{2} sin\psi_1 cos(\psi_1-\psi_2)$$
$$=\frac{m_2 l_2^2}{12}\ \ddot{\psi}_2[1+6sin^2(\psi_1-\psi_2)]-\frac{m_2 l_2^2}{4}\dot{\psi}_2^2\ sin\big(2(\psi_1-\psi_2)\big)$$
$$-\frac{m_2 l_1 l_2}{2}\dot{\psi}_1^2\ sin(\psi_1-\psi_2) \qquad équ\ 8$$

Les équations **7** et **8** sont les équations du mouvement du bi-pendule étudié.

8- <u>Energie cinétique</u>

E_C(S/R$_0$)=E_C(OA/R$_0$)+E_C(AB/R$_0$)

$$E_C\left({}^{S}/_{R_0}\right)=\frac{m_1}{6}l_1^2\dot{\psi}_1^2+\frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\psi}_1^2+\frac{1}{3}l_2^2\dot{\psi}_2^2+l_1 l_2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2\ cos(\psi_1-\psi_2)\right]$$

$$E_C\left({}^{S}/_{R_0}\right)=\frac{l_1^2}{2}\dot{\psi}_1^2\left(m_2+\frac{m_1}{3}\right)+\frac{m_2}{6}l_2^2\dot{\psi}_2^2+\frac{m_2}{2}l_1 l_2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2\ cos(\psi_1-\psi_2)$$

9- <u>Energie potentielle</u>

La dérivée de l'énergie potentielle par rapport au temps est égale à la puissance totale des forces appliquées au système affectée du signe moins.

$\frac{dE_p}{dt}=-\mathcal{P}_{Tot}=-\mathcal{P}(\vec{P}_1)-\mathcal{P}(\vec{P}_2)-\mathcal{P}(\vec{R}_0)-\mathcal{P}(\vec{R}_A)$

Or $\mathcal{P}(\vec{R}_0)=\vec{R}_0\cdot\vec{V}\left({}^{O}/_{R_0}\right)+\vec{\Omega}\left({}^{OA}/_{R_0}\right)\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{R}_0)=0\ \ car\ \ \vec{V}\left({}^{O}/_{R_0}\right)=\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{R}_0)=\vec{0}$

$\mathcal{P}(\vec{R}_A)=\mathcal{P}(\vec{R}_{OA\to AB}+\vec{R}_{AB\to OA})=0$

$\mathcal{P}(\vec{P}_1)=\vec{P}_1\cdot\vec{V}\left({}^{G_1}/_{R_0}\right)+\vec{\Omega}\left({}^{OA}/_{R_0}\right)\overrightarrow{\mathcal{M}_{G_1}}(\vec{P}_1)=-\frac{m_1 g\ l_1}{2}\dot{\psi}_1\ sin\psi_1\ \ car\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G_1}}(\vec{P}_1)=0$

$\mathcal{P}(\vec{P}_2)=\vec{P}_2\cdot\vec{V}\left({}^{G_2}/_{R_0}\right)+\vec{\Omega}\left({}^{AB}/_{R_0}\right)\overrightarrow{\mathcal{M}_{G_2}}(\vec{P}_2)=-m_2\ g\left(l_1\dot{\psi}_1\ sin\psi_1+\frac{l_2}{2}\dot{\psi}_2\ sin\psi_2\right)$

$$\frac{dE_p}{dt}=-\mathcal{P}_{Tot}=-\frac{m_1 g\ l_1}{2}\dot{\psi}_1\ sin\psi_1-m_2\ g\left(l_1\dot{\psi}_1\ sin\psi_1+\frac{l_2}{2}\dot{\psi}_2\ sin\psi_2\right)$$

$$E_p=-gl_1\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\ cos\psi_1-\frac{m_2 l_2}{2}g\ cos\psi_2+constante$$

<u>Exercice 5</u>

Soit un système constitué d'une tige filetée OA liée au repère $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$. La tige de masse négligeable tourne autour de l'axe $\overrightarrow{z_0}=\overrightarrow{z_1}$ avec une vitesse de rotation $\dot{\alpha}=C^{te}$.

Un cylindre de masse m, de hauteur h et de centre d'inertie G, lié au repère $R_3(G,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$ s'enroule autour de cette tige et il a deux mouvements :

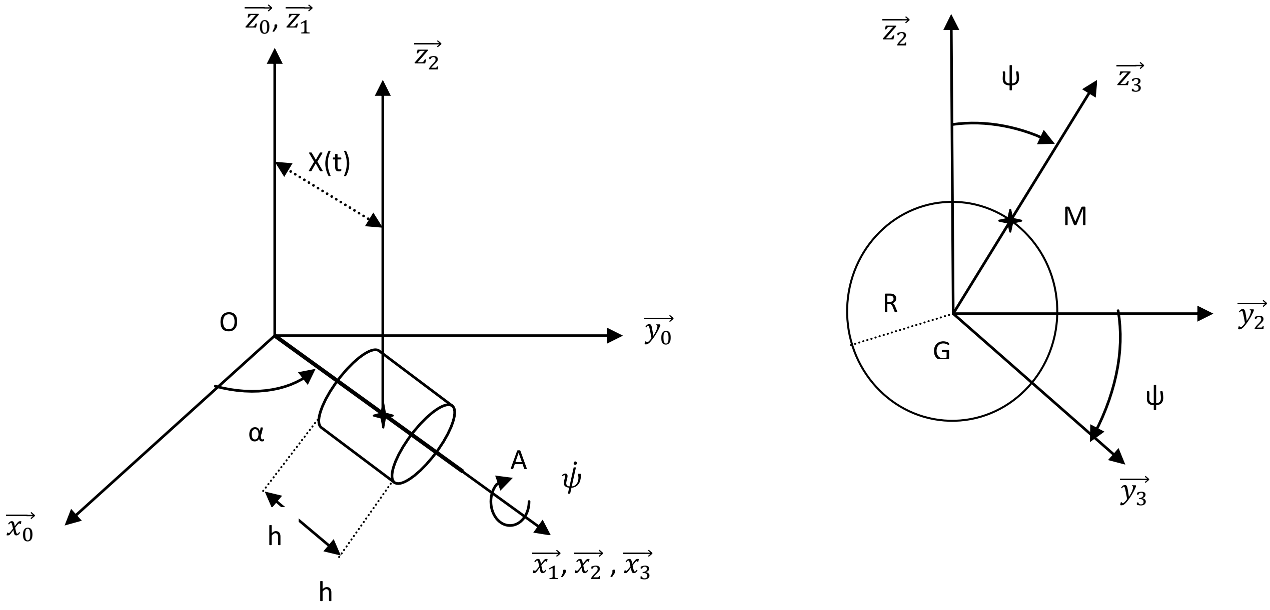
- Un mouvement de translation de son centre d'inertie G lié au repère $R_2(G,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$, suivant l'axe de la tige $\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{x_2}$ avec une vitesse linéaire $\dot{x}(t)$.
- Un mouvement de rotation autour de l'axe $\overrightarrow{x_2}$ avec une vitesse de rotation $\dot{\psi}=C^{te}$ et tel que : $(\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_3})=(\overrightarrow{z_2},\overrightarrow{z_3})=\psi$

On prendra R$_2$ comme repère relatif et de projection. Déterminer :

1- Le tenseur d'inertie du cylindre au point G par rapport aux repères R$_3$ et R$_2$.

2- La vitesse de rotation instantanée du cylindre par rapport au repère R$_0$.

3- La vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement.
4- Les torseurs, cinétique et dynamique, au point O par rapport au repère R_0.
5- L'énergie cinétique du système.



Solution

1- Matrice d'inertie en G

L'axe Ox_1 est axe de révolution donc les moments d'inertie par rapport aux axes Oy_2 et Oz_2 sont égaux, et la matrice s'écrit : $M_G(C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{R_2}$ $\quad avec\ B = \frac{A}{2} + \iiint x^2\, dm$

$$A = \iiint (y^2 + z^2) dm = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx = \frac{1}{2} m R^2 \quad avec \quad m = \rho \pi R^2 h$$

$$\iiint x^2 dm = \rho \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 dx = \frac{m}{12} h^2 \quad Donc\ \ B = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$

$$M_G(C) = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} 2R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) \end{pmatrix}_{R_2}$$

2- Vitesse de rotation du cylindre par rapport à R_0

$$\vec{\Omega}\left({}^{C}/_{R_0}\right) = -\dot{\psi}\, \vec{x_1} + \dot{\alpha}\, \vec{z_1} = -\dot{\psi}\, \vec{x_2} + \dot{\alpha}\, \vec{z_2}$$

3- Vitesse et accélération de M par composition de mouvement

- Vitesse relative de M

$$\overrightarrow{GM} = R\vec{z_3} \;\Rightarrow\; \vec{V_r}\left({}^{M}/_{R_2}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right|_{R_2} = R\vec{\Omega}\left({}^{R_3}/_{R_2}\right) \wedge \vec{z_3} = -R\,\dot{\psi}\vec{x_3} \wedge \vec{z_3} = -R\dot{\psi}\,\vec{y_3}$$

$$\vec{V_r}\left({}^{M}/_{R_2}\right) = R\dot{\psi}(cos\psi\,\overrightarrow{y_2} - sin\psi\,\overrightarrow{z_2})$$

- Vitesse d'entraînement de M

$$\vec{V_e}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{R_0} + \vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GM} \quad or \quad \vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_1} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_2} \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = x\overrightarrow{x_2} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\overrightarrow{x_2} + x\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\overrightarrow{x_2} + x\dot{\alpha}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{x_2} = \dot{x}\overrightarrow{x_2} + x\dot{\alpha}\overrightarrow{y_2} \quad et$$

$$\overrightarrow{GM} = R\overrightarrow{z_3} = R(cos\psi\,\overrightarrow{z_2} + sin\psi\,\overrightarrow{y_2}) \Rightarrow$$

$$\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GM} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_2} \wedge \; R(cos\psi\,\overrightarrow{z_2} + sin\psi\,\overrightarrow{y_2}) = -R\dot{\alpha}\,sin\psi\,\overrightarrow{x_2}$$

$$\vec{V_e}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = (\dot{x} - R\dot{\alpha}\,sin\psi\;)\overrightarrow{x_2} + x\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_2}$$

- Vitesse de M

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \vec{V_r}\left({}^{M}/_{R_2}\right) + \vec{V_e}\left({}^{M}/_{R_0}\right)$$

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = (\dot{x} - R\dot{\alpha}\,sin\psi\;)\overrightarrow{x_2} + \left(x\dot{\alpha} + R\dot{\psi}cos\psi\right)\overrightarrow{y_2} - R\dot{\psi}\,sin\psi\,\overrightarrow{z_2}$$

- Accélération relative de M

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M}/_{R_2}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{M}/_{R_2}\right)}{dt}\right|_{R_2} \qquad avec\;\dot{\psi} = C^{te}$$

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M}/_{R_2}\right) = -R\,\dot{\psi}^2(\,sin\psi\overrightarrow{y_2} + \;cos\psi\overrightarrow{z_2})$$

- Accélération d'entraînement de M

$$\overrightarrow{\Gamma_e}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{R_0} + \frac{d\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right)}{dt} \wedge \overrightarrow{GM} + \;\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \left[\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GM}\right]$$

Or $\quad \vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{Cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right)}{dt} = \vec{0} \quad et$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right|_{R_0} = \ddot{x}\overrightarrow{x_2} + \dot{x}\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_0} + \dot{x}\dot{\alpha}\overrightarrow{y_2} + x\dot{\alpha}\left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{R_0} = (\ddot{x} - x\dot{\alpha}^2)\overrightarrow{x_2} + 2\dot{x}\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \left[\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GM}\right] = \vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge -R\dot{\alpha}\,sin\psi\,\overrightarrow{x_2} = -R\dot{\alpha}^2\,sin\psi\,\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_e}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = (\ddot{x} - x\dot{\alpha}^2)\overrightarrow{x_2} + \dot{\alpha}(2\dot{x} \; - R\dot{\alpha}\,sin\psi)\overrightarrow{y_2}$$

- Accélération de Coriolis de M

$$\overrightarrow{\Gamma_C}\,\left({}^{M}/_{R_0}\right) = 2\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \vec{V_r}\left({}^{M}/_{R_2}\right) = 2\dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_2} \wedge R\dot{\psi}(cos\psi\,\overrightarrow{y_2} - sin\psi\,\overrightarrow{z_2})$$

$$\overrightarrow{\Gamma_C}\,\left({}^{M}/_{R_0}\right) = -2R\dot{\alpha}\,\dot{\psi}cos\psi\,\overrightarrow{x_2}$$

- Accélération de M

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M}/_{R_0}\right)=\begin{pmatrix}\ddot{x}-x\dot{\alpha}^2-2R\dot{\alpha}\dot{\psi}\cos\psi\\ 2\dot{x}\dot{\alpha}-R\left(\dot{\alpha}^2+\dot{\psi}^2\right)\sin\psi\\ -R\dot{\psi}^2\cos\psi\end{pmatrix}_{R_2}$$

4- <u>Torseur cinétique au point O</u>

$$[\mathcal{T}_C]_O=\begin{cases}\overrightarrow{R_C}=m\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right)=m(\dot{x}\overrightarrow{x_2}+x\dot{\alpha}\overrightarrow{y_2})\\ \vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},G\right)+\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{R_C}\end{cases}$$

Or $\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},G\right)=M_G^{(S)}\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right)=\frac{m}{4}\begin{pmatrix}2R^2&0&0\\0&\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right)&0\\0&0&\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right)\end{pmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\\0\\\dot{\alpha}\end{pmatrix}_{R_2}$

$$\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},G\right)=\frac{m}{4}\left[-2R^2\dot{\psi}\overrightarrow{x_2}+\dot{\alpha}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right)\overrightarrow{z_2}\right]$$

$$\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{R_C}=x\overrightarrow{x_2}\wedge m(\dot{x}\overrightarrow{x_2}+x\dot{\alpha}\overrightarrow{y_2})=mx^2\,\dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_2}$$

$$\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=-\frac{m}{2}R^2\dot{\psi}\overrightarrow{x_2}+m\left[\frac{\dot{\alpha}}{4}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right)+x^2\,\dot{\alpha}\right]\overrightarrow{z_2}$$

$$[\mathcal{T}_C]_O=\begin{cases}\overrightarrow{R_C}=m(\dot{x}\overrightarrow{x_2}+x\dot{\alpha}\overrightarrow{y_2})\\ \vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=-\frac{m}{2}R^2\dot{\psi}\overrightarrow{x_2}+m\,\dot{\alpha}\left[\frac{1}{4}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right)+x^2\right]\overrightarrow{z_2}\end{cases}$$

- <u>Torseur dynamique au point O</u>

$$[\mathcal{T}_d]_O=\begin{cases}\overrightarrow{R_d}=m\vec{\Gamma}\left({}^{G}/_{R_0}\right)=m[(\ddot{x}-x\dot{\alpha}^2)\overrightarrow{x_2}+2\dot{x}\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_2}]\\ \vec{\delta}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=\left.\frac{d\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)}{dt}\right|_{R_0}+\vec{V}\left({}^{O}/_{R_0}\right)\wedge m\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right)\end{cases}$$

Or $\vec{V}\left({}^{O}/_{R_0}\right)=\vec{0}$, $donc$

$$\vec{\delta}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=\left.\frac{d\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)}{dt}\right|_{R_0}=\left.\frac{d\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)}{dt}\right|_{R_2}+\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right)\wedge\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)$$

Or $\dot{\psi}=C^{te}\quad et\quad\dot{\alpha}=C^{te}\rightarrow\left.\frac{d\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)}{dt}\right|_{R_2}=2m\dot{\alpha}\,\dot{x}x\,\overrightarrow{z_2}\quad et$

$$\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right)\wedge\vec{\sigma}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=\dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_2}\wedge\left[-\frac{m}{2}R^2\dot{\psi}\overrightarrow{x_2}+m\,\dot{\alpha}\left[\frac{1}{4}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right)+x^2\right]\overrightarrow{z_2}=\right]-\frac{m}{2}R^2\dot{\psi}\dot{\alpha}\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{\delta}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=m\dot{\alpha}\left[-\frac{1}{2}R^2\,\dot{\psi}\,\overrightarrow{y_2}+2x\dot{x}\overrightarrow{z_2}\right]$$

$$[\mathcal{T}_d]_O=\begin{cases}\overrightarrow{R_d}=m[(\ddot{x}-x\dot{\alpha}^2)\overrightarrow{x_2}+2\dot{x}\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_2}]\\ \vec{\delta}\left({}^{S}/_{R_0},O\right)=m\dot{\alpha}\left[-\frac{1}{2}R^2\,\dot{\psi}\,\overrightarrow{y_2}+2x\dot{x}\overrightarrow{z_2}\right]\end{cases}$$

5- <u>Energie cinétique</u>

L'énergie cinétique du système se réduit à l'énergie cinétique du cylindre car la tige a une masse négligeable.

$$E_C\left({}^{S}/_{R_0}\right) = \frac{1}{2}\ {}^{t}\vec{\Omega}\ \left({}^{S}/_{R_0}\right) M_G^{(S)}\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) + \frac{1}{2}m\vec{V}^2\left({}^{G}/_{R_0}\right)$$

$$E_C\left({}^{S}/_{R_0}\right) = \frac{m}{8}\left[2R^2\,\dot{\psi}^2 + \dot{\alpha}^2\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)\right] + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\,\dot{\alpha}^2)$$

Exercice-6

On considère le système matériel (Σ) composé des solides suivants :

(S_1) : est un coulisseau de masse m_1, de centre de masse G_1 lié au repère R_1 en mouvement de translation rectiligne par rapport à un repère fixe $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ suivant l'axe $O\overrightarrow{z_0}$.

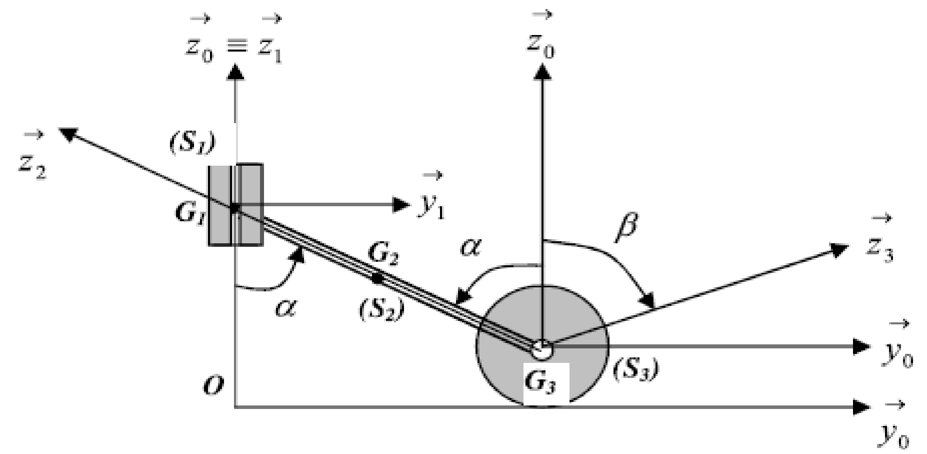
(S_2) : est une barre homogène de longueur $2b$, de masse m_2, de centre de masse G_2 lié à R_2 ;

(S_3) : est un disque homogène de rayon R, de masse m_3, de centre de masse G_3 lié à R_3(voir figure).On donne les matrices d'inertie :

$$M_{G_2}(S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2} \qquad M_{G_3}(S_3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{R_3}$$

Déterminer :

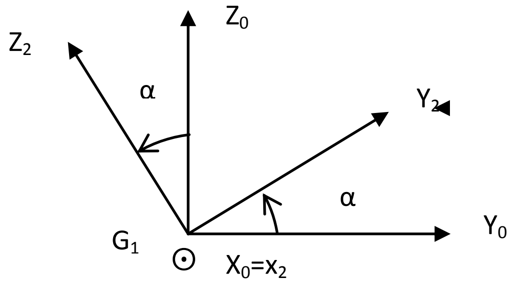
1. Les vitesses et les accélérations des points G_i avec $i = 1,2,3$;
2. Les moments cinétiques $\vec{\sigma}(G_i, S_i / R_0)$ des solides (S_i) avec $i = 1,2,3$;
3. Les moments dynamiques $\vec{\delta}(G_i, S_i / R_0)$ des solides (S_i) avec $i = 1,2,3$;
4. En déduire le moment dynamique du système au point G_1 : $\vec{\delta}(G_1, \Sigma / R_0)$ exprimé dans R_0.
5. Calculer l'énergie cinétique du système $E_c(\Sigma/R_0)$ par rapport à R_0 .

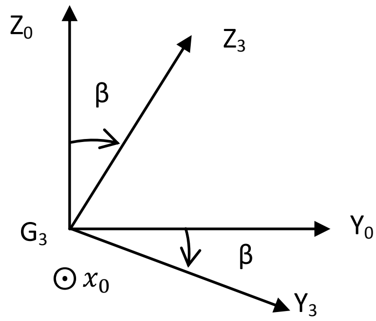


Solution

R_0 repère fixe, R_1 est en translation par rapport au repère R_0

R_2 est en rotation par rapport à R_0, et R_3 est aussi en rotation par rapport à R_0.





$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{0} \qquad \vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{x_0} \qquad \vec{\Omega}(R_3/R_0) = -\dot{\beta}\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R + 2b\cos\alpha \end{pmatrix}_{R_0} \quad \overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\ sin\alpha \\ R + b\ cos\alpha \end{pmatrix}_{R_0} \quad \overrightarrow{OG_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\ sin\alpha \\ R \end{pmatrix}_{R_0} \quad \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\ sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

1- vitesses et les accélérations des points G_i avec $i = 1,2,3$

- Vitesses des centres d'inertie G_i (i=1, 2, 3)

$$\vec{V}(G_1/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2b\ \dot{\alpha}\ sin\alpha \end{pmatrix}_{R_0} \qquad \vec{V}(G_2/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ b\ \dot{\alpha}\ cos\alpha \\ -b\ \dot{\alpha}\ sin\alpha \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}(G_3/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\ \dot{\alpha}\ cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

- Accélérations des centres de masse G_i (i=1, 2, 3)

$$\vec{\gamma}(G_1/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2b(\ddot{\alpha}\ sin\alpha + \dot{\alpha}^2\ cos\alpha) \end{pmatrix}_{R_0} \qquad \vec{\gamma}(G_2/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\ sin\alpha) \\ -b(\ddot{\alpha}\ sin\alpha + \dot{\alpha}^2\ cos\alpha) \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}(G_3/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b(\ddot{\alpha}\ cos\alpha - \dot{\alpha}^2\ sin\alpha\ ) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

2- Moments cinétiques des solides (S_i) en G_i avec i=1, 2, 3

$$\vec{\sigma}(G_1, S_1/R_0) = M_{G_1}^{(S_1)}\,\vec{\Omega}(R_1/R_0) = 0 \quad car\ \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{\sigma}(G_2, S_2/R_0) = M_{G_2}^{(S_2)}\,\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = A_2\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2} = A_2\dot{\alpha}\overrightarrow{x_0}$$

$$\vec{\sigma}(G_3, S_3/R_0) = M_{G_3}^{(3)}\,\vec{\Omega}(R_3/R_0) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3} \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_3} = -A_3\dot{\beta}\overrightarrow{x_3} = -A_3\dot{\beta}\overrightarrow{x_0}$$

3- Moments dynamiques des solides (S_i) en G_i avec i= 1, 2, 3

$$\vec{\delta}(G_1, S_1/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G_1, S_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}(G_2,S_2/R_0)=\left.\frac{d\vec{\sigma}(G_2,S_2/R_0)}{dt}\right|_{R_0}=A_2\,\ddot{\alpha}\,\overrightarrow{x_0}$$

$$\vec{\delta}(G_3,S_3/R_0)=\left.\frac{d\vec{\sigma}(G_3,S_3/R_0)}{dt}\right|_{R_0}=-A_3\,\ddot{\beta}\,\overrightarrow{x_0}$$

4- Moment dynamique du système en G_1.

Le moment dynamique du système au point G_1 est égale à la somme des moments dynamiques des solides constituant le système au même point G_1.

On calcule d'abords les trois moments dynamiques au point G_1 en utilisant la loi de transfert du torseur dynamique.

$$\vec{\delta}\left(G_1,\frac{S_i}{R_0}\right)=\vec{\delta}\left(G_i,\frac{S_i}{R_0}\right)+\overrightarrow{G_1G_\iota}\wedge m\vec{\gamma}\left(\frac{G_i}{R_0}\right)$$

Ainsi, on a :

$$\vec{\sigma}(G_1,S_2/R_0)=\begin{pmatrix}A_2\ddot{\alpha}\\0\\0\end{pmatrix}_{R_0}+\begin{pmatrix}0\\b\,sin\alpha\\-b\,cos\alpha\end{pmatrix}_{R_0}\wedge\begin{pmatrix}0\\m_2\,b(\ddot{\alpha}\,cos\alpha-\dot{\alpha}^2\,sin\alpha)\\-m_2\,b(\ddot{\alpha}\,sin\alpha+\dot{\alpha}^2\,cos\alpha)\end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}(G_1,S_2/R_0)=[A_2\,\ddot{\alpha}+m_2b^2(\ddot{\alpha}\,cos2\alpha-\dot{\alpha}^2\,sin2\alpha)]\overrightarrow{x_0}$$

$$\vec{\sigma}(G_1,S_3/R_0)=\begin{pmatrix}-A_3\ddot{\beta}\\0\\0\end{pmatrix}_{R_0}+\begin{pmatrix}0\\2b\,sin\alpha\\-2b\,cos\alpha\end{pmatrix}_{R_0}\wedge\begin{pmatrix}0\\m_3\,b(\ddot{\alpha}\,cos\alpha-\dot{\alpha}^2\,sin\alpha)\\0\end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}(G_1,S_3/R_0)=\left[-A_3\,\ddot{\beta}+4m_3b^2(\ddot{\alpha}\,cos^2\alpha-\dot{\alpha}^2\,cos\alpha\,sin\alpha)\right]\overrightarrow{x_0}$$

D'où :

$$\vec{\sigma}(G_1,S/R_0)=\left[A_2\ddot{\alpha}-A_3\ddot{\beta}+m_2b^2(\ddot{\alpha}\,cos2\alpha-\dot{\alpha}^2\,sin2\alpha)+2m_3b^2(2\,\ddot{\alpha}\,cos^2\alpha-\dot{\alpha}^2sin2\alpha)\right]\overrightarrow{x_0}$$

5- Energie cinétique du système par rapport à R_0.

L'énergie cinétique du système est la somme des énergies des solides constituant le système, ce qui donne :

$$T(S/R_0)=T(S_1/R_0)+T(S_2/R_0)+T(S_3/R_0)$$

$$Avec:$$

$$T(S_1/R_0)=\frac{1}{2}m_1\vec{V}^2(G_1\,/R_0)=2m_1b^2\dot{\alpha}^2sin^2\alpha$$

$$T(S_2/R_0)=\frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(G_2\,/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(R_2\,/R_0)M_{G_2}(S_2)\vec{\Omega}(R_2\,/R_0)=\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2(m_2b^2+A_2)$$

$$T(S_3/R_0)=\frac{1}{2}m_3\vec{V}^2(G_3\,/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(R_3\,/R_0)M_{G_3}^{(S_3)}\vec{\Omega}(R_3\,/R_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4m_3b^2\dot{\alpha}^2cos^2\alpha+A_3\dot{\beta}^2\right)$$

$$T\left({}^{S}/_{R_0}\right)=\frac{1}{2}\left[b^2\dot{\alpha}^2(4m_1\,sin^2\alpha+m_2+4m_3cos^2\alpha)+A_2\dot{\alpha}^2+A_3\,\dot{\beta}^2\right]$$

Exercice 7 (Epreuve de mécanique du solide (Janvier 1996)

On considère un référentiel terrestre $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ supposé galiléen, l'axe O_1z_1 est horizontal et l'axe O_1x_1 fait un angle α avec l'horizontale ($0<\alpha<\pi/2$). On désigne par $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ la base cartésienne de R_1.

On suppose que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme. On se propose d'étudier le mouvement, dans le plan vertical (O_1, x_1, y_1) , d'un système mécanique (∑) composé de deux solides (Voir figure) :

- Un disque homogène (D) de masse m, de centre O et de rayon a.
- Une tige homogène (T) rectiligne, d'extrémités A et O de masse μ, de centre de masse G et de longueur l.

Le disque (D) est articulé avec la tige (T) en O, la liaison est rotoïde parfaite d'axe Oz_1. L'action sans frottement de l'articulation rotoïde en O de (D) est caractérisée par le torseur :

$$\begin{bmatrix} \vec{R} = X\overrightarrow{x_1} + Y\overrightarrow{y_1} \\ \vec{m}(O) \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \vec{m}(O).\overrightarrow{z_1} = 0$$

Au cours du mouvement le disque roule sans glisser sur l'axe O_1x_1 et la tige reste constamment en contact sans frottement avec O_1x_1 en A(liaison ponctuelle simple parfaite)
On désigne par $\beta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{AO})$ l'angle constant caractérisé par $\sin\beta = a/l$: $0 < \beta < \pi/2$.

Les paramètres du mouvement sont : $x = \overline{O_1A}$ et $\theta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_s})$ est l'angle de rotation propre du disque autour de Oz_1, $\overrightarrow{x_s}$ étant un vecteur lié à (D).

On désigne par $\overrightarrow{R_p}$ la réaction en P (contact ponctuel entre le disque (D) et l'axe O_1x_1) :

$$\overrightarrow{R_p} = T\,\overrightarrow{x_1} + N\,\overrightarrow{y_1}$$

I Questions préliminaires

1- Déterminer le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Oz_1.
2- a) - Déterminer le torseur cinétique de (D) en O.
 b) – En déduire le torseur dynamique de (D) au même point O.
3- a) Déterminer le torseur cinétique de (T) en O
 b) - Déterminer le torseur dynamique de (T) au point O.
4- Calculer les énergies cinétiques $E_c(D/R_1)$, $E_c(T/R_1)$ et $E_c(\Sigma/R_1)$ respectivement du disque (D), de la tige (T) et du système entier(∑).
5- a) Calculer la vitesse de glissement en P de (D) sur O_1x_1. En déduire la condition de roulement sans glissement.

 b) Montrer que dans ce cas l'énergie cinétique du système (∑) est de la forme $E_c\left(\Sigma/_{R_1}\right) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ où M est fonction de m et μ.

II Etude dynamique

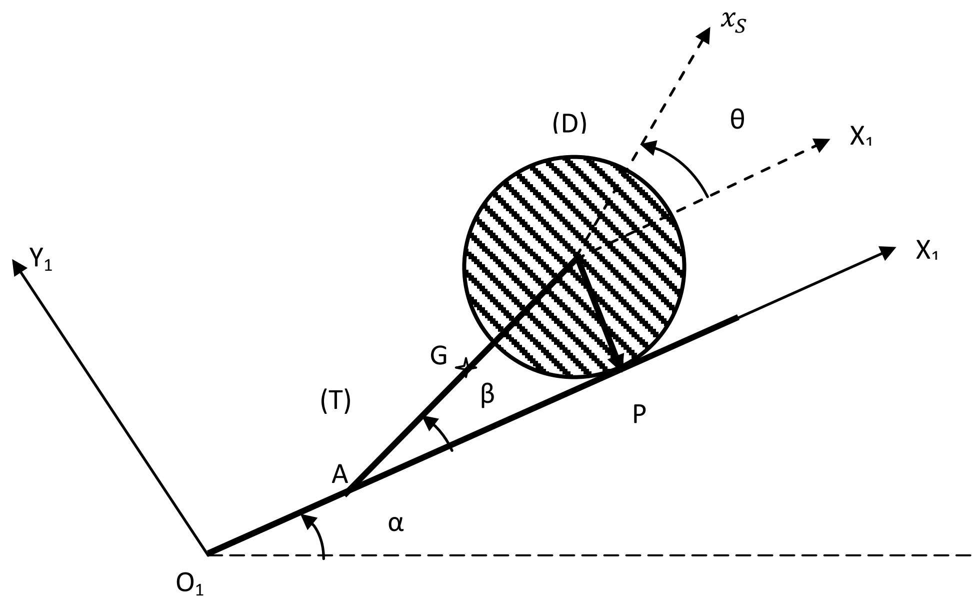
1- Donner l'inventaire des efforts extérieurs agissant sur :
 a) Le solide (D) seul.
 b) La tige seule.
 c) Le système (∑).

2- Ecrire le théorème du moment dynamique en O du disque seul.
3- Appliquer le théorème de la résultante dynamique à (∑)
4- A partir des relations trouvées aux questions 2 et 3, déduire l'expression de l'accélération en fonction de μ, m, g et α. Quelle est alors la nature du mouvement ?

III Etude du mouvement sous l'effet d'un couple

Nous supposons maintenant qu'en plus des efforts précédents la tige exerce sur le disque (D) des efforts moteurs engendrant un couple $-C\overrightarrow{z_1}$; inversement le disque (D) exerce sur la tige le couple opposé $C\overrightarrow{z_1}$.

1- Calculer la puissance de chaque action appliquée au système (∑).
2- En appliquant de théorème de l'énergie cinétique, trouver l'équation différentielle du second ordre en x.
3- A quelle condition doit satisfaire la valeur de C pour que le système (∑) puisse grimper la pente, sachant que (∑) est lâché sans vitesse initiale.
4- On suppose dans cette question que μ/m<<1. A l'instant initial $\dot{x}$=0. En appliquant la loi de Coulomb écrire la condition que doit maintenant satisfaire C pour que le système ''monte la côte''.(utiliser l'équation des moments pour la tige seule).



Solution

I Questions préliminaires

1- Matrice d'inertie du disque au point O

Oz_1 axe de révolution, donc axe principal d'inertie et par conséquent la matrice d'inertie est diagonale et les moments d'inertie par rapport aux axes Oy_1 et Ox_1 sont égaux.

$$z = 0 \Rightarrow A = B = \frac{C}{2} \quad avec \quad C = \iint r^2\, dm = m\frac{a^2}{2}$$

$$M_O(D) = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}_{R_1}$$

2- a) Torseur cinétique de (D) en O

$$[T_C(D/R_1]_O = \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{R_C}\left({}^{D}/_{R_1}\right) = m\vec{V}({}^{O}/_{R_1})\\ \vec{\sigma}\left(O,{}^{D}/_{R_1}\right) = M_o^{(D)}\vec{\Omega}({}^{D}/_{R_1})\end{array}\right.$$

$$\vec{V}\left({}^{O}/_{R_1}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}\right|_{R_1} = m\frac{d}{dt}\left.[(x + l\cos\beta)\overrightarrow{x_1} + a\,\overrightarrow{y_1}]\right|_{R_1} = m\dot{x}\,\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{\sigma}\left(O,{}^{D}/_{R_1}\right) = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}_{R_1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}_{R_1} = \frac{ma^2\dot{\theta}}{2}\,\overrightarrow{z_1}$$

$$[T_C(D/R_1]_O = \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{R_C}\left({}^{D}/_{R_1}\right) = m\dot{x}\,\overrightarrow{x_1}\\ \vec{\sigma}\left(O,{}^{D}/_{R_1}\right) = \dfrac{ma^2\dot{\theta}}{2}\,\overrightarrow{z_1}\end{array}\right.$$

b) Torseur dynamique de (D) en O

$$[T_d(D/R_1]_O = \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}\left({}^{D}/_{R_1}\right) = m\vec{\gamma}({}^{O}/_{R_1})\\ \vec{\delta}\left(O,{}^{D}/_{R_1}\right) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}\left(O,{}^{D}/_{R_1}\right)}{dt}\right|_{R_1}\end{array}\right.$$

$$\vec{\gamma}\left({}^{O}/_{R_1}\right) = m\ddot{x}\,\overrightarrow{x_1} \qquad et \qquad \vec{\delta}\left(O,{}^{D}/_{R_1}\right) = \frac{ma^2}{2}\ddot{\theta}\,\overrightarrow{z_1}$$

$$[T_d(D/R_1]_O = \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}\left({}^{D}/_{R_1}\right) = m\ddot{x}\,\overrightarrow{x_1}\\ \vec{\delta}\left(O,{}^{D}/_{R_1}\right) = \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\theta}\,\overrightarrow{z_1}\end{array}\right.$$

3- a) Torseur cinétique de (T) en O

$$[T_C(T/R_1]_O = \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{R_C}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = \mu\,\vec{V}({}^{G}/_{R_1})\\ \vec{\sigma}\left(O,{}^{T}/_{R_1}\right) = \vec{\sigma}\left(G,{}^{T}/_{R_1}\right) + \overrightarrow{R_C}\left({}^{T}/_{R_1}\right)\wedge\overrightarrow{GO}\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OG} = \left(x + \tfrac{l}{2}\cos\beta\right)\overrightarrow{x_1} + \tfrac{l}{2}\sin\beta\,\overrightarrow{y_1} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{R_C}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = \mu\dot{x}\,\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{\sigma}\left(G,{}^{T}/_{R_1}\right) = M_G^{(T)}\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = \vec{0} \qquad \text{car} \qquad \vec{\Omega}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{R_C}\left({}^{T}/_{R_1}\right)\wedge\overrightarrow{GO} = \mu\dot{x}\frac{l}{2}\sin\beta\;\overrightarrow{z_1} \quad \text{où} \quad \overrightarrow{GO} = \frac{l}{2}(\cos\beta\,\overrightarrow{x_1} + \sin\beta\,\overrightarrow{y_1})$$

$$[T_C(T/R_1]_O = \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{R_C}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = \mu\,\dot{x}\,\overrightarrow{x_1}\\ \vec{\sigma}\left(O,{}^{T}/_{R_1}\right) = \mu\dot{x}\dfrac{l}{2}\sin\beta\;\overrightarrow{z_1}\end{array}\right.$$

b) Torseur dynamique de (T) en O

$$[T_d(T/R_1]_O = \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = \mu\vec{\gamma}\left({}^{G}/_{R_1}\right) = \mu\ddot{x}\,\overrightarrow{x_1}\\ \vec{\delta}\left(O,{}^{T}/_{R_1}\right) = \vec{\delta}\left(G,{}^{T}/_{R_1}\right) + \overrightarrow{R_d}\left({}^{T}/_{R_1}\right)\wedge\overrightarrow{GO} = \mu\dfrac{l}{2}\ddot{x}\;\sin\beta\;\overrightarrow{z_1}\end{array}\right.$$

4- Energies cinétiques

- <u>Energie cinétique du disque</u>

$$E_c\left({}^{D}/_{R_1}\right)=\frac{1}{2}\,m\,\vec{V}^2\left({}^{O}/_{R_1}\right)+\frac{1}{2}\ {}^{t}\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_1}\right)M_O^{(D)}\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_1}\right)$$

$$E_c\left({}^{D}/_{R_1}\right)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{m}{4}a^2\dot{\theta}^2$$

- <u>Energie cinétique de la tige</u>

$$E_c\left({}^{T}/_{R_1}\right)=\frac{1}{2}\mu\ \vec{V}^2\left({}^{G}/_{R_1}\right)=\frac{1}{2}\mu\,\dot{x}^2$$

- <u>Energie cinétique du système</u>

$$E_c\left({}^{\Sigma}/_{R_1}\right)=E_c\left({}^{D}/_{R_1}\right)+E_c\left({}^{T}/_{R_1}\right)=\frac{1}{2}(\,m+\mu)\,\dot{x}^2+\frac{ma^2}{4}\dot{\theta}^2$$

5- <u>a) Vitesse de glissement en P</u>

$$\overrightarrow{V_g}\left({}^{D}/_{o_1x_1}\right)=\vec{V}\left({}^{P\,\in\,D}/_{R_1}\right)-\vec{V}\left({}^{P\,\in\,O_1x_1}/_{R_1}\right)=\vec{V}\left({}^{O}/_{R_1}\right)+\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_1}\right)\wedge\overrightarrow{OP}$$

$$\vec{V}\left({}^{P\,\in\,O_1x_1}/_{R_1}\right)=\vec{0}\quad Car\ \ O_1x_1\ fixe$$

$$\overrightarrow{V_g}\left({}^{D}/_{o_1x_1}\right)=\dot{x}\,\overrightarrow{x_1}+\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_1}\wedge-a\overrightarrow{y_1}=(\dot{x}+a\dot{\theta})\overrightarrow{x_1}$$

La condition de roulement sans glissement est :

$$\overrightarrow{V_g}\left({}^{D}/_{o_1x_1}\right)=\vec{0}\ \ \Rightarrow\ \ \dot{x}=-a\dot{\theta}$$

- <u>b)- Energie cinétique du système</u>

  Dans le cas du roulement sans glissement, et en remplaçant $\dot{\theta}$ par sa valeur, on trouve :

$$E_c\left({}^{\Sigma}/_{R_1}\right)=\frac{1}{2}(\,m+\mu)\dot{x}^2+\frac{ma^2}{4}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\ m+\mu\right)\dot{x}^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2\Rightarrow M=\frac{3m+2\mu}{2}$$

<u>II-Etude dynamique</u>

1- <u>Efforts extérieurs agissant sur :</u>

a) <u>Disque seul</u>

- Le poids : $\overrightarrow{P_D}=-mg(cos\alpha\,\overrightarrow{y_1}+sin\alpha\,\overrightarrow{x_1})$
- La réaction en P : $\overrightarrow{R_p}=T\,\overrightarrow{x_1}+N\,\overrightarrow{y_1}$
- L'action en O : $\begin{bmatrix}\vec{R}=X\overrightarrow{x_1}+Y\overrightarrow{y_1}\\ \vec{m}(O)\end{bmatrix}$

b) <u>Tige seule</u>

Le poids : $\overrightarrow{P_T}=-\mu g(cos\alpha\,\overrightarrow{y_1}+sin\alpha\,\overrightarrow{x_1})$

- La réaction en O : $\begin{bmatrix}-\vec{R}=-X\overrightarrow{x_1}-Y\overrightarrow{y_1}\\ -\vec{m}(O)\end{bmatrix}$
- La réaction en A : $\overrightarrow{R_A}=R_A\,\overrightarrow{y_1}$

c) <u>Système entier</u>

- Le poids : $\vec{P}=-(m+\mu)g(cos\alpha\,\overrightarrow{y_1}+sin\alpha\,\overrightarrow{x_1})$
- La réaction en A : $\overrightarrow{R_A}=R_A\,\overrightarrow{y_1}$
- L'action en P : $\overrightarrow{R_p}=T\,\overrightarrow{x_1}+N\,\overrightarrow{y_1}$

2- <u>Théorème du moment dynamique appliqué au disque.</u>

$$\vec{\delta}\left(O, {}^{D}/_{R_1}\right) = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_{ext}}) = \vec{m}(O) + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R_P} + \overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{mg}$$

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\theta}\,\overrightarrow{z_1} = \vec{m}(O) + (T\,\overrightarrow{x_1} + N\,\overrightarrow{y_1}) \wedge a\,\overrightarrow{y_1} = \vec{m}(O) + Ta\,\overrightarrow{z_1}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{ma}{2}\ddot{\theta} \quad \text{équation 1}$$

3- Théorème de la résultante dynamique appliqué à (∑).

$$m\vec{\gamma}\left({}^{O}/_{R_1}\right) + \mu\vec{\gamma}\left({}^{G}/_{R_1}\right) = \vec{P} + \overrightarrow{R_P} + \overrightarrow{R_A}$$

En remplaçant chaque terme par sa valeur, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} (m+\mu)\ddot{x} = -(m+\mu)g\,\sin\alpha + T & \Rightarrow \quad T = (m+\mu)(\ddot{x} + g\,\sin\alpha) \quad \text{équation 2} \\ 0 = -(m+\mu)g\,\cos\alpha + N + R_A & \Rightarrow \quad N = (m+\mu)g\,\cos\alpha - R_A \quad \text{équation 3} \end{cases}$$

4- Mouvement de (∑)

Les équations 1 et 2 nous donnent : $\ddot{x} = -g\sin\alpha + \frac{T}{(m+\mu)} = -g\,\sin\alpha + \frac{ma}{2(m+\mu)}\ddot{\theta}$

Or la condition de roulement sans glissement donne aussi : $\ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}}{a}$, ce qui donne ;

$$\ddot{x} = -\frac{2(m+\mu)}{3m+\mu}g\,\sin\alpha = constante$$

Le mouvement de (∑) est rectiligne et uniformément varié

III Etude du mouvement sous l'effet d'un couple

1- Puissances des actions appliquées à (∑)

- Puissances des forces de pesanteur

$$\mathcal{P}_1 = m\vec{g}\cdot\vec{V}\left({}^{O}/_{R_1}\right) + \mu\vec{g}\cdot\vec{V}\left({}^{G}/_{R_1}\right) = -(m+\mu)g\,\sin\alpha\,\dot{x}$$

- Puissance du couple qu'exerce la tige sur le disque

$$\mathcal{P}_2 = -C\overrightarrow{z_1}\cdot\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_1}\right) = -C\dot{\theta}$$

- Puissance de l'action de la tige sur le disque en O

  La liaison rotoïde en O est parfaite, donc la réaction est normale à la vitesse ce qui traduit par une puissance nulle de cette action

- Puissance de l'action du disque sur la tige.

  D'après le principe de l'action et de la réaction, puisque la tige exerce sur le disque un couple $-C\overrightarrow{z_1}$, le disque exerce sur la tige le couple $C\overrightarrow{z_1}$, et la puissance est égale à :

$$\mathcal{P}_3 = C\overrightarrow{z_1}\cdot\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = 0 \qquad car\ \vec{\Omega}\left({}^{T}/_{R_1}\right) = \vec{0}$$

- Puissance de la réaction en P

$$\mathcal{P}_4 =\cdot \overrightarrow{R_P}\cdot\vec{V}\left({}^{P\in D}/_{R_1}\right) = 0 \quad \text{Car}$$

$$\vec{V}\left({}^{P\in D}/_{R_1}\right) = \vec{0}\ \ puisqu'on\ a\ roulement\ sans\ glissement$$

- Puissance de l'action en A

$$\mathcal{P}_5 =\cdot \overrightarrow{R_A}\cdot\vec{V}\left({}^{A}/_{R_1}\right) = 0 \quad Pas\ de\ frottement\ donc:\ \overrightarrow{R_A} \perp \vec{V}\left({}^{A}/_{R_1}\right)$$

- Puissance totale

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_5 = -(m+\mu)g\,\sin\alpha\ \dot{x} - C\dot{\theta}$$

2- Théorème de l'énergie cinétique appliqué à (∑)

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c\left(\Sigma/_{R_1}\right)}{dt} \Rightarrow -(m+\mu)g\ sin\alpha\ \dot{x} - C\dot{\theta} = (m+\mu)\dot{x}\,\ddot{x} + \frac{m}{2}a^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta}$$

En remplaçant $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ par leurs valeurs et en divisant par $\dot{x}$, on obtient :

$$\frac{3m+2\mu}{2}\ \ddot{x} = -(m+\mu)g\ sin\alpha + \frac{C}{a} = M\ \ddot{x} \quad \acute{e}quation\ 4$$

3- Condition pour que (∑) monte la pente

Pour que (∑) grimpe la pente, il faut que x croit c-à-d que $\dot{x} > 0$; or à t=0 $\dot{x}_0 = 0$, pour que $\dot{x}$ soit positif, il faut que $\dot{x}$ croit ce qui nécessite que $\ddot{x}$ soit positif

$$-(m+\mu)g\ sin\alpha + \frac{C}{a} = M\ \ddot{x} > 0 \Rightarrow C > (m+\mu)\ g\ a\ sin\alpha$$

4- Condition pour que (∑) monte la pente lorsque μ<<m

- Théorème des moments pour la tige seule

Le moment dynamique en O est égal à la somme des moments des forces appliquées à la tige

$$\vec{\delta}\left(0, {}^{T}/_{R_1}\right) = -\vec{m}(O) + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R_A}$$

$$\mu\frac{l}{2}\ddot{x}\ \ sin\beta\ \ \overrightarrow{z_1} = -\vec{m}(O) - l(cos\beta\,\overrightarrow{x_1} + a\,\overrightarrow{y_1}) \wedge \overrightarrow{R_A}\,\overrightarrow{y_1} + C\,\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{0} = -\vec{m}(O) - lR_A\ cos\beta\ \overrightarrow{z_1} + C\overrightarrow{z_1} \qquad car\ \ \mu \to 0$$

Ce qui donne par projection sur $\overrightarrow{z_1}$: $C = l\,R_A cos\beta \Rightarrow R_A = \frac{C}{l\ cos\beta}$

D'après l'équation 3 $N = (m+\mu)g\ cos\alpha - R_A > 0 \Leftrightarrow N = mg\ cos\alpha - \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{l\ cos\beta}} > 0$

Or $cos\beta = \frac{\sqrt{l^2-a^2}}{l}$ $\Rightarrow N = mg\ cos\alpha - \frac{\boldsymbol{C}}{\sqrt{\boldsymbol{l^2-a^2}}} > 0$

D'après l'équation 1 : $T = \frac{ma\,\ddot{\theta}}{2} = -\frac{m}{2}\,\ddot{x}$

L'équation 4 donne : $\ddot{x} = \frac{-(m+\mu)g\ sin\alpha + \frac{C}{a}}{M}$

μ→ 0 ⇒ $M = \frac{3}{2}\ m\ \ et\ \ \ddot{x} = \frac{-mg\ sin\alpha + \frac{C}{a}}{\frac{3}{2}m} = -\frac{2}{3}\ g\ sin\alpha + \frac{2}{3}\,\frac{C}{ma} \Rightarrow \qquad T = \frac{m}{3}g\ sin\alpha - \frac{C}{3a}$

On a frottement donc T est négatif (car force de résistance) $T = -\frac{1}{3}\left[\frac{C}{a} - mg\ sin\alpha\right] < 0$

Donc : $\frac{C}{a} - mg\ sin\alpha > 0 \Rightarrow C > mga\ sin\alpha$

- Axiome de Coulomb

$$|T| < f\ N \Rightarrow \frac{1}{3}\left[\frac{C}{a} - mg\ sin\alpha\right] < f\ \left[mg\ cos\alpha - \frac{C}{\sqrt{l^2-a^2}}\right]$$

C< $\frac{mg\left[f\ cos\alpha + \frac{sin\alpha}{3}\right]}{\frac{1}{3a} + \frac{f}{\sqrt{l^2-a^2}}}$

Exercice 8-Epreuve de mécanique du solide (Janvier 1998)

Un système de solides est en mouvement par rapport à un référentiel terrestre supposé galiléen R_0(O, X, Y, Z) de base cartésienne $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Le système est formé de (figure)

- Un solide (S) de masse m et de centre G ; la matrice d'inertie en G dans un repère lié à (S) $R_S(G, x, y, z)$ de base cartésienne $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est supposée de révolution telle que :

$$J(G,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

- Une tige cylindrique (T) d'axe $\overrightarrow{OE}$, de masse négligeable, astreinte à rester dans le plan OYZ où sa position est repérée par l'angle $\theta = \left(\widehat{\vec{Z}, \vec{z}}\right)$ orienté par $\vec{X}$

Le solide (S) est percé le long de son axe Gz d'un trou cylindrique de même section que la tige (T) de façon à ce que les axes OE et Gz soient superposés et de même sens. (S) peut glisser et tourner autour de celle-ci . On pose :

$$\overrightarrow{OG} = \rho\vec{z} \qquad et \qquad \Phi = \left(\widehat{\vec{X}, \vec{x}}\right) \quad \text{orienté par } \vec{z}$$

Une extrémité de la tige est liée au bâti (B) fixe en O par une liaison rotoïde parfaite. L'action du bâti sur la tige est caractérisée par le torseur $\mathcal{T}_0\left(\overrightarrow{R_0}, \overrightarrow{H_0}\right)$ On désigne par $R_T(O, X, w, z)$ le repère lié à (T) et de base $\left(\vec{X}, \vec{w}, \vec{z}\right)$ et les efforts de contact (liaison verrou) exercés par la tige (T) sur (S) par le torseur $\mathcal{T}_1\left(\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{H_1}\right)$ en G dont les éléments de réduction sont :

$$\overrightarrow{R_1} = X\vec{X} + Y\vec{w} + Z\vec{z} \qquad et\ \overrightarrow{H_1} = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$$

Un ressort (R), de masse négligeable disposé entre le bâti (B) et le solide (S), d'axe Oz, exerce sur (S) des efforts caractérisés par le torseur $\mathcal{T}_2\left(\overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{H_2}\right)$ en G d'éléments de réduction

$$\overrightarrow{R_2} = -k(\rho - l_0)\vec{z} \qquad et\ \overrightarrow{H_2} = -K(\Phi - \alpha)\vec{z}$$

Le champ de gravitation, $\vec{g} = -g\vec{Z}$, est supposé uniforme.

1- Calculer les vecteurs vitesse $\vec{V}\left({G}/{R_0}\right)$, accélération $\vec{\Gamma}\left({G}/{R_0}\right)$ et vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}\left({S}/{R_0}\right)$. On exprimera les résultats dans la base lié à R_T.

2- Déterminer pour le mouvement de (S)par rapport à R_0 :

a- Le torseur cinétique en G (on exprimera la résultante dans la base liée à R_T et le moment dans la base liée à (S)).

b- L'énergie cinétique $E_c(S/R_0)$.

c- Le torseur dynamique en G (on exprimera la résultante dans la base liée à R_T et le moment dans la base liée à (S)).

3- Analyser le bilan des efforts extérieurs appliqués à :

a- (S) seul.

b- (T) seule.

c- (S) ∪ (T).

4- Application des théorèmes généraux à (S) seul.

a- Ecrire le théorème de la résultante dynamique projeté sur la base liée à R_T.

b- Ecrire le théorème des moments dynamiques en G projeté sur la base liée à (S).

5- On suppose maintenant que toutes les liaisons sont parfaites et que la tige est animée d'un mouvement de rotation uniforme ($\dot{\theta} = \omega$) grace à un couple $C\vec{X}$ appliqué entre le bâti (B) et la tige (T).

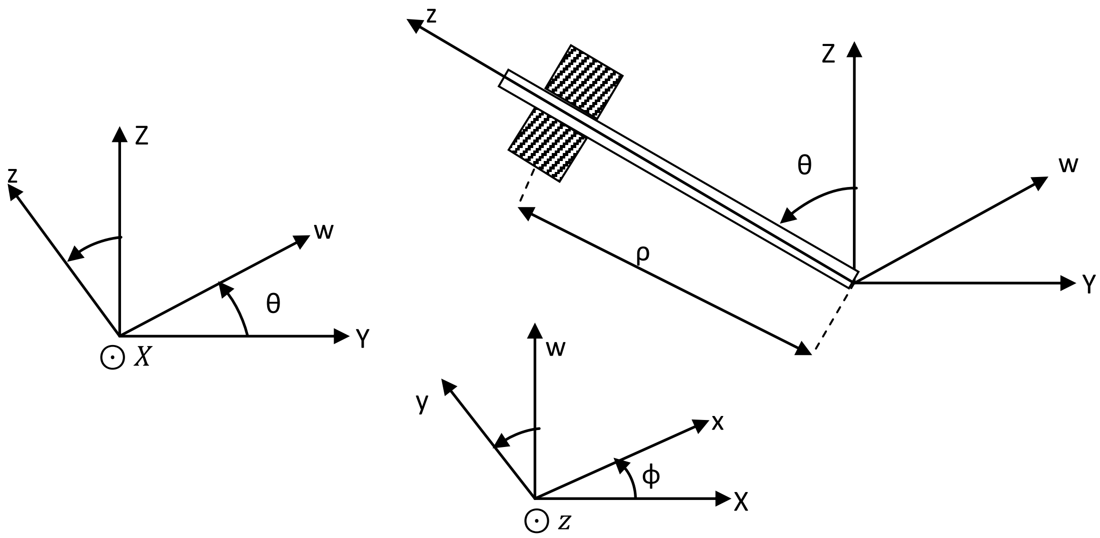
a- Montrer que Z=0 et N= 0.

b- Ecrire le système des deux équations du mouvement.

6- Calculer la puissance de toutes les actions appliquées au système (S) ∪ (T).

7- Quelle est la façon la plus simple permettant de déterminer le couple C pour garder $\dot{\theta}$ *constant ?*

<u>Solution</u>



$$R_0(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) \xrightarrow{\dot{\theta}\,\vec{X}} R_T(\vec{X},\vec{w},\vec{z}\,) \xrightarrow{\dot{\phi}\,\vec{z}} R_S(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

1- <u>Vitesse et accélération de G et la vitesse de rotation</u>

- <u>Vitesse de G</u>

$$\overrightarrow{OG} = \rho\vec{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\rho}\vec{z} + \rho\left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\rho}\vec{z} + \rho\dot{\theta}\,\vec{X}\wedge\vec{z} = \dot{\rho}\vec{z} - \rho\dot{\theta}\,\vec{w}$$

- <u>Accélération de G</u>

$$\vec{\Gamma}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} = \ddot{\rho}\,\vec{z} + \dot{\rho}\left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_{R_0} - \left(\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{w} - \rho\dot{\theta}\left.\frac{d\vec{w}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\vec{\Gamma}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = -\left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{w} + \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{z}$$

- <u>Vitesse de rotation</u>

$$\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) = \dot{\theta}\,\vec{X} + \dot{\phi}\,\vec{z}$$

2- <u>Torseurs cinétique et dynamique et énergie cinétique</u>

a- <u>Torseur cinétique de (S) en G</u>

- <u>Résultante cinétique</u>

$$\overrightarrow{R_c} = m\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = m\left(\dot{\rho}\vec{z} - \rho\dot{\theta}\ \vec{w}\right)$$

- Moment cinétique

$$\vec{\sigma}\left(G, {}^{S}/_{R_0}\right) = J(G,S)\,\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_T} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}_{R_T} = A\dot{\theta}\,\vec{X} + C\dot{\phi}\,\vec{z}$$

Gz étant axe de révolution, tous les axes perpendiculaires à Gz sont équivalents , et par conséquent la matrice d'inertie est la même dans les deux repères R_S et R_T.

Or $\vec{X} = cos\phi\ \vec{x} - sin\phi\ \vec{y} \ \Rightarrow\ \vec{\sigma}\left(G, {}^{S}/_{R_0}\right) = A\dot{\theta}\ cos\phi\ \vec{x} - A\dot{\theta}\ sin\phi\ \vec{y} + C\dot{\phi}\ \vec{z}$

b- Energie cinétique de (S)

$$2E_c\left({}^{S}/_{R_0}\right) = m\vec{V}^2\left({}^{G}/_{R_0}\right) + {}^{t}\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) J(G,S)\,\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right)$$

$$2E_c\left({}^{S}/_{R_0}\right) = m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + A\dot{\theta}^2 + C\dot{\phi}^2$$

c- Torseur dynamique de (S) en G

- Résultante dynamique

$$\vec{R}_d = m\vec{\Gamma}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = m\left[-\left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{w} + \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{z}\right]$$

- Moment dynamique de (S) en G

$$\vec{\delta}\left(G, {}^{S}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{\sigma}\left(G, {}^{S}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_T} + \vec{\Omega}\left({}^{R_T}/_{R_0}\right) \wedge \vec{\sigma}\left(G, {}^{S}/_{R_0}\right)$$

$$= A\ddot{\theta}\vec{X} + C\ddot{\phi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{X} \wedge \left(A\dot{\theta}\ \vec{X} + C\dot{\phi}\ \vec{z}\right) = A\ddot{\theta}\vec{X} - C\dot{\theta}\dot{\phi}\vec{w} + C\ddot{\phi}\vec{z}$$

$$Or\ \ \vec{w} = cos\phi\ \vec{y} + sin\phi\ \vec{x} \quad et \quad \vec{X} = cos\phi\ \vec{x} - sin\phi\ \vec{y}$$

$$\vec{\delta}\left(G, {}^{S}/_{R_0}\right) = \left(A\ddot{\theta}\ cos\phi - C\dot{\theta}\dot{\phi}\ sin\phi\right)\vec{x} - \left(A\ddot{\theta}\ sin\phi + C\dot{\theta}\dot{\phi}\ cos\phi\right)\vec{y} + C\ddot{\phi}\vec{z}$$

3- Bilan des efforts extérieurs appliqués à :

a- (S) seul

- Le poids : $\vec{P} = -mg\vec{Z} = -mg(cos\theta\ \vec{z} + sin\theta\ \vec{w})$
- Action de (T) sur (S) : $\mathcal{T}_1\left(\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{H_1}\right)$

$$\overrightarrow{R_1} = X\vec{X} + Y\vec{w} + Z\vec{z} \quad et\ \overrightarrow{H_1} = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$$

- Action du ressort sur (S) : $\mathcal{T}_2\left(\overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{H_2}\right)$

$$\overrightarrow{R_2} = -k(\rho - l_0)\vec{z} \qquad et\ \ \overrightarrow{H_2} = -K(\Phi - \alpha)\vec{z}$$

b- (T) seule

- Action de (S) sur (T) : $-\boldsymbol{\mathcal{T}_1}\left(\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{H_1}\right)$
- Action du bâti sur (T) : $\mathcal{T}_0\left(\overrightarrow{R_0}, \overrightarrow{H_0}\right)$

c- (S) et (T)

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{Z}$
- Action du ressort sur (S) : $\mathcal{T}_2\left(\overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{H_2}\right)$

$$\overrightarrow{R_2} = -k(\rho - l_0)\vec{z} \qquad et\ \overrightarrow{H_2} = -K(\Phi - \alpha)\vec{z}$$

- Action du bâti sur (T) : $\mathcal{T}_0\left(\overrightarrow{R_0}, \overrightarrow{H_0}\right)$

4- <u>Application des théorèmes généraux à (S) seul</u>

a- <u>Théorème de la résultante dynamique</u>

$$M\vec{\Gamma}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = \vec{P} + \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \Leftrightarrow$$

$$m\left[-(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{w} + (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{z}\right] = -mg(cos\theta\ \vec{z} + sin\theta\ \vec{w}) + X\vec{X} + Y\vec{w} + Z\vec{z} - k(\rho - l_0)\vec{z}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = X & \text{équation } 1 \\ -m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = Y - mg\ sin\theta & \text{équation } 2 \\ m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = Z - k(\rho - l_0) - mg\ cos\theta & \text{équation } 3 \end{cases}_{R_T}$$

b- <u>Théorème du moment dynamique en G</u>

$\vec{\delta}\left(G, {}^{S}/_{R_0}\right) = \overrightarrow{H_1} + \overrightarrow{H_2}$ car le moment du poids en G est nul

$$\left(A\ddot{\theta}\ cos\phi - C\dot{\theta}\dot{\phi}\ sin\phi\right)\vec{x} - \left(A\ddot{\theta}\ sin\phi + C\dot{\theta}\dot{\phi}\ cos\phi\right)\vec{y} + C\ddot{\phi}\vec{z} = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} - K(\Phi - \alpha)\vec{z} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A\ddot{\theta}\ cos\phi - C\dot{\theta}\dot{\phi}\ sin\phi = L & \text{équation } 4 \\ -\left(A\ddot{\theta}\ sin\phi + C\dot{\theta}\dot{\phi}\ cos\phi\right) = M & \text{équation5} \\ C\ddot{\phi} = N - K(\Phi - \alpha) & \text{équation } 6 \end{cases}_{R_S}$$

5- <u>Mouvement uniforme de la tige</u>

a- <u>Montrons que Z=0 et N=0</u>

$\boldsymbol{\dot{\theta} = \omega}$ et la liaison entre la tige et (S) est parfaite, donc $\overrightarrow{R_1}$ *et* $\overrightarrow{H_1}$ sont perpendiculaires à $\vec{\boldsymbol{z}} \Rightarrow Z = 0\ et\ N = 0$ équation 7

b- <u>Equations différentielles du mouvement</u>

$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$ s

L'équation 3 donne : $m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = -k(\rho - l_0) - mg\ cos(\omega t)$

$$\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = -\frac{K}{m}(\rho - l_0) - g\ cos(\omega t) \quad \text{équation } 8$$

l'équation 4 donne : $-C\omega\dot{\phi}\ sin\phi = L$

L'équation 5 donne : $C\omega\dot{\phi}\ cos\phi = M$

L'équation 6 donne :

$$C\ddot{\phi} = -K(\Phi - \alpha) \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{K}{C}\phi = \frac{K\alpha}{C} \quad \text{équation } 9$$

6- <u>Puissances de toutes les actions appliquées au système</u>

- Puissance du poids

$$\mathcal{P}_1 = -mg\vec{Z}\cdot\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = -mg(cos\theta\ \vec{z} + sin\theta\vec{w})\cdot(\dot{\rho}\vec{z} - \rho\dot{\theta}\vec{w})$$

$$\mathcal{P}_1 = mg(\rho\omega\ sin\theta - \dot{\rho}\ cos\theta)$$

- Puissance de l'action du ressort sur (S)

$$\mathcal{P}_2 = \overrightarrow{R_2}\cdot\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) + \overrightarrow{H_2}\cdot\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) = -k(\rho - l_0) - K(\phi - \alpha)\dot{\phi}$$

- Puissance de l'action du bâti sur (S)
  La puissance de l'action du bâti sur (S) est nulle, ainsi que la puissance de la liaison en O car on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.
- Puissance de l'action du couple C$\vec{X}$

$$\mathcal{P}_3 = C\vec{X}\cdot\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R_0}\right) = C\dot{\theta} = C\omega$$

- Puissance totale

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 = mg(\rho\omega\, sin\theta - \dot{\rho}\, cos\theta) - k(\rho - l_0)\rho - K(\dot{\phi} - \alpha)\dot{\phi} + C\omega$$

7- La façon la plus simple pour déterminer le couple C

La façon la plus simple pour déterminer le couple C est d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système entier.

$\frac{dE_c(S+T/R_0)}{dt} = \mathcal{P}$ Puisque la tige a une masse négligeable, alors :

$$E_c(S+T/R_0) = E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\left[m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) + A\dot{\theta}^2 + C\dot{\phi}^2\right]$$

$$\frac{dE_c(S/R_0)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\omega^2 + C\dot{\phi}\ddot{\phi}$$

$$m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\omega^2 + C\dot{\phi}\ddot{\phi} = mg(\rho\omega\, sin\theta - \dot{\rho}\, cos\theta) - k(\rho - l_0)\rho - K(\dot{\phi} - \alpha)\dot{\phi} + C\omega$$

Or d'après l'équation 3 : $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -k(\rho - l_0) - mg\, cos\theta$ $\Rightarrow$ En remplaçant $-k(\rho - l_0)$ par sa valeur, on obtient :

$$2m\dot{\rho}\rho\omega^2 + C\dot{\phi}\ddot{\phi} = mg\rho\omega\, sin\theta - K(\phi - \alpha)\dot{\phi} + C\omega$$

D'après l'équation 9 : $-K(\phi - \alpha) = C\ddot{\phi}$ Ce qui donne :$C = m\rho[2\dot{\rho}\omega - g\, sin(\omega t)]$

Exercice 9-Epreuve de mécanique 2 (Janvier 2009)

Un solide T d'épaisseur négligeable de masse m, sous forme d'un chapeau « haut de forme » constitué d'un cylindre creux de rayon r, de hauteur h et de masse m/2 fermé à l'une de ses bases par un disque, de même rayon, de masse m/4 et sur l'autre base d'une couronne circulaire de rayon extérieur a (a>r) de masse m/4 (voir figure). T roule sans glisser sur le plan P_0(O, x_0, y_0) lié à un repère fixe $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$. Le solide T est lié à un repère $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ où G est le centre de masse de T et Gz son axe de symétrie de révolution. Le contact de T avec P_0 a lieu en un point I du bord inférieur du chapeau dont la tangente est dirigée suivant un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{z_0}$. Cette tangente fait un angle ψ avec l'axe Ox_0.

On définit le vecteur $\vec{w}$ par : $\vec{w} = \frac{\vec{IC}}{a}$ et l'angle θ (angle d'inclinaison de T par rapport au plan P_0) est tel que $\theta = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{z_0}, \vec{z})$, on pose : $\vec{CG} = \lambda\, \vec{z}$ (C centre de la couronne).

L'angle φ représente la rotation propre de T autour de l'axe Gz.

Le centre de masse G de T a pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère R_0.

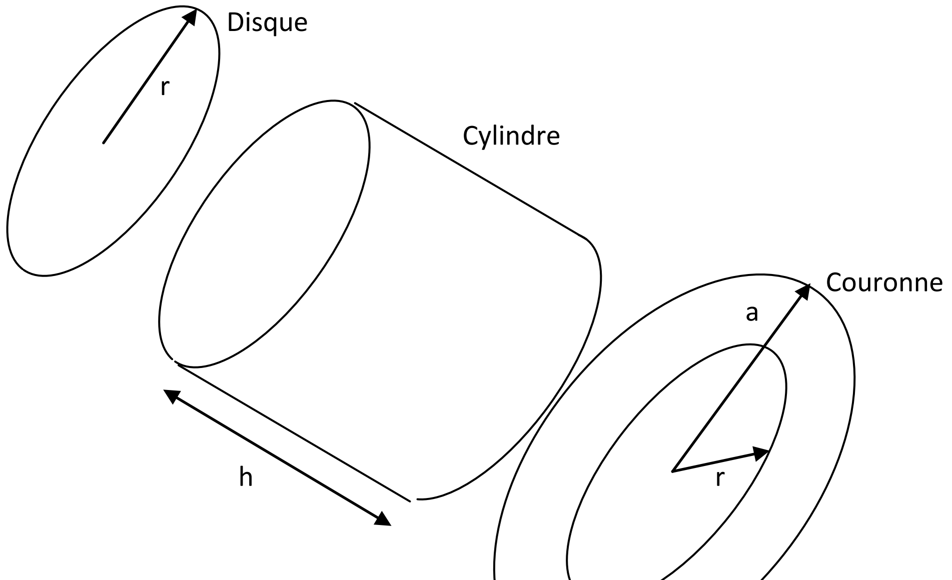
Partie cinématique :

1- Déterminer l'expression de $\vec{\Omega}(T/R_0)$ par ses projections dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.
2- Ecrivez l'équation traduisant le contact au point I entre T et P_0, reliant z et θ.
3- Calculez $\vec{V}(G/R_0)$ par ses projections dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$

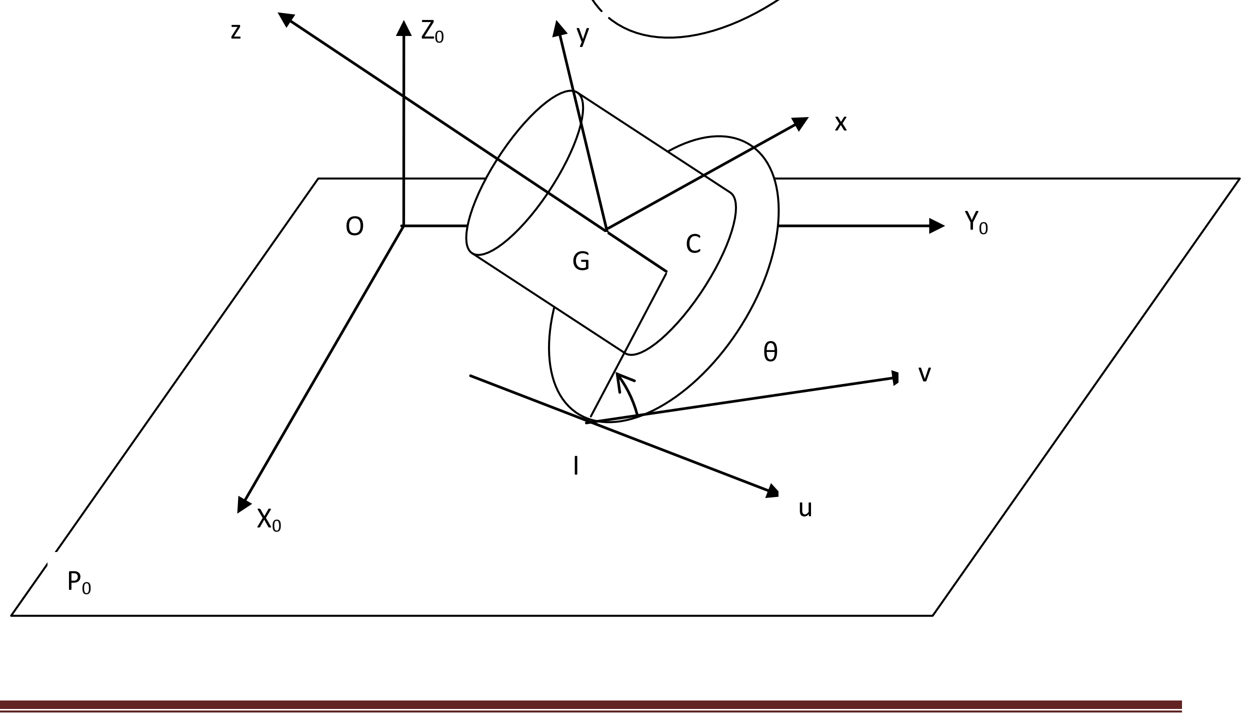
4- Déterminez les équations traduisant le non glissement de par rapport à P_0.

Partie cinétique :

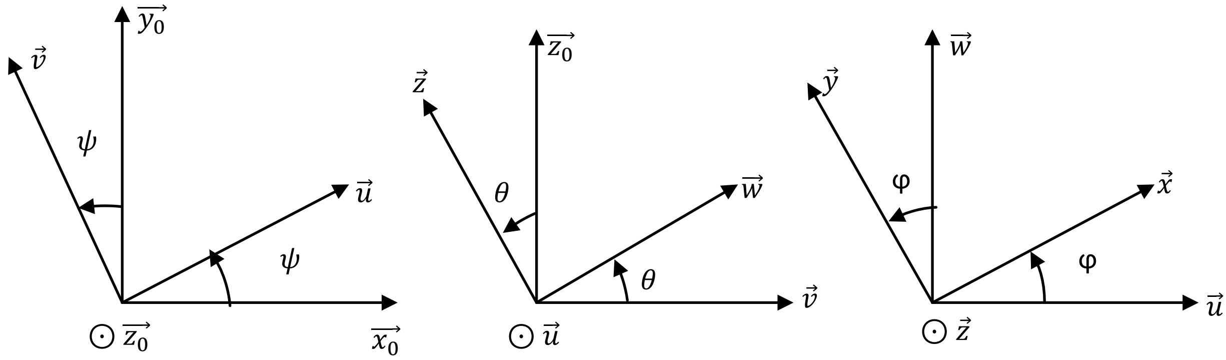
1- Déterminez la distance λ en fonction de h.
2- Quelles sont les relations entre les moments d'inertie de T par rapport aux axes Gx, Gy et GZ notés respectivement A, B et C ? Comment s'écrit la matrice d'inertie dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$? Justifiez votre réponse sans faire les calculs des intégrales.
3- Déterminez les éléments de réduction du torseur cinétique en G dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.
4- Calculez $\overrightarrow{z_0} \cdot \vec{\sigma}(G, T/R_0)$ (projection du moment cinétique de T par rapport à R_0 sur l'axe Oz_0) en déduire la projection du moment dynamique en G de T par rapport à R_0 : $\overrightarrow{z_0} \cdot \vec{\delta}(G, T/R_0)$, montrez que $\overrightarrow{z_0} \cdot \vec{\delta}(G, T/R_0) = C\,\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta)$
5- Calculez l'énergie cinétique $E_C(T/R_0)$.



Eléments formant le chapeau



Solution



Partie cinématique

1- Expression de $\vec{\Omega}(T/R_0)$

$$R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}) \xrightarrow{\dot{\psi}\,\vec{z_0}} R_1(\vec{u},\vec{v},\vec{z_0}) \xrightarrow{\dot{\theta}\,\vec{u}} R_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z}) \xrightarrow{\dot{\varphi}\,\vec{z}} R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

$$\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z} = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta)\vec{z}$$

2- Equation traduisant le contact au point I entre T et P_0.

Les points O et I appartiennent au plan P_0, ce qui se traduit par :

$$\overrightarrow{OI}\cdot\vec{z_0} = 0 = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI})\cdot\vec{z_0} = (x\vec{x_0} + y\,\vec{y_0} + z\,\vec{z_0} - \lambda\vec{z} - a\vec{w})$$

Sachant que : $\vec{z_0}\cdot\vec{z} = cos\theta$ $\quad et \quad$ $\vec{z_0}\cdot\vec{w} = cos(\pi/2 - \theta) = sin\theta$ $\quad d'$où: $z = \lambda\,cos\theta + a\,sin\theta$

3- Calcul de la vitesse de G par rapport à R_0

$$\vec{V}\left(G/R_0\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\,\vec{x_0} + \dot{y}\,\vec{y_0} + \dot{z}\,\vec{z_0} = \dot{x}\,\vec{x_0} + \dot{y}\,\vec{y_0} + \dot{\theta}(a\,cos\theta - \lambda\,sin\theta)\vec{z_0}$$

Or : $\vec{x_0} = cos\psi\,\vec{u} - \sin\psi\,\vec{v} = cos\psi\,\vec{u} - sin\psi\,cos\theta\,\vec{w} + sin\psi\,sin\theta\,\vec{z}$

$\vec{y_0} = sin\psi\,\vec{u} + cos\psi\,\vec{v} = sin\psi\,\vec{u} + cos\psi\,cos\theta\,\vec{w} - cos\psi\,sin\theta\,\vec{z}$ $\quad et$

$\vec{z_0} = sin\theta\,\vec{w} + cos\theta\,\vec{z}$

En remplaçant chaque terme par sa valeur, on trouve :

$$\vec{V}\left(G/R_0\right) = \begin{pmatrix} \dot{x}\,cos\psi + \dot{y}\,sin\psi \\ -\dot{x}\,sin\psi\,cos\theta + \dot{y}\,cos\psi\,cos\theta + \dot{z}\,sin\theta \\ \dot{x}\,sin\psi\,sin\theta - \dot{y}\,cos\psi\,sin\theta + \dot{z}\,cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

4- Le non glissement en I

La vitesse de glissement de T par rapport à R_0 en I est nulle.

$$\vec{V_g}(T/R_0) = \vec{V}(I \in T/R_0) - \vec{V}(I \in R_0/R_0) = \vec{0} = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(T/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}$$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} \dot{x}\,cos\psi + \dot{y}\,sin\psi \\ -\dot{x}\,sin\psi\,cos\theta + \dot{y}\,cos\psi\,cos\theta + \dot{z}\,sin\theta \\ \dot{x}\,sin\psi\,sin\theta - \dot{y}\,cos\psi\,sin\theta + \dot{z}\,cos\theta \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\,sin\theta \\ (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta) \end{pmatrix}_{R_2} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -\lambda \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}\,cos\psi + \dot{y}\,sin\psi - \lambda\dot{\psi}\,sin\theta + a\big(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta\big) = 0 \\ -\dot{x}\,sin\psi\,cos\theta + \dot{y}\,cos\psi\,cos\theta + \dot{z}\,sin\theta + \lambda\,\dot{\theta} = 0 \\ \dot{x}\,sin\psi\,sin\theta - \dot{y}\,cos\psi\,sin\theta + \dot{z}\,cos\theta - a\,\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Partie cinétique

1- Valeur de λ en fonction de h

Soient G_C, C et G_D les centres de masse respectivement du cylindre, de la couronne et du disque. Le centre de masse du solide T permet d'écrire :

$$m\,\overrightarrow{CG} = \frac{m}{4}\,\overrightarrow{CC} + \frac{m}{2}\,\overrightarrow{CG}c + \frac{m}{2}\,\overrightarrow{CG_D} \quad \Leftrightarrow \quad m\lambda = \frac{m}{2}\frac{h}{2} + \frac{m}{2}\,h \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{2}$$

2- Relations entre les moments d'inertie de T par rapport à Gx, Gy et Gz

L'axe Gz est l'axe de symétrie de révolution de T, tous les axes perpendiculaires à l'axe Gz sont équivalents et par conséquent les moments d'inertie par rapport aux axes Gx et Gy sont égaux.

$$A = B \quad avec \quad A = I_{Gx} = \int (y^2 + z^2)dm \quad et \quad B = I_{Gy} = \int (x^2 + z^2)dm$$

$$2A = \int (y^2 + z^2)dm + \int (x^2 + z^2)dm = \int (x^2 + y^2)dm + 2\int z^2\;dm = C + 2\int z^2\;dm$$

Où $C = \int (x^2 + y^2)dm$ moment d'inertie de T par rapport à l'axe Gz

$$A = B = \frac{C}{2} + \int z^2\;dm$$

La matrice d'inertie de T par rapport au repère R s'écrit alors dans cette base sous la forme :

$$M_G(T) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_R$$

3- Torseur cinétique

Les éléments de réduction du torseur cinétique au point G sont :

$$[\vec{\sigma}\,(T/R_0)] = \begin{bmatrix} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}(G, T/R_0) \end{bmatrix}$$

$$m\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = m \begin{pmatrix} \dot{x}\,cos\psi + \dot{y}\,sin\psi \\ -\dot{x}\,sin\psi\,cos\theta + \dot{y}\,cos\psi\,cos\theta + \dot{z}\,sin\theta \\ \dot{x}\,sin\psi\,sin\theta - \dot{y}\,cos\psi\,sin\theta + \dot{z}\,cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}$$

$$\vec{\sigma}(G, T/R_0) = M_G(T)\vec{\Omega}(T/R_0) = A\dot{\theta}\,\vec{u} + A\dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w} + C\big(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta\big)\vec{z}$$

4- Projection du moment cinétique de T sur l'axe Oz_0

$$\overrightarrow{z_0}\cdot\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)=(sin\theta\,\vec{w}+cos\theta\,\vec{z})\left[A\dot{\theta}\,\vec{u}+A\dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w}+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)\vec{z}\right]$$
$$=A\dot{\psi}\,sin^2\theta+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)cos\theta$$
$$\left.\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right|_{R_0}=\vec{0}\Rightarrow\left.\frac{d\left(\overrightarrow{z_0}\cdot\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)\right)}{dt}\right|_{R_0}=\overrightarrow{z_0}\cdot\left.\frac{d\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)}{dt}\right|_{R_0}=\overrightarrow{z_0}\cdot\vec{\delta}(G,T/R_0)$$

La projection du moment dynamique de T par rapport à R_0 sur l'axe Oz_0 est :

$$\overrightarrow{z_0}\cdot\vec{\delta}(G,T/R_0)=\frac{d\left[A\dot{\psi}\,sin^2\theta+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)cos\theta\right]}{dt}$$

Calcul de $\vec{z}\cdot\vec{\delta}(G,T/R_0)=\vec{z}\cdot\left.\frac{d\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)}{dt}\right|_{R_0}=\vec{z}\cdot\left[\left.\frac{d\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)}{dt}\right|_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)\right]$

$$=\vec{z}\cdot\left.\frac{d\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)}{dt}\right|_{R_2}+\underbrace{\vec{z}\cdot\left[\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)\right]}_{=\vec{0}}=\vec{z}\cdot\left.\frac{d\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)}{dt}\right|_{R_2}=C\frac{d(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)}{dt}$$

Avec

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\sigma}\,(G,T/R_0)=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\,sin\theta\\ \dot{\psi}\,cos\theta\end{pmatrix}_{R_2}\wedge\begin{pmatrix}A\dot{\theta}\\ A\dot{\psi}\,sin\theta\\ C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)\end{pmatrix}_{R_2}$$
$$=\begin{pmatrix}\dot{\psi}\,sin\theta\left[C\dot{\varphi}+(C-A)\dot{\psi}\,cos\theta\right]\\ \dot{\theta}\left[C\dot{\varphi}-(C-A)\dot{\psi}\,cos\theta\right]\\ 0\end{pmatrix}_{R_2}$$

5- <u>L'énergie cinétique</u>

$$E_c(T/R_0)=\frac{1}{2}\vec{V}^2(G/R_0)+\frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}(T/R_0)M_G(T)\vec{\Omega}(T/R_0)$$
$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}\left[A\dot{\theta}^2+A\dot{\psi}^2sin^2\theta+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)^2\right]$$

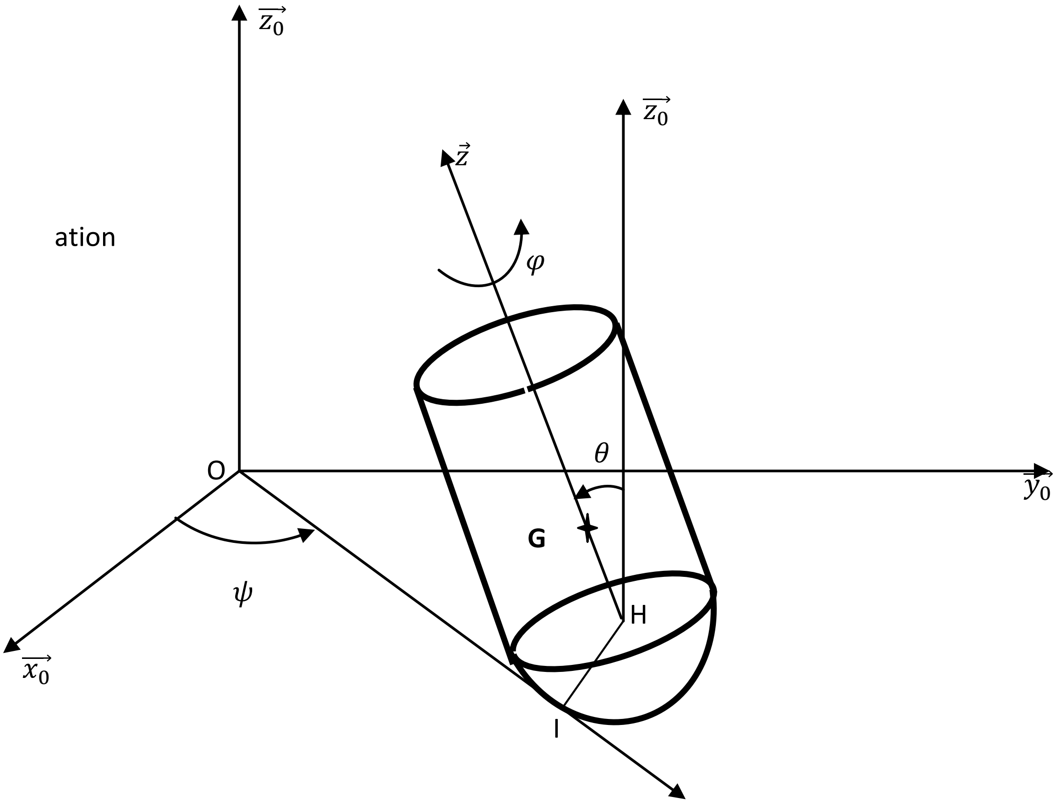
Exercice 10 (Epreuve de la session normale Janvier 2013)

Un solide de révolution(S) appelé culbuto est constitué par une demi-sphère (S_1) et un cylindre (S_2) de même base. On désigne par a le rayon de cette base et par H son centre ; la hauteur du cylindre circulaire (S_2) est noté h. (S_1) et (S_2) sont des solides pleins homogènes de masses respectives m_1 et m_2 et de même densité volumique ρ. On note $(H,\vec{z})$ l'axe de révolution du solide(S) orienté de (S_1) vers (S_2), et $R(H,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S).

On note M la masse totale du système et G son centre d'inertie tel que $\overrightarrow{HG}=L\,\vec{z}$.

Soit $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un repère orthonormé direct supposé être galiléen, avec $(O,\overrightarrow{z_0})$ vertical ascendant. On repère la position de (S) dans ce référentiel par les coordonnées (x, y, z) de G et par les angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ). On note $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{z_0})$ et $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les deux repères intermédiaires. Le solide (S) est situé dans le demi-espace $z_0>0$ et est assujetti à se déplacer de telle façon que sa partie hémisphérique soit en contact ponctuel en un point I avec le plan fixe $(O,\overrightarrow{x_0},\ \overrightarrow{y_0})$

ation



Etude cinématique

1- Représenter les figures planes de rotation et donner l'expression du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$.
2- Quelles sont les composantes de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ dans la base de Résal $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$?
3- Déterminer la condition géométrique de contact entre (S) et le plan fixe $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.Dans la suite du problème, cette condition de maintien de contact sera prise en compte.
4- Quel est alors le nombre de degrés de liberté du système ?
5- Calculer la vitesse : $\vec{V}(G/R_0)$.
6- Calculer l'accélération : $\vec{\Gamma}(G/R_0)$.
7- Déterminer la vitesse de glissement en I de (S) par rapport au plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ par ses composantes dans la première base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{z_0})$. Commenter le résultat.

Géométrie des masses

Dans cette partie toutes les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

8- Déterminer la position du centre d'inertie G_1 de la demi-sphère (S_1).
9- En déduire la position $\overrightarrow{HG}$ du centre d'inertie G du système, en exprimant L en fonction de a et h.
10- Déterminer la matrice d'inertie en H de la demi-sphère (S_1).
11- Déterminer la matrice d'inertie en H du cylindre (S_2).
12- En déduire la matrice d'inertie en H du système (S).
13- Par application du théorème d'Huygens généralisé, déterminer la matrice centrale d'inertie du culbuto.

Etude cinétique

Afin de simplifier l'écriture dans cette partie, on adoptera pour la matrice centrale d'inertie de (S), la forme de Binet suivante :

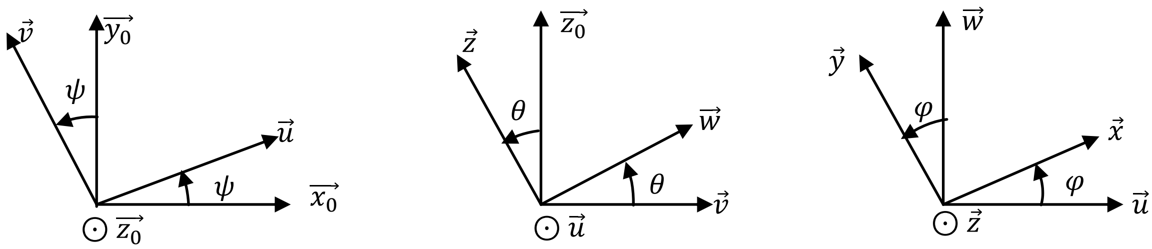
$$M_G(S) = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

14- Déterminer le torseur cinétique en G de (S) dans son mouvement par rapport à R_0.

15- En utilisant le théorème de Koenig, Calculer l'énergie cinétique du système.

Solution

1- Figures planes de rotation



$$R_0(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{\dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0}} R_1(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{\dot{\theta}\,\vec{u}} R_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z}) \xrightarrow{\dot{\varphi}\,\vec{z}} R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}$$

2- Composantes du vecteur instantané de rotation

$$\overrightarrow{z_0} = \cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{w} \Rightarrow \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z} = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{w} + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\cos\theta\right)\vec{z}$$

3- Condition géométrique de contact entre (S) et le plan fixe

Le point de contact I est dans le plan (xOy), donc perpendiculaire à z_0 ; ce qui donne :

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0 \quad or \quad \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HI} = x\,\overrightarrow{x_0} + y\,\overrightarrow{y_0} + z\,\overrightarrow{z_0} + L\,\vec{z} - a\overrightarrow{z_0} \quad \Rightarrow$$
$$z = a + L\cos\theta$$

4- Degrés de liberté

On a 6 paramètres : x, y, z, ψ, θ et φ ; et une seule équation : $z = a + L\cos\theta$

Le système a 5 degrés de liberté.

5- Vitesse de centre de masse

$$\vec{V}(G/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\,\overrightarrow{x_0} + \dot{y}\,\overrightarrow{y_0} + \dot{z}\,\overrightarrow{z_0} = \dot{x}\,\overrightarrow{x_0} + \dot{y}\,\overrightarrow{y_0} - L\dot{\theta}\,\sin\theta\,\overrightarrow{z_0}$$

6- Accélération de centre de masse

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left.\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \ddot{x}\,\overrightarrow{x_0} + \ddot{y}\,\overrightarrow{y_0} - L(\ddot{\theta}sin\theta + \dot{\theta}^2\,cos\theta)\overrightarrow{z_0}$$

7- <u>Vitesse de glissement en I d (S) par rapport au plan fixe.</u>

$$\overrightarrow{V_g}(S/xoy) = \vec{V}(I \in S/R_0) - \underbrace{\vec{V}(I \in (xoy)/R_0)}_{=\vec{0}} = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}$$

$$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HI} = -L\vec{z} - a\overrightarrow{z_0} = Lsin\theta\,\vec{v} - (a + Lcos\theta\,)\overrightarrow{z_0}$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{u} - \dot{\varphi}sin\theta\;\;\vec{v} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\,cos\theta)\,\overrightarrow{z_0}$$

$$\vec{V}(G/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}\,cos\psi + \dot{y}\,sin\psi \\ -\dot{x}\,sin\psi + \dot{y}\,cos\psi \\ -L\dot{\theta}\,sin\theta \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\overrightarrow{V_g}(S/xoy) = \begin{pmatrix} \dot{x}\,cos\psi + \dot{y}\,sin\psi - L\,\dot{\psi}\,sin\theta + a\,\dot{\varphi}\,sin\theta \\ -\dot{x}\,sin\psi + \dot{y}\,cos\psi + L\,\dot{\theta}\,cos\theta + a\,\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

La vitesse de glissement est dans le plan (xoy).

8- <u>Centre d'inertie de la demi-sphère</u>

L'axe OZ est axe de symétrie de la demi-sphère, Donc : $x_{G_1} = y_{G_1} = 0\ et\ z_{G_1} = \frac{1}{m_1}\iiint z\,dm = \overline{HG_1}$

$$\overline{HG_1} = \frac{\rho}{m_1}\iiint\ r^3\,cos\theta\,sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{3}{2\pi\,a^3}\int_0^a r^3\,dr\int_{-\pi/2}^{0} cos\theta\,sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{3}{8}a$$

9- <u>Position du centre d'inertie du système</u>

La position du centre d'inertie du système est donnée par :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{1}{(m_1 + m_2)}\left(m_1\,\overrightarrow{HG_1} + m_2\,\overrightarrow{HG_2}\right)$$

$$avec\quad m_1 = \frac{2\pi}{3}\,\rho\,a^3\quad,\ m_2 = \pi\rho a^2\,h\quad,\quad \overline{HG_2} = \frac{h}{2}\qquad et\quad \overline{HG_1} = -\frac{3}{8}a$$

En remplaçant chaque terme par sa valeur, on trouve :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{3(2h^2 - a^2)}{4(2a + 3h)}\,\vec{z} = L\vec{z}$$

10- <u>Matrice d'inertie de la demi-sphère en H</u>

L'axe Oz est axe de révolution de la demi-sphère, donc les produits d'inertie sont nuls et les moments d'inertie par rapport aux axes perpendiculaires à Oz sont égaux.

$$A = B = \frac{C}{2} + \iiint z^2\,dm$$

$$C = \iiint (x^2 + y^2)\,dm = \rho\int_0^a r^4\,dr\int_0^{\pi/2} sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5}\,m_1\,a^2$$

Car $x^2 + y^2 = r^2 sin^2\theta$; $dm = \rho\,r^2\,sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\quad et\quad m_1 = \frac{2}{3}\pi\rho a^3$

$$\iiint z^2\,dm = \rho\int_0^a r^4\,dr\int_0^{\pi/2} sin\theta\,cos^2\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m_1}{5}\,a^2$$

$$A = B = \frac{2}{5}\, m_1\, a^2$$

$$M_H(S_1) = \frac{2}{5}\, m_1\, a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_R$$

11- <u>Matrice d'inertie en H du cylindre</u>

L'axe Oz est axe de révolution du cylindre, donc les produits d'inertie sont nuls et les moments d'inertie par rapport aux axes perpendiculaires à Oz sont égaux.

$$A = B = \frac{C}{2} + \iiint z^2\, dm \qquad avec \quad m_2 = \rho\pi a^2\, h$$

$$\begin{cases} C = \iiint (x^2 + y^2)\, dm = \rho \int_0^a r^3\, dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m_2}{2}\, a^2 \\ \iiint z^2\, dm = \rho \int_0^a r\, dr \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m_2}{3}\, h^2 \end{cases} \Rightarrow\; A = B = m_2 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right)$$

$$M_H(S_2) = m_2 \begin{pmatrix} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}_R$$

12- <u>Matrice d'inertie en H du système</u>

$$M_H(S) = M_H(S_1) + M_H(S_2)$$

$$M_H(S) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\, m_1\, a^2 + m_2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}\, m_1\, a^2 + m_2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}\, m_1\, a^2 + \frac{m_2}{2}\, a^2 \end{pmatrix}_R$$

13- <u>Matrice d'inertie en G du système</u>

$$M_H(S) = M_G(S) + M_H(G)$$

$$M_H(G) = ML^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_R \quad \text{où} \quad M = m_1 + m_2 \quad et\ L = z_G = \overline{HG} = \frac{3(2h^2 - a^2)}{4(2a + 3h)}$$

$$M_G(S) = M_H(S) - M_H(G) = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}_R$$

Avec $A_G = \frac{2}{5}\, m_1\, a^2 + m_2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{9}{16}(m_1 + m_2)\left(\frac{2h^2 - a^2}{2a + 3h}\right)^2$

Et $C_G = \frac{2}{5}\, m_1\, a^2 + \frac{m_2}{2}\, a^2$

14- <u>Torseur cinétique de (S) en G</u>

$$[\tau_c]_G = \begin{cases} M\,\vec{V}(G/R_0) = M\left[\dot{x}\,\overrightarrow{x_0} + \dot{y}\,\overrightarrow{y_0} - L\,\dot{\theta}\,sin\theta\,\overrightarrow{z_0}\right] \\ \vec{\sigma}\,(G,S/R_0) = M_G(S)\,\vec{\Omega}(S/R_0) = A_G\,\dot{\theta}\,\vec{u} + A_G\,\dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w} + C_G\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta\right)\vec{z} \end{cases}$$

$\vec{\Omega}(S/R_0)$ est exprimé dans la même base que $M_G(S)$, c-à-d dans la base R.

15- Torseur dynamique de (S) en G

$$[\tau_d]_G = \begin{cases} M\vec{\Gamma}(G/R_0) = M\left[\ddot{x}\,\overrightarrow{x_0} + \ddot{y}\,\overrightarrow{y_0} - L\left(\ddot{\theta}sin\theta + \dot{\theta}^2\,cos\theta\right)\overrightarrow{z_0}\right] \\ \vec{\delta}\,(G,S/R_0) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}\,(G,S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \end{cases}$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}\,(G,S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{\sigma}\,(G,S/R_0)}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\delta}\,(G,S/R_0)$$

$$= \begin{pmatrix} A_G\,\ddot{\theta} \\ A_G\left(\ddot{\psi}\,sin\theta + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,cos\theta\right) \\ C_G\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\,cos\theta - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,sin\theta\right) \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\,sin\theta \\ \dot{\psi}\,cos\theta \end{pmatrix}_{R_2} \wedge \begin{pmatrix} A_G\,\dot{\theta} \\ A_G\,\dot{\psi}\,sin\theta \\ C_G\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta\right) \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}\,(G,S/R_0) = \begin{pmatrix} A_G\,\ddot{\theta} + (C_G - A_G)\dot{\psi}^2\,sin\theta\,cos\theta + C_G\,\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\,sin\theta \\ A_G\left(\ddot{\psi}\,sin\theta + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,cos\theta\right) + (A_G - C_G)\dot{\theta}\,\dot{\psi}\,cos\theta - C_G\dot{\theta}\,\dot{\varphi} \\ C_G\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\,cos\theta - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,sin\theta\right) \end{pmatrix}_{R_2}$$

16-Energie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R_0.

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}M\,\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0)M_G(S)\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}\,M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + L^2\,\dot{\theta}^2\,sin^2\theta\right) + \frac{A_G}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{A_G}{2}\,\left(\dot{\psi}\,sin\theta\right)^2 + \frac{C_G}{2}\,\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\theta\right)^2$$