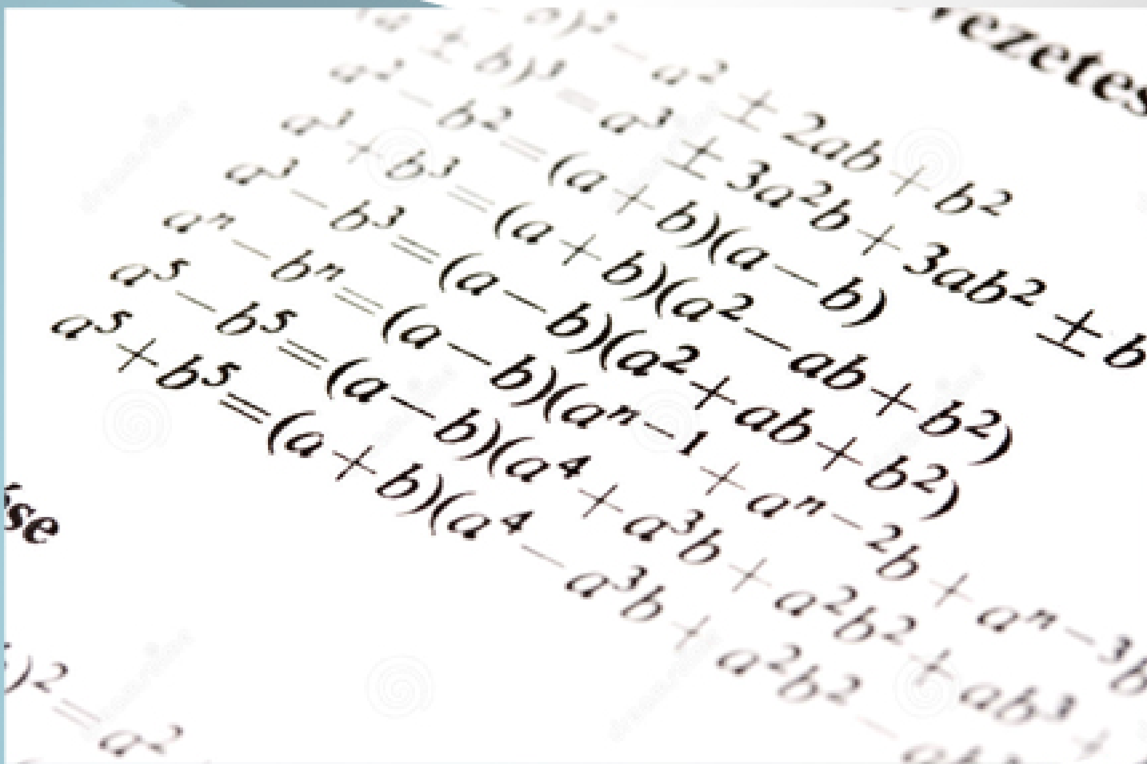
جامعة شعيب الدكالي
كلية العلوم
الجديدة

CORRECTION DES EXAMENS

ALGEBRE



club najah

إعداد نادي النجاح

2015 - 2016

clubnajah.blogspot.com

/ succes.club

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2014/15

SMPC1

Examen d'algèbre1

Durée 1h30'

Exercice 1. *On considère le polynôme* $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.

1) *Montrer que* 2 *est une racine de* P.
2) *Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine* 2.
3) *Factoriser alors* P *dans* $\mathbb{R}[X]$.
4) *En déduire une factorisation de* P *dans* $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. *On donne les nombres complexes :*

$$z_1 = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})(\frac{1}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}) \quad et \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

1) *Mettre* z_1 *et* z_2 *sous forme algèbrique* $a + ib$.
2) *Déterminer le module puis un argument de* z_1, $z_2 et z_1 z_2$.
3) *Déterminer le module puis un argument de* $Z = \frac{z_1}{z_2}$ *et* $Z' = z_2^{10}$. *Ecrire* Z *et* Z' *sous forme algèbrique.*

Exercice 3.

1) *Pour quellesvaleurs de* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, *le polynôme* $Q(X) = X^2 + X + 1$ *divise-t-il le polynôme* $P(X) = X^n + X + 1$?
(Indication : Considérer la racine $\mathrm{j} = e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ *de* Q *et exprimer* j^n *en fonction du reste* r *de la division euclidienne de* n *par* 3*).*
2) *Dans le cas où* Q *divise* P, *déterminer l'ordre de multiplicité de la racine* j *de* P.

****

نادي النجاح

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques
ET Informatique
El Jadida

Année Universitaire : 2012/2013

Filières SMPC1

Épreuve d'Algèbre
Session de Rattrapage
Durée 1h 30'

Exercice 1.
Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & 3z & + & 2t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ 5x & - & 5y & + & 5z & + & 7t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(T)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & my & - & mz & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2.
1) Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$ où

$$P(X) = X^4 + X^3 + \alpha X^2 + \beta X + 2$$

et

$$Q(X) = X^2 + 2.$$

2) Pour quelles valeurs de α et β, le polynôme $Q(X)$ divise le polynôme $P(X)$?
3) On donne à α, β les valeurs trouvées dans 2), factorier $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

نادي النجاح

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire : 2011/2012
Section : SMPC1

Epreuve d'Algèbre

Session de Rattrapage

Durée : 1h30mn

EXERCICE 1

I- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\ e_4\}$, on considère les vecteurs :

$$a = (1,1,1,1), \qquad b = (2,3,2,1)\,, \qquad c = (4,1,1,1).$$

1) Déterminer les composantes du vecteur $d = a - 3b + 2c$.

2) On pose $g = d + \alpha(e_1 + e_4)$. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α, la famille $\{a, b, c, g\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

II- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ on considère les deux familles :

$S = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (1,2,0,3,3)$, $u_2 = (2,0,0,1,2)$ et $u_3 = (4,4,0,7,8)$.

$T = \{w_1, w_2, w_3\}$ où $w_1 = (1,2,1,-1,0)$, $w_2 = (-1,2,0,2,1)$ et $w_3 = (1,6,2,0,1)$.

1) Déterminer une base de F =sev< S >, et une base de G = sev< T >.
2) Déterminer une base de F ∩ G.

EXERCICE 2

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, soit le point $A(1, -1, -2)$ et les vecteurs

$$\vec{u} = (0,1,1), \qquad \vec{v} = (1,1,0)\,, \qquad \vec{w} = (1,0,1).$$

1) Vérifier que $R' = (A, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\})$ est un repère cartésien de $\mathbb{R}^3$.

2) On considère le plan $P : x + y - z = 2$.

a) Vérifier que $\vec{u} \in \vec{P}$, et $\vec{w} \in \vec{P}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan P par rapport au repère R'.

c) Donner une équation paramétrique et une autre cartésienne du plan P' passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) i) Donner le système d'équations qui définit le sous espace affine $P \cap P'$.

ii) En déduire un repère cartésien de $P \cap P'$.

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques
ET Informatique
El Jadida

Année Universitaire : 2013/2014

Filières SMPC1

Examen du première semestre
Examen de Janvier
Épreuve d'Algèbre
Durée 1h 30'

+CLUB NAJAH+ UCD.FS.ELJADIDA LE PRÉSIDENT

Exercice 1. *(6pts) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs*

$$u_1 = (1,0,1,1) \quad u_2 = (1,1,0,1)$$

$$u_3 = (0,-1,1,0) \quad u_4 = (2,1,1,2)$$

et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.
1. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
2. En déduire une base de F.

Exercice 2. *(12pts) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :*

$$u = (1,-1,2,-2) \quad v = (4,0,1,-5) \quad w = (3,1,-1,-3)$$

et soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = x - y + z + 2t = 0\}$.
1. Dire pourquoi H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de G et une base de H.
3. Déterminer une base de $G \cap H$ et une base de $G + H$.
4. A-t-on $G \oplus H = \mathbb{R}^4$?
5. Trouver un supplémentaire de $G + H$ dans $\mathbb{R}^4$.
6. Trouver un supplémentaire de $G \cap H$ dans $G + H$.

Exercice 3. *(6pts) On considère le système non linéaire suivant :*

$$(S) \begin{cases} x^3y^2z & = & 3^2 \\ xy^3z^2 & = & (\frac{2}{3})^7 \\ x^2yz^{-1} & = & (\frac{3}{2})^{11} \end{cases}$$

1. Montrer que si (x,y,z) est une solution du système (S), alors x, y et z sont du même signe, c'est-à-dire, sont tous positifs ou tous négatifs.
2. Résoudre le système (S).

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques
El Jadida

Année Universitaire : 2014/2015
Filières SMPC1

Examen de Rattrapage d'Algèbre 1
Durée 1h 30'

Exercice 1.

On considère le polynôme

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + \alpha X^2 - 7X + 2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer α pour que -2 soit une racine de P.
2) On suppose dans la suite de cet exercice que $\alpha = 8$, déterminer l'ordre de multiplicité de la racine -2.
3) Effectuer la division euclidienne de P par $X + 2$.
4) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ (Indication : développer $(a - b)^4$).

Exercice 2.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ & & -x_2 & - & x_3 & = & m \end{array}\right.$$

Exercice 3.

On donne le nombre complexe $A = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

1. Chercher les racines carrées z de A sous forme algèbrique $a + \mathrm{i}b$.
2. Ecrire A sous forme polaire $\rho e^{\mathrm{i}\alpha}$ où $\rho > 0$.
3. En posant $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, calculer d'une autre façon les racines carrées de A.
4. Déduire de 1. et de 3. les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ (Indication : utiliser $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$).

Examen d'algèbre 1

2014/2015 (SMPC1)

$P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$

Ex : 1)

1/ Montrons que 2 est une racine de P, càd $P(2) = 0$

$P(2) = 2^4 - 3\times(2)^3 + 2^2 + 4$

$= 16 - 3\times 8 + 4 + 4$

$= 24 - 24 = 0$

Donc 2 est une racine de P.

2/

- $P'(X) = 4X^3 - 9X^2 + 2X$

$P'(2) = 4\times 2^3 - 9\times 2^2 + 2\times 2$

$= 32 - 36 + 4 = 0$

- $P''(X) = 12X^2 - 18X + 2$

$P''(2) = 12\times 2^2 - 18\times 2 + 2$

$= 48 - 36 + 2$

$= 14 \neq 0$

Comme $P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) \neq 0$

donc 2 est une racine de d'ordre 2 de P

3/ Comme 2 est une racine d'ordre 2 de P

alors $(X-2)^2$ divise P. càd que

le reste de la division euclidienne de P

$(X-2)^2$ est égale à 0.

$(X-2)^2 = X^2 - 4X + 4$.

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 & X^2 - 4X + 4 \\ \cline{2-2} -X^4 + 4X^3 - 4X^2 & X^2 + X + 1 \\ \cline{1-1} X^3 - 3X^2 + 4 & \\ -X^3 + 4X^2 - 4X & \\ \cline{1-1} X^2 - 4X + 4 & \\ -X^2 + 4X - 4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 = (X^2 - 4X + 4)(X^2 + X + 1)$

Donc $P(X) = (X-2)^2 (X^2 + X + 1)$

Posons : $Q(X) = X^2 + X + 1$.

l'equation $Q(X) = 0$ n'a pas de solution de $\mathbb{R}$.

car $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$.

(càd $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine reel).

Alors la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$P(X) = (X-2)^2 (X^2 + X + 1)$

4/ D'après 3° l'equation $Q(X) = X^2 + X + 1$ a deux racine complexe. Z_1 et Z_2. avec :

$Z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $Z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

donc $Q(X) = (X - Z_1)(X - Z_2)$

D'où $P(X) = (X-2)^2 (X - Z_1)(X - Z_2)$

est la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Ex 2 :

on a : $Z_1 = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})\left(\frac{1}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

$$Z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1/

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{8} - i\frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{8}$$

$$= \cancel{\frac{\sqrt{6}}{8}} - i\frac{\sqrt{18}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8} - \cancel{\frac{\sqrt{6}}{8}}$$

$$= -i\frac{3\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$= i\left(-\frac{4\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$= -i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $Z_1 = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$Z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(1 - i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{1}$$

$$= -1 - i\sqrt{3}$$

2/ on a $Z_1 = -i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc $|Z_1| = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$Z_1 = |Z_1|\, e^{i \operatorname{Arg} Z_1}$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$Z_1 = -i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-i)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i(\pi + \pi/2)}$ $\left(e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i3\pi/2}$

et on a aussi $Z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

donc $|Z_2| = \sqrt{1+3} = 2.$

$Z_2 = 2\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\left(-\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= -2\, e^{i\pi/3}.$

$= 2\, e^{i(+\pi + \pi/3)}$ $\left(e^{i\pi} = -1\right)$

$= 2\, e^{i4\pi/3}$

3/ soit $Z = \dfrac{Z_1}{Z_2}$, alors :

$|Z| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|} = \dfrac{1/\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$Z = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i3\pi/2}}{2\, e^{i4\pi/3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\, e^{i(3\pi/2 - 4\pi/3)}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\, e^{i(\pi/6)}$

$\arg(Z) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = \dfrac{3\pi}{2} - 4\pi/3 = \pi/6$

On a : $z' = z_2^{10} = (2e^{i4\pi/3})^{10} = 2^{10} e^{i\frac{40\pi}{3}} = 2^{10} e^{i12\pi} e^{i4\pi/3} = -2^{10} e^{i\pi/3}$

donc :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\, 1/2\right) = \frac{3}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$Z' = -2^{10}\left(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3\right) = -2^{10}\left(1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{9} - i\, 2^{9}\sqrt{3}$$

EX3 :

1°/ Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ divise $P(X) = X^n + X + 1$.

pour que $Q(X)$ divise $P(X)$ il faut que $n \geq 2$.

~~...~~ on fait la division euclidienne de n par 3 alors il existe r, q telle que $n = 3q + r$ avec $0 \leq r \leq 2$.

On a $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ est une racine de Q, càd :

$$j^2 + j + 1 = 0.$$

pour que $Q(X)$ divise $P(X)$ ~~divise~~ il faut que j soit une racine de $P(X)$ càd :

$$j^n + j + 1 = 0.$$

si $r = 0 \Rightarrow n = 3q + 0 = 3q$.

donc $j^{3q} + j + 1 = (j^3)^q + j + 1$

$$j^3 = e^{2\pi i} = 1$$

donc $j^{3q} + j + 1 = j + 2 \neq 0$

donc $n \neq 3q$.

si $r = 1 \Longrightarrow n = 3q+1$

$$j^n + j + 1 = j^{3q+1} + j + 1$$
$$= j^{3q} j + j + 1 \quad \text{car } j^{3q} = 1$$
$$= j + j + 1$$
$$= 2j + 1 \neq 0.$$

donc $n \neq 3q+1$.

si $r = 2 \Longrightarrow n = 3q+2$.

$$j^n + j + 1 = j^{3q+2} + j + 1 \quad (\text{car } j^{3q} = 1)$$
$$= j^{3q} j^2 + j + 1$$
$$= j^2 + j + 1 = Q(j) = 0.$$

j racine de P.

donc si $n = 3q+2 \Longrightarrow$ j racine de P.

donc on prend la valeur de n sous la forme $n = 3q+2$

2/ Dans le cas Q divise P on a : $n = 3q+2$

donc $P(X) = X^{3q+2} + X + 1$

$$P'(X) = (3q+2) X^{3q+1} + 1$$
$$P'(j) = (3q+2) j^{3q+1} + 1$$
$$= (3q+2) j + 1 \neq 0$$

donc j est une racine simple.

Examen de Rattrapage d'Algèbre 1

2014/2015

Exercice 1 :

soit le polynôme :

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + \alpha X^2 - 7X + 2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Pour que -2 soit racine de P il faut et il suffit que

$P(-2) = 0$

donc $(-2)^5 - 2(-2)^4 - 2(-2)^3 + \alpha(-2)^2 - 7(-2) + 2 = 0$

c-àd : $-32 - 2\times 16 - 2(-8) + 4\alpha + 14 + 2 = 0$

après le calcul on aura $4\alpha = 32$

donc $\alpha = 8$

d'où $P(-2) = 0 \iff \alpha = 8$

2) On suppose que $\alpha = 8$, donc -2 est une racine de P

déterminons l'ordre de multiplicité de -2 :

on a : $P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + 8X^2 - 7X + 2$

donc $P'(X) = 5X^4 - 8X^3 - 6X^2 + 16X - 7$

$$\begin{aligned} P'(-2) &= 5\times(-2)^4 - 8(-2)^3 - 6(-2)^2 + 16(-2) - 7 \\ &= 5\times 16 + 8\times 8 - 6\times 4 - 32 - 7 \\ &= 80 + 64 - 24 - 32 - 7 \\ &= 81 \neq 0 \end{aligned}$$

donc l'ordre de multiplicité de (-2) est 1

3) En effectuons la division euclidienne de P par $X+2$,

on aura :

$$P(X) = (X+2)(X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1)$$

4) On a :

$$\begin{aligned} (a-b)^4 = (a-b)^2(a-b)^2 &= (a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^4 + b^4 - 4a^3b - 4ab^3 + 6a^2b^2 \end{aligned}$$

donc pour $a = X$ et $b = 1$, on a :

$$(X-1)^4 = X^4 + 1 - 4X^3 - 4X + 6X^2$$

d'où $P = (X+2)(X-1)^4$

Ce qui donne la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 :

soit $m \in \mathbb{R}$.

soit le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 \\ -x_2 - x_3 = m \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 & ① \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 & ② \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0 \quad (② - ①)$

donc on aura le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 = m \\ 5x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 = m \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -m \end{cases}$$

- si $-m \neq 1$ le système n'admet pas de solution

- si $m = -1$, on aura :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

donc $x_3 = 1 - x_2$

donc : l'ensemble de solution est :

$$\{ (0, x_2, 1 - x_2) \ / \ x_2 \in \mathbb{R} \}$$

2) On a : $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$

$= e^{i\pi/4}$

donc $A = \rho e^{i\alpha}$, avec $\rho = 1 > 0$ et $\alpha = \pi/4$

3) soit $z = re^{i\theta}$, alors si z est une racine carrée de A, on a

$A = z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

donc $r^2 e^{i2\theta} = e^{i\pi/4}$

Alors $|r^2 e^{i2\theta}| = |e^{i\pi/4}|$, donc $r^2 = 1$

$r = 1$ ou $r = -1$

donc $A = z^2$
$= e^{i2\theta}$

donc $2\theta = \pi/4 \Rightarrow \theta = \pi/8$

finalement, on aura : $z_1 = e^{i\pi/8}$

$z_2 = -e^{i\pi/8}$

4) d'après ① les racines carrées de A sont :

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

$z_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} - i\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

d'après ③ les racines carrées de A sont :

$z_1 = e^{i\pi/8} = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$

$z_2 = -e^{i\pi/8} = -\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)$

car $\cos(\pi/8) > 0$, $\sin(\pi/8) > 0$

finalement, on aura :

$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{\sqrt{2}+2})(2-\sqrt{2})}{2(\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

$\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

Exercice 3:

soit $A = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$

1) soit z une racine carrée de A, alors

$$A = z^2 = (a+ib)^2, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = a^2 - b^2 + 2aib = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ ab = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad (a, b \text{ sont non nuls})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{2}/2 \\ a = \sqrt{2}/4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{4b}\right)^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = \sqrt{2}/4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{16b^2} - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = \sqrt{2}/4b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4b} \\ \frac{2}{16} - b^4 = \frac{\sqrt{2}}{2} b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4b} \\ b^4 - \frac{b^2\sqrt{2}}{2} - 1/8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4b} \\ x^2 - x\frac{\sqrt{2}}{2} - 1/8 = 0, \quad x = b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}/4b \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}+2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4}b \\ x = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \end{cases}, \text{ car } x = b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4}b \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4b} \\ b = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4b} \\ b = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2}+2}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{-2}{\sqrt{\sqrt{2}+2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} \\ b = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+2}} \\ b = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \\ z_2 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}\right) \end{cases} \quad \text{racines carrés de } A$$

correction d'éxamen ALGEBRE 2013/2014

Exercice 1.

1. On considère le système suivant et on applique la méthode de Gauss

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 0 & 2 & t \end{array} \xrightarrow[L_4-L_1\to L_4]{L_3-L_1\to L_3} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & -1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x \end{array} \xrightarrow{L_3+L_2\to L_3} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x \end{array}$$

Donc $\begin{cases} -x+y+z &= 0 \\ -x+t &= 0 \end{cases}$ *sont des équations cartésiennes de* F. *2. La solution des système homogène qui défini* F, *donne* $F=\{(t,-z+t,z,t)/z,t\in\mathbb{R}\}$. *On a* $(t,-z+t,z,t)=t(1,1,0,1)+z(0,-1,1,0)$ *où* t *et* z *sont des inconnues secondaires, donc* $\{(1,1,0,1),(0,-1,1,0)\}$ *est une base de* F.

Exercice 2.

1. H *est l'ensemble des solutions d'un système homogène. donc* H *est un sev de* $\mathbb{R}^4$.

2. On applique la méthode de gauss

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{array} \xrightarrow[L_3-3L_1\to L_3]{L_2-4L_1\to L_2} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \end{array} \xrightarrow{L_3-L_2\to L_3} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Posons $u_1=(1,-1,2,-2)$ *et* $u_2=(0,4,-7,3)$, *alors* $B_1=(u_1,u_2)$ *est une base de* G. *On trouve que* $H=\{(-y,y,2y-2t,t)/y,t\in\mathbb{R}\}$ *(on a considérer ici* y *et* t *comme inconnues secondaires). On a* $(-y,y,2y-2t,t)=y(-1,1,2,0)+t(0,0,-2,1)$ *où* y *et* t *sont des inconnues secondaires. donc* $B_2=(v_1,v_2)$ *est une base de* H *où* $v_1=(-1,1,2,0)$ *et* $v_2=(0,0,-2,1)$.

3. On considère la juxtaposition des deux bases (B_1,B_2) *et on applique la méthode de Gauss*

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \xrightarrow{L_3+L_1\to L_3} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \xrightarrow{2L_4+L_3\to L_4} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Posons $v=(0,0,4,-2)$, *alors d'après la dernière matrice on a* $\{u_1,u_2,v\}$ *est une base de* $G+H$.

Notons les vecteurs lignes de la deuxième matrice par u'_1,u'_2,v'_1,v'_2. *La quatrème ligne de la dernière matrice est nulle, donc* $0=2v'_2+v'_1=2v_2+v_1+u_1$, *donc* $u_1=-2v_2-v_1$. *Alors* $\{u_1\}$ *est une base de* $H\cap G$.

4. Non car $H\cap G\neq\{0\}$.

5. La dernière matrice est à ligne échelonées et les vecteurs sont écrits en lignes, comme les colonnes pivots sont les colonnes 1, 2 et 3, alors on peut compléter $\{u_1,u_2,v\}$ *par le vecteur* $e_4=(0,0,0,1)$. *Par suite le sev* $sev\langle e_4\rangle$ *est un supplémentaire de* $G+H$.

6. On a $\{u_1,u_2,v\}$ *est une base de* $G+H$ *et* $\{u_1\}$ *est une base de* $H\cap G$, *alors le sev* $sev\langle u_2,v\rangle$ *est un supplémentaire de* $H\cap G$ *dans* $G+H$.

Exercice 3.

1. Dans la première équation on a 3^2 *et* y^2 *sont positives, donc* x^3z *l'est aussi. Comme les exposants de* x *et de* z *sont impairs, alors* x *et* z *sont du même signe. De la même façon, on tire de la deuxième équation que* x *et* y *sont du même signe et de la troisième équation que* y *et* z *sont du même signe. En conclusion,* x, y *et* z *sont du même signe.*

2. On applique la fonction $\ln$ *pour obtenir*

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln|x| + 2\ln|y| + \ln|z| & = 2\ln(3) \\ \ln|x| + 3\ln|y| + 2\ln|z| & = 7\ln(2) - 7\ln(3) \\ 2\ln|x| + \ln|y| - \ln|z| & = 11\ln(3) - 11\ln(2) \end{cases}$$

On considère le tableau complet de ce dernier système et on applique la méthode de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2\ln(3) \\ 1 & 3 & 2 & 7\ln(2) - 7\ln(3) \\ 2 & 1 & -1 & 11\ln(3) - 11\ln(2) \end{array} \xrightarrow[3L_3 - 2L_1 \to L_3]{3L_2 - L_1 \to L_2} \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2\ln(3) \\ 0 & 7 & 5 & 21\ln(2) - 23\ln(3) \\ 0 & -1 & -5 & 29\ln(3) - 33\ln(2) \end{array}$$

$$\xrightarrow{7L_3 + L_2 \to L_3} \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2\ln(3) \\ 0 & 7 & 5 & 21\ln(2) - 23\ln(3) \\ 0 & 0 & -30 & 180\ln(3) - 210\ln(2) \end{array} \xrightarrow{\frac{-1}{30}L_3 \to L_3} \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2\ln(3) \\ 0 & 7 & 5 & 21\ln(2) - 23\ln(3) \\ 0 & 0 & 1 & -6\ln(3) + 7\ln(2) \end{array}$$

Alors $\ln|z| = -6\ln(3) + 7\ln(2)$ *et donc* $|z| = \frac{2^7}{3^6}$.
$\ln|y| = -2\ln(2) + \ln(3)$ *et donc* $|y| = \frac{3}{2^2}$.
$\ln|x| = 2\ln(3) - \ln(2)$ *et donc* $|x| = \frac{3^2}{2}$.
En conclusion, $S = \{(\frac{3^2}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{2^7}{3^6}), (-\frac{3^2}{2}, -\frac{3}{2^2}, -\frac{2^7}{3^6})\}$.

Remarques.

Exercice 1

1. On peut aussi utiliser la méthode du rang.

2. Si on change les inconnues secondaires on obtient une autre base.

Exercice 2

2. On peut écrire les vecteurs en colonnes et on utilise des opérations de colonnes, et on peut aussi répondre à la question en donnant une base extraite des vecteurs u , v *et* w.

6. Si le vecteur de la base de $H \cap G$, *par exemple* s, *trouver par l'étudiant n'est pas un élément de la base de* B *de* $H + G$, *dans ce cas on cherche par exemple les coordonnées du vecteur* s *dans la base* B *et on applique la méthode du rang pour compléter ce vecteur à une base de* $H + G$, *ce qui donne une base d'un supplémentaire de* $H \cap G$ *dans* $H + G$.

HICHAM

Epreuve d'Algebre
2011/2012 Rattrapage

تانوي الباي

Exercice 1 Espace vectoriel $\mathbb{R}^4$

Rappel des bases canonique

$e_1 = (1\,0\,0\,0)$; $e_2(0\,1\,0\,0)$; $e_3(0\,0\,1\,0)$

$e_4(0\,0\,0\,1)$ de bases canonique tjrs libre

~~Cas~~ parce que ~~c~~ est une base

Donnés $a = (1\,1\,1\,1)$ $b = (2,3,2\,1)$ $c = (4\,1\,1\,1)$

1) $d = a - 3b + 2c$?

$$d = (1,1,1,1) + 2(4,1,1,1) - 3(2,3,2,1)$$
$$= (1,1,1,1) + (8,2,2,2) - (6,9,6,3)$$
$$d = (3,-6,-3,0)$$

+CLUB NAJAH+
UCD FS. EL JADIDA
LE PRÉSIDENT

2) $$g = d + \alpha(e_1 + e_4)$$
$$= (3,-6,-3,0) + \alpha((1,0,0,0) + (0,0,0,1))$$
$$g = (3+\alpha, -6, -3, \alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3+\alpha & -6 & -3 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -6 & 3+\alpha & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 - L_1 \\ L_4 + 3L_1}]{L_2 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & \alpha+6 & \alpha-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+6 & \alpha-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cancel{L_4 \dots}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha-18 \end{pmatrix}$$

Pour la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$

à condition de la famille $\{a, b, c, g\}$

base de $\mathbb{R}^4$ ssi $3\alpha - 18 \neq 0$

$$\boxed{\alpha \neq 6}$$

II Espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$

1) * $F = Sev\langle S\rangle$? ** $G = Sev\langle T\rangle$?

$$* \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = Sev\langle u_1\ u_2\rangle$$

$$** \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \\ \end{array} \quad G = Sev\langle w_1\ w_2\rangle$$

2) $F \cap G$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} \xrightarrow{L_3 - L_1}$$

$$\begin{array}{c} u_1' \\ u_2' \\ w_1' \\ w_2' \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 + L_2} \begin{array}{c} u_1'' \\ u_2'' \\ w_1'' \\ w_2'' \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = w_2'' - w_1'' = (w_2' + u_2') - w_1' = (w_2 - u_2) - (w_1 - u_1)$$

$(w_2 - w_1) + (u_1 - u_2) = 0$ نادي النجاح

$\Rightarrow (w_2 - w_1) = -(u_1 - u_2) \Rightarrow u_2 - u_1 = w_2 - w_1$

Donc $\{(u_2 - u_1)\}$ la base de $F \cap G$

Exercice 2 Espace Affine $\mathbb{R}^3$

$A(1, -1, 2)$

$\vec{u} = (0\ 1\ 1)$ $\vec{v} = (1\ 1\ 0)$ $\vec{w} = (1\ 0\ 1)$

1) Vérifier $R' = (A, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\})$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 1 \\ x = -2 \end{array} \rightarrow$$

Ainsi que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont libre

$\Rightarrow (A, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\})$ est un repère Cartésien

2) $P : x + y - z = 2$

Rappel

Pour vérifier une vecteur $\in \vec{P}$

$P : ax + by + cz = d \Rightarrow \vec{P} = ax + by + cz = 0$

a) $\vec{u} \in \vec{P}$; $\vec{w} \in \vec{P}$

$\vec{P} : x + y - z = 0$

$\vec{u}$: $0 + 1 - 1 = 0$ $\vec{u} \in \vec{P}$

$\vec{v}$: $1 + 0 - 1 = 0$ $\vec{v} \in \vec{P}$

b) On a $P : x + y - z = 2$

l'origine $O(1\ 1\ 0)$ car $1+1-0=2$

Pour d : $A(1\ -1\ -2)$

$\overrightarrow{OA}(0, -2, -2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ \boxed{x + y = -2} \end{cases}$$ l'equation Cartésienne

c) l'equation paramétrique

$$(P') \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -1 + t + k \quad (k, t) \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t + k \end{cases}$$

d) Voir le cours

$P \cap P'$ $\begin{cases} P = ax + by + cz = d \\ P' = a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$ P confondues a P'

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ $P' // P$

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ $P \times P'$

ليس المهم أن تجيب على
صحيح الأسئلة
بل المهم أن تجيب على أكبر
عدد من الأسئلة
بطريقة صحيحة

Hicham

Épreuve d'Agèbre نادي النجاح

2012 / 2013

Rattrapage

Exercice 1

$$(S) = \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$$

+CLUB NAJAH+ UCD.FS.ELJADIDA LE PRESIDENT

Tableau Complet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 - L_1 \\ L_4 - 5L_1}]{L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 + 2L_2]{L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = y - z \\ t = 0 \end{array}$$

$$Sol(S) = \{(y - z, y, z, 0)_{y,z \in \mathbb{R}}\}$$

$$(T) \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + y - z = 1 \\ x + my - mz = 1 \end{cases}$$

Tableau Complet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -m & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 0 & 0 & -1-m & 1-m \\ 0 & m-1 & -2m & 1-m \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 0 & m-1 & -2m & 1-m \\ 0 & 0 & -1-m & 1-m \end{array}\right)$$

Si $m = (-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Système incompatible $Sol(S) = \emptyset$

Si $m \neq -1$

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ (m-1)y - 2mz = 1-m \\ (-1-m)z = 1-m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -mz - y \\ y = \dfrac{(1-m) + 2mz}{(m-1)} \\ z = \dfrac{1-m}{-1-m} = \dfrac{m-1}{1+m} \end{cases}$$

$$y = \frac{(1-m) + 2m\left(\frac{m-1}{1+m}\right)}{m-1} = \frac{(1-m)(1+m) + 2m^2 - 2m}{(m+1)(m-1)}$$

$$= \frac{1 - m^2 + 2m^2 - 2m}{(m+1)(m-1)} = \frac{1 + m^2 - 2m}{(m-1)(m+1)}$$

$$y = \frac{(m-1)\cancel{(m-1)}}{\cancel{(m-1)}(m+1)} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$x = -\frac{m^2 - m}{1+m} - \frac{m-1}{m+1} = \frac{-m^2 + m - m + 1}{m+1} = \frac{\cancel{(m+1)}(m-1)}{\cancel{(m+1)}}$$

$$x = (m-1)$$

$$Sol(T) = \left\{ \left((m-1), \left(\frac{m-1}{m+1}\right), \left(\frac{m-1}{m+1}\right) \right) \right\}_{m \in \mathbb{R}}$$

Exericie

$$P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$$

$$Q(x) = x^2 + 2$$

1°/

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2 & x^2 + 2 \\
\hline
- \quad x^4 \qquad + 2x^2 & x^2 + x + (\alpha - 2) = B(x) \\
\hline
0 + x^3 + (\alpha - 2)x^2 + \beta x + 2 & \\
- \quad x^3 \qquad + 2x & \\
\hline
0 + (\alpha - 2)x^2 + (\beta - 2)x + 2 & \\
- \quad (\alpha - 2)x^2 + (\alpha - 2)2 & \\
\hline
\end{array}$$

$$R(x) = (\beta - 2)x + 2 - 2(\alpha - 2)$$

2°/ Pour que $P(x)$ divise de $Q(x)$

ssi $R(x) = 0$ ($R(x)$: le reste de DE)

Alors $P(x) = Q(x) \times B(x)$

$$= (x^2 + 2)(x^2 + x + (\alpha - 2))$$

$$= x^4 + x^3 + x^2(\alpha - 2) + 2x^2 + 2x + 2(\alpha - 2)$$

$$= x^4 + x^3 + x^2(\alpha - 2 + 2) + 2x + 2(\alpha - 2)$$

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2\alpha + 2x + 2(\alpha - 2)$$

$$P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2 = x^4 + x^3 + \alpha x^2 + 2(\alpha - 2) + 2x$$

autre méthode

$R(x) = 0 \Rightarrow$

$(\beta - 2)x + (\alpha - 2)2 + 2 = 0$

$\Rightarrow$ et $\begin{cases} \beta - 2 = 0 \\ 2 - (\alpha - 2)2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 3 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \beta x = 2x \Rightarrow \\ 2(\alpha - 2) = 2 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 3 \end{cases}$

$$R(x) = (2 - 2)x + 2 - 2(3 - 2) = 0$$

Alors $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$

3°/ $P(x) = (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

Bonne chance