Rapide Way

Nouveau

Contrôles corrigés

- Mécanique de point
- Thermodynamique
- Analyse
- Algèbre
- Chimie générale

TOME 1

Semestre: 1

DANI Fouad
BOUKHAROUB Hicham

طريق موقع المعرفة

www.rapideway.org

Remerciement :

Nous vous présentons ce manuel dans sa première partie, qui comprend des séries des examens de l'année précédente, accompagné par des modèles de solutions rédigées d'une façon simple et bien détaillée.

Ce support sera utile pour les étudiants de 1er année universitaire pour les filières de physique, chimie et mathématique de faculté des sciences, de sciences et technique ou de classe préparatoire aux grandes écoles.

Il contient à la fois mécanique de point, thermodynamique, chimie générale, l'analyse et l'algèbre.

C'est avec un réel plaisir que nous avons effectué ce modeste travail pour que les étudiants : puissent avoir une idée préconçue sur le niveau et le degré de difficulté des examens. Puissent bien assimiler leurs cours. Puissent avoir des supports conçus afin de bien se préparer aux examens, et d'avoir de bonnes notes par la suite.

Nous conseillons les étudiants de bien assimiler leurs cours de chaque matière et aussi de bien travailler les séries de travaux dirigés avant d'aborder la résolution des examens dont le but de bien comprendre les concepts et pour que vous puissiez reconnaitre votre niveau.

Nos remerciements et notre gratitude s'adressent à tous les collègues qui ont participé à la rédaction de tous les documents, merci pour leurs bénédiction efforts, merci à : AARICHE Mohamed Chakib, AQRIM Rahma, AITSAID Abdennacer, AGHOUTANE Bilal, BEN ABOU Mustapha, BELLHAMAMA Loubna, BICHER Mona, CHAFAI Abdelilah, DAMIR Abdelilah, HARRATI Youssef, HYHY Yassine, ELADRAOUI Elalami, ELBAHI Ilham, ELFERNANE Abderrazzak, ELGUAMRANI Yassine, EL HAFFAD Imane ELMOTIAA Ismail, ERRABOULI Marouane , EZZOUHIR Younes, LEGHFOUR Zakaria, LEMSAOUI Younes, SAKTINE Jalal Eddine, TAZROURATE Mohcine, ZAGMOUZI Amina, ZAGMOUZI Soumaya et d'autres qu'on n'a pas mentionné leurs noms merci

Nous tenons à remercier tous les amis qui ont contribué de loin ou de proche avec leurs encouragement pour la sortie de ce modeste effort sans oublier de remercier tous les fidèles de site RapideWay.org.

Très important :

Si vous souhaitez nous écrire, On vous propose les adresses suivantes :

- Notre adresse électronique : rapideway@gmail.com.
- Notre site web www.rapideway.org
- Notre page Facebook. www.facebook.com/rapideway

En particulier, nous remercions chaleureusement tous ceux d'entre vous qui prennent la peine de nous signaler les petites erreurs qu'ils trouvent dans nos documents.

Nous autorisons quiconque le souhait à placer sur son site un lien vers nos documents, mais on n'autorise personne à les héberger directement. On interdit par ailleurs toute utilisation commerciale de nos documents toute modification ou reproduction sans notre accord.

Sommaire :

Mécanique du point matériel :

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM :

Exercice 1 :

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $R(O, xyz)$ muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.Les coordonnées du point M dans R sont données par :

$X(t) = t + 1\,;\ y(t) = t^2 + 1\ et\ z(t) = 0$, (t étant le temps).

a) Donner l'équation de la trajectoire de M dans R .En déduire sa nature ;
b) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M.

Exercice 2 :

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne s(t).La vitesse du point M dans R(O,xyz) est $\vec{V}(M/R)$ de module $V = \frac{ds(t)}{dt}$. On défini la base locale(ou base de Frenet) $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$.telle que$\vec{V}(M/R) = V \times \vec{\tau}$.

a) Que désigne les vecteurs $\vec{\tau}, \vec{n}$ et $\vec{b}$.
b) Montrer que l'accélération du point M est donnée par :

$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{r}\vec{n}$; r étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

c) Exprimer r en fonction de$\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$.

Exercice 3 :

On considère la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ attachée à un référentiel absolu R(O,xyz) et la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ lié à un référentiel $R_1(O, x_1y_1z_1)$.Un point M est assujetti à se déplacer sur un tige(T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une tige (T) en rotation autour de l'axe (Oz) d'angle φ(t) , (voir figure). La tige (T_1) est située dans le plan vertical $(\vec{e}_\rho, \vec{k})$. Le point O_1 est repéré par $\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par
$\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,\vec{u}$ (V_0 = Cte).Le vecteur $\vec{u}$ fait un angle α constant avec le vecteur $\vec{e}_\rho$

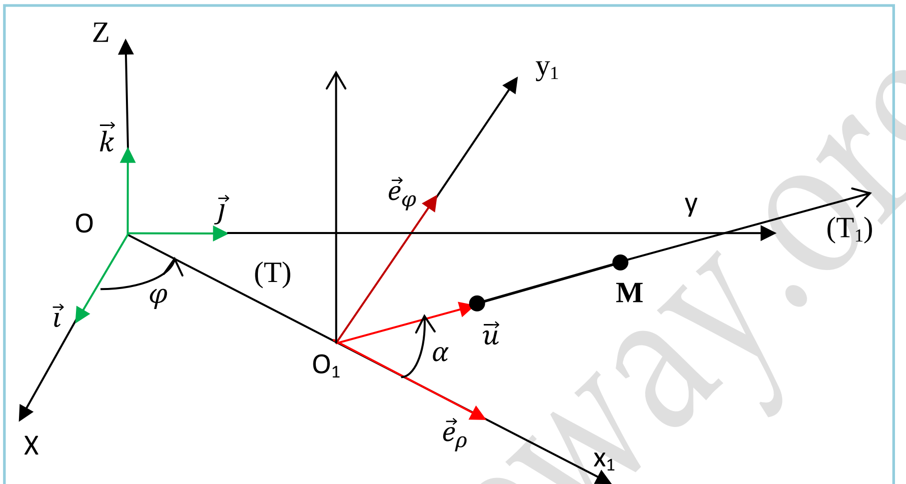
N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

I. Etude de la cinématique de M par calcul direct :

a) Vérifier que la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$.
b) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$, $\vec{k}$ et l'angle α.
c) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
d) Déterminer la vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$.
e) Déterminer l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$.

II. Etude de la cinétique de M par décomposition de mouvement

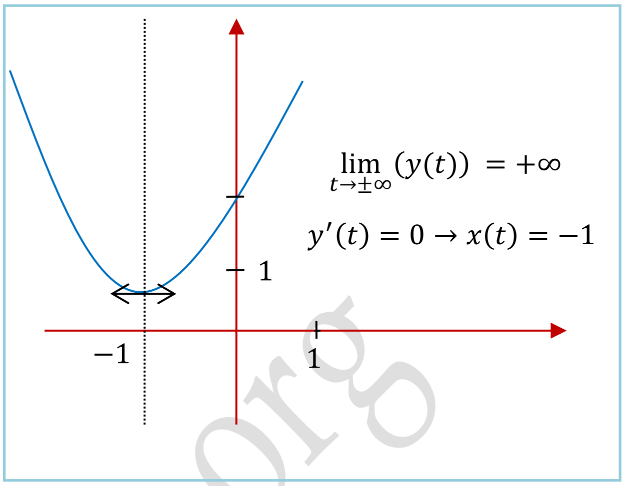
a) Déterminer la vitesse relative de M, $\vec{V}(M/R_1)$.
b) Déterminer la vitesse d'entrainement de M, $\vec{V}_e(M)$.
c) En déduire la vitesse absolue de M , $\vec{V}(M/R)$.
d) Déterminer l'accélération relative de M, $\vec{\gamma}(M/R_1)$.
e) Déterminer l'accélération d'entrainement de M , $\vec{\gamma}_e(M)$.
f) Déterminer l'accélération de Coriolis de M , $\vec{\gamma}_C(M)$.
g) En déduire l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$.



Figure

Corrigés Contrôle N :1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM:

Exercice 1 :



a) Soit un point matériel M de coordonnées

$x(t), y(t)$ *et* $z(t)$ *données par* :
$x(t) = t + 1$ (1) ; $y(t) = t^2 + 1$ (2) et z(t)=0 (3).

L'équitation de la trajectoire de M dans R
(1) $\longrightarrow t = x(t) - 1$ on remplace dans l'équitation
(2) $\longrightarrow y(t) = (x(t) - 1)^2 + 1$.
Donc la trajectoire décrit par le point M est un Parabole.

b) Calculons : la vitesse $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d[(t+1)\vec{\imath}+(t^2+1)\vec{\jmath}]}{dt}\right|_R 1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$$

Alors :

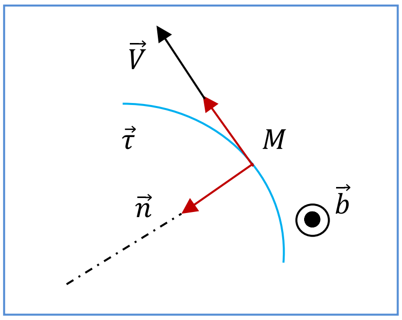
$$\boxed{\vec{V}(M/R) = 1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}}$$

$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ *sont fixe dans R donc* $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0$

L'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath})}{dt}\right|_R = 2\vec{\jmath} \quad \text{donc :} \quad \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = 2\vec{\jmath}}$$

Exercice 2 :



a) $\vec{\tau}$: Vecteur unitaire tangent en M, elle a le même sens du mouvement.
$\vec{n}$: Vecteur unitaire ⊥ à $\vec{\tau}$ dirigé vers le centre de courbure.
$\vec{b}$: Vecteur unitaire ⊥ au plan qui contient les deux vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

b) Montrons que $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{r}\vec{n}$ (avec r le rayon de courbure).

On a $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$ Alors $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + V\left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_R$

Or : $\left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \left.\frac{ds}{dt}\right|_R$ et $ds = Rd\alpha \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{ds}$

$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{\vec{n}}{R}$ avec: $\left(\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \vec{n} \;\middle|\; \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \right)$ *Alors*: $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \times \frac{d\tau}{ds} \times \left.\frac{ds}{dt}\right|_R$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \times \frac{\vec{n}}{R} \qquad \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}}$$

c) R en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$.

$$\vec{V}(M/R)\wedge\vec{\gamma}(M/R) = (V\vec{\tau})\wedge\left(\left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau}\right) + \left(V\vec{\tau}\wedge\frac{V^2}{R}\vec{n}\right) = \frac{V^3}{R}\vec{b} \qquad (\text{avec } \vec{\tau}\wedge\vec{n} = \vec{b} \text{ et } \|\vec{b}\| = 1)$$

$$\|\vec{V}(M/R)\wedge\vec{\gamma}(M/R)\| = \frac{V^3}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{V^3}{\|\vec{V}(M/R)\wedge\vec{\gamma}(M/R)\|}}$$

Exercice 2 :

$R(O,x,y,z) \longrightarrow (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Référentiel absolu et $R1(O,x1y1z1).\longrightarrow (\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ Référentiel relatif.

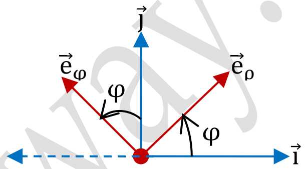
$\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$; $\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,\vec{u}$ avec $V_0 = Cst$ et $\widehat{(\vec{u}\wedge\vec{e}_\rho)} = \alpha = Cst.$

$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0$ car $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *Base de R* *et* $\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R1} = \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{R1} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R1} = 0$ car $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Base de R1

Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$

I. Etude de la cinématique de M par calcul direct

a) La vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$



$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$

$\vec{e}_\varphi = \sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$

$$\left.\frac{d(\cos\varphi)}{dt}\right|_R = \frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi\times\dot{\varphi}$$

En effet : $\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R1} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e}_\rho$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{d(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})}{dt}\right|_R = 0 + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e}_\rho$$

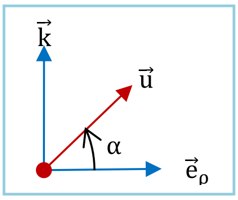
$$\left.\frac{d(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}) = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

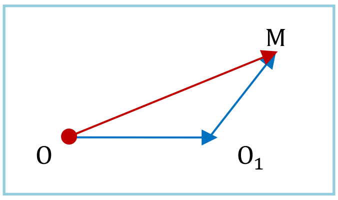
$$\left.\frac{d(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho$$

Alors : $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$

b) L'expression de $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{k}$ et α

$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{k}$





c) L'expression de $\overrightarrow{OM}$

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \rho(t)\vec{e}_\rho + V_0 t\,\vec{u}$

$\overrightarrow{OM} = \rho(t)\vec{e}_\rho + V_0 t\,(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{k})$ Alors : $\boxed{\overrightarrow{OM} = (\rho(t) + V_0 t\cos\alpha)\vec{e}_\rho + V_0 t\sin\alpha\vec{k}}$

a) La vitesse absolue de M , $\vec{V}(M / R)$

On a : $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left((\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\vec{e}_\rho + V_0 t\sin\alpha\vec{k}\right)}{dt}\right|_R$

Avec V_0et *α sont des constantes* $\vec{k}$ fixe dans R

$$\vec{V}(M/R) = (\dot{\rho}(t) + v_o\cos\alpha)\vec{e_\rho} + (\rho(t) + V_0 t\cos\alpha)\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R + V_0 t\ \sin\alpha\,\vec{k}$$

Avec $\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = (\dot{\rho}(t) + v_o\cos\alpha)\vec{e_\rho} + (\rho(t) + V_0 t\cos\alpha)\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + V_0 t\ \sin\alpha\,\vec{k}}$$

b) L'accélération absolue de M :

$$\vec{\gamma}(M/R)=\left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R=\left.\frac{d\Big(\overbrace{(\dot\rho(t)+v_o\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}}^{A}+\overbrace{(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}}^{B}+\overbrace{V_0t\sin\alpha\,\vec{k}}^{C}\Big)}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_R=\ddot\rho(t)\overrightarrow{e_\rho}+(\dot\rho(t)+v_o\cos\alpha)\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_R=\ddot\varphi(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}+(\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha)\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}+\dot\varphi^2(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)(-\overrightarrow{e_\rho})$$

$$=\big(\ddot\varphi(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)+(\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha)\big)e_\varphi-\dot\varphi^2(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\measuredangle:\left.\frac{\overrightarrow{de_\varphi}}{dt}\right|_R=\left.\frac{\overrightarrow{de_\varphi}}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt}\right|_R=-\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_R=\vec{0}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R)=\begin{cases}\ddot\rho(t)-\dot\varphi^2(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}\\ \ddot\varphi(\rho(t)+\rho(t)+V_0t\cos\alpha)+2\dot\varphi(\dot\rho(t)+v_o\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}\\ 0\vec{k}\end{cases}}$$

II. Etude de la cinétique de M par décomposition de mouvement

a) la vitesse relative de M, $\vec{V}(M/R_1)$

$$\vec{V}(M/R_1)=\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}\quad \text{avec } O_1 \text{ l'origine de } R_1 \text{ et } \overrightarrow{O_1M}=V_0t(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}=V_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{V}(M/R_1)=V_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})}$$

b) vitesse d'entrainement de M $\vec{V}_e(M)$

$$\vec{V}_e(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}=\left.\frac{d(\rho(t)\overrightarrow{e_\rho})}{dt}\right|_R+\dot\varphi\vec{k}\wedge(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})V_0t$$

$$\vec{V}_e(M)=\dot\rho(t)\overrightarrow{e_\rho}+\rho(t)\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}+\dot\varphi V_0t\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{V}_e(M)=\dot\rho(t)\overrightarrow{e_\rho}+\dot\varphi(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

c) La vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{V}(M/R)=\vec{V}_r(M)+\vec{V}_e(M)=\vec{V}(M/R_1)+\vec{V}_e(M)$$
$$=V_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})+\dot\rho(t)\overrightarrow{e_\rho}+\dot\varphi(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R)=(\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}+\dot\varphi(\rho(t)+V_0t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}+V_0\sin\alpha\,\vec{k}}$$

d) L'accélération relative de M, $\vec{\gamma}(M/R_1)$

[(V_0,α) *sont des Constantes et* $(\overrightarrow{e_\rho},\vec{k})$ fixe dans R_1]

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R_1)=\left.\frac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1}=\left.\frac{d[V_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})]}{dt}\right|_{R_1}=\vec{0}}$$

e) L'accélération d'entrainement de M , $\vec{\gamma}_e(M)$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge[\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}]$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R = \left(\dot{\rho}(t)\vec{e_\rho} + \rho(t)\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}\right) \qquad \sphericalangle: \left[\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e_\rho}\right]$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = \ddot{\rho}(t)\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}(t)\vec{e_\varphi} + \dot{\varphi}\dot{\rho}(t)\vec{e_\varphi} + \rho(t)\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - \rho(t)\dot{\varphi}\dot{\varphi}\vec{e_\rho}$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2]\vec{e_\rho} + [2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}]\vec{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} = (\ddot{\varphi}\vec{k}) \wedge \left(V_0 t\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{k}\right)\right)$$

$$Or: \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\dot{\varphi}\vec{k})}{dt}\right|_R = \ddot{\varphi}\vec{k} \quad et \quad \vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} = (\ddot{\varphi}\vec{k}) \wedge \left(V_0 t\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho\right)\right) = \ddot{\varphi}V_0 t\cos\alpha\,\vec{e_\varphi}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge[\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}] &= (\dot{\varphi}\vec{k})\wedge\left[(\dot{\varphi}\vec{k})\wedge\left(V_0 t\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{k}\right)\right)\right]\\ &= (\dot{\varphi}\vec{k})\wedge[\dot{\varphi}V_0 t\,\cos\alpha\,\vec{e}_\varphi + 0]\\ &= -\dot{\varphi}^2 V_0 t\,\cos\alpha\,\vec{e}_\rho \qquad \sphericalangle:\ \vec{k}\wedge\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = [\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0 t\,\cos\alpha]]\vec{e_\rho} + [\ddot{\varphi}(V_0 t\,\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t)]\vec{e_\varphi}}$$

f) L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_C(M)$

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{V}(M/R_1) \qquad \sphericalangle:\ \vec{V}(M/R_1)\text{ est la vitesse relatif de M}$$

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2(\dot{\varphi}\vec{k})\wedge[V_0\,(\cos\alpha\,\vec{e_\rho} + \sin\alpha\,\vec{k}\,)] = 2\dot{\varphi}V_0 t\,\cos\alpha\,\vec{e_\varphi} + \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_C(M) = 2\dot{\varphi}V_0 t\,\cos\alpha\,\vec{e_\varphi}}$$

g) L'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R\,)$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/R\,) &= \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_C(M)\\ &= \vec{0} + [\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0 t\,\cos\alpha]]\vec{e_\rho} + [\ddot{\varphi}(V_0 t\,\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t)]\vec{e_\varphi}\\ &\quad + 2\dot{\varphi}V_0 t\,\cos\alpha\,\vec{e_\varphi}\end{aligned}$$

$$\boxed{D'où: \quad \vec{\gamma}(M/R\,) = \begin{cases} [\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0 t\,\cos\alpha]] & \vec{e_\rho}\\ \ddot{\varphi}(V_0 t\,\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}(\dot{\rho}(t) + V_0 t\,\cos\alpha) & \vec{e_\varphi}\\ 0 & \vec{k}\end{cases}}$$

> Il ne faut pas beaucoup d'esprit pour ce qu'on soit mais il en faut infiniment pour enseigner ce qu'on ignore
>
> **Montesquieu**

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008/2009 FSSM:

Toute les bases considérées sont orthonormées directes

Exercice1

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel $R_0(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par :$X(t) = t^2 - 4t + 1$; $y(t) = -2t^4$ et $Z(t) = 3t^2$

Dans un deuxième référentiel $R_1(O_1,\vec{\imath_1} = \vec{\imath},\vec{\jmath_1} = \vec{\jmath},\vec{k_1} = \vec{k})$, elles ont pour expression : X_1(t)=t^2+t=2 Y_1(t)=-2t^4+5 Z_1(t)=3t^4-7

1) Déterminer les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ et $\vec{V}(M/R_1)$
2) Exprimer la vitesse $\vec{V}(M/R_0)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(M/R_1)$
3) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$ en fonction de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_1)$
4) Quelle est la nature du mouvement du référentiel R_1par rapport au référentiel R_0 ?
5) Supposons R_0 galiléen.R_1est-il aussi galiléen ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soient $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$un référentiel fixe et $R_1(O_1,\vec{\imath_1} = \vec{\imath},\vec{\jmath_1} = \vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel mobile tel que : $\vec{V}(O_1/R)$=at $\vec{\jmath_1}$ où a est une constante positive.

Soit $R_2(O_1,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ un deuxième référentiel, lié à une particule mobile M (point matériel) et tel que :
$\overline{O_1M}$=l$\vec{e_\rho}$ où l est une constante positive et l'angle $(\vec{\imath_1},\vec{e_\rho})$=$\varphi(t)$ (voir figure)

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$

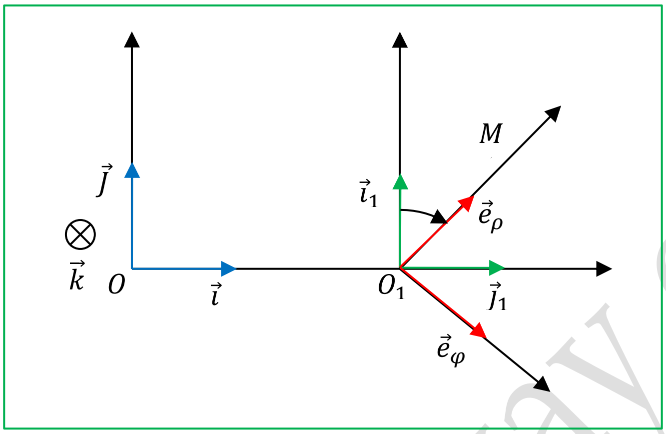
A. Considérer $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ comme référentiel absolu et $R_1(O_1,\vec{\imath_1},\vec{\jmath_1},\vec{k})$ comme référentiel relatif

1) Quelle est la nature de la trajectoire de M dans R_1 ? (sans faire de calcul)
2) Déterminer l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$
3) déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$ et de la vitesse d'entrainement$\vec{V_e}$(M). En déduire la vitesse absolue$\vec{V}$(M).
4) Quelle est la nature du mouvement de R_1par rapport à R ?
5) Déterminer l'expression des vecteurs accélérations relatives$\vec{\gamma}(M/R_1)$, d'entrainement $\vec{\gamma_c}$(M).En déduire l'accélération absolue $\vec{\gamma_a}(M)$

B. Considérer $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$comme référentiel absolu et $R_2(O_1,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ comme référentiel relatif

1) Donner l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$.En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R)$
2) Déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_2)$ et de la vitesse d'entrainement$\vec{V}(M)$. En déduire la vitesse absolue$\vec{V}(M/R)$

3) Déterminer l'expression des vecteurs accélération relative $\overrightarrow{\gamma_a}(M/R_2)$, d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$(M) et de Coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}$(M) . En déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$(M)
4) Comparer les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}$(M/R) déterminé dans les équations A-3 et B-2
5) Comparer les expressions de l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$(M) déterminées dans les equation A-5 et B-3



Corrigé du contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008/2009 FSSM:

Exercice 1 :

Soit $\begin{cases} X(t) = t^2 - 4t + 1 \\ Y(t) = -2t^4 \\ Z(t) = 3t^2 \end{cases}$; $\begin{cases} X_1(t) = t^2 + t + 2 \\ Y_{1=} = -2t^4 + 5 \\ Z_1(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$

1) Les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ et $\vec{V}(M/R_1)$

- L'expression de la vitesse $\vec{V}$(M/R_0)

  $\vec{V}$(M/R_0) = $\frac{d}{dt/R_0}((t^2 - 4t + 1)\vec{\imath} - 2t^4\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}) \Longrightarrow \vec{V}$(M/$R_0$) =(2t -4) $\vec{\imath}$ -8t^3 $\vec{\jmath}$ +6t $\vec{k}$
- L'expression de $\vec{V}$(M/R_1)

  $\vec{V}$(M/R_1) =$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{dt}}\Big|_{R_1}$ =$\frac{\mathrm{d}((t^2+t+2)\vec{\imath}(-(2t^4+5)\vec{\jmath}+(3t^2-7)\vec{k})}{\mathrm{dt}}\Big|_{R_1}$ = (2t + 1) $\vec{\imath} - 8t^3\,\vec{\jmath} + 6\mathrm{t}\,\vec{k}$

2) $\vec{\mathrm{V}}$(M/R_0) en fonction de la vitesse $\vec{V}$(M/R_1)

On a $\vec{V}$(M/R_0) = (2t -4) $\vec{\imath}$ -8 $t^3\vec{\jmath}$ +6t $\vec{k}$=(2t +1) $\vec{\imath}$ -5$\vec{\imath}$-8$t^3\vec{\jmath}$ +6t $\vec{k}$ $\Longrightarrow$ $\vec{V}$(M/R_0) = $\vec{V}$(M/R_1) -5 $\vec{\imath}$

3) $\vec{\gamma}$ (M/R_0) en fonction de $\vec{\gamma}$ (M/R_1)

$\vec{\gamma}$ (M/R_0) = $\frac{d\,\vec{V}(M/R_0}{dt}/R_0$ = $\frac{d}{dt/R}$ ($\vec{V}$(M /R_1)-5$\vec{\imath}$) $\Longrightarrow \vec{\gamma}$ (M/R_0) = $\vec{\gamma}$ (M/R_1) + $\vec{0}$ $\begin{pmatrix} \vec{\imath}=\vec{\imath_1} \\ \vec{\jmath}=\vec{\jmath_1} \\ \vec{k}=\vec{k_1} \end{pmatrix}$

$\vec{\gamma}$ (M/R_0)= $\vec{\gamma}$(M/R_1) Où bien : On a $\vec{V}$(M/R_0) = (2t -4)$\vec{\imath}$ – 8t^3 $\vec{\jmath}$ +6 t $\vec{k}$ et $\vec{V}$(M/R_1) = (2t + 1) $\vec{\imath}$ -8 t^3 $\vec{\jmath}$ + 6t $\vec{k}$

$\vec{\gamma}$(M/R_0) = $\frac{d\,(\vec{V}(\vec{M}/R_0))}{dt}\Big|_{R_0}$ = 2$\vec{\imath}$ – 24 t^2 $\vec{\jmath}$ + 6 $\vec{k}$ et $\vec{\gamma}$(M/R_1) = $\frac{d\,(\vec{V}(\vec{M}/R_1))}{dt}\Big|_{R_1}$ = 2$\vec{\imath}$ – 24 t^2 $\vec{\jmath}$ + 6 $\vec{k}$

Finalement $\vec{\gamma}$(M/R_1) = $\vec{\gamma}$(M/R_0)

4) La nature du mouvement du R_1 par rapport à R_0

- On a $\vec{\Omega}$ (R_1/R_0) = $\vec{0}$ ⇒ translation
- $\vec{V}((M/R_0)$ -$\vec{V}((M/R_1)$ = -5 $\vec{\imath}$ ⇒ Rectiligne
- $\vec{\gamma}$(M/R_0) = $\vec{\gamma}$(M/R_1) ⇒ Uniform

R_1 est en translation rectiligne uniforme

5) Si R_0 est galiléen alors R_1 est aussi galiléen
6) Car R_1 est en translation réctiligne uniforme par rapport à R_0.

Exercice 2 :

R (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) Référentiel fixe $R_1(O_1,\vec{\imath_1},\vec{\jmath_1},\vec{k})$ Référentiel mobile $R_2(O_1,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ Référentiel lié à M.

$\vec{V}$ (O_1/R) = at$\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{O_1M}$ =$\rho\,\vec{e_\rho}$ avec: $\rho > 0$ et ($\vec{\imath_1}$, $\vec{e_\rho}$) = φ (t)

A. R (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) référentiel absolu et $R_1(O_1,\vec{\imath_1},\vec{\jmath_1},\vec{k})$ relatif.

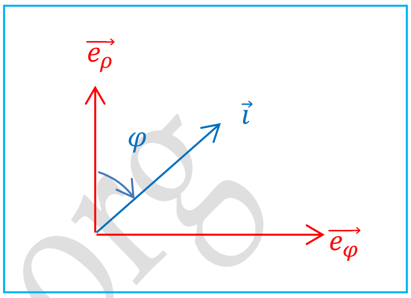
La nature de la trajectoire de M dans $\overrightarrow{R_1}$

On a $\|\overrightarrow{qM}\|$ = l = cste   Donc dans R_1 la trajectoire de M est circulaire de centre O_1

1) l'expression du $\vec{\Omega}(R_1/R)$

Le référentiel R_1 ne fait aucune rotation par rapport à R alors : $\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{0}$

2) Expressions des vitesses relative et d'entrainement

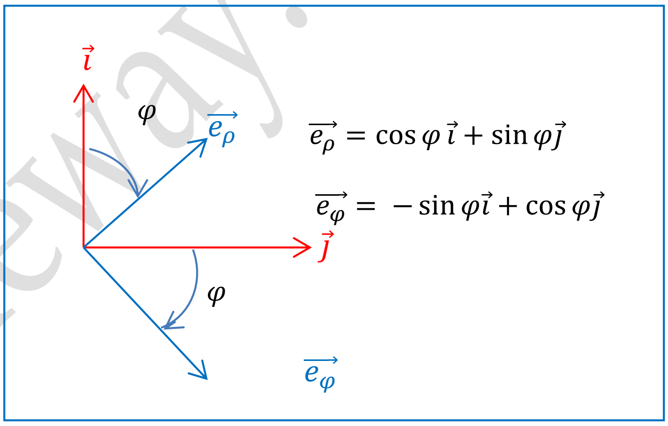


- Vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\rho\overrightarrow{e_\rho})}{dt}\right|_{R_1} = \rho\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_1} = \rho\frac{de_\rho}{d\varphi} \times \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{R_1} = \rho\,\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R_1) = \rho\,\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}$$

- Vitesse d'entrainement $\vec{V_e}(M)$



$$\vec{V_e}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R)\Lambda\overrightarrow{OM}$$

$\vec{V}(O_1/R)$=at$\vec{\jmath}$=at$(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})$

$$\boxed{\vec{V_e}(M) = \text{at}\,(\,\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})}$$

- Vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V_e}(M)$

$\vec{V}(M/R) = at\sin\varphi\,\overrightarrow{e\rho} + (\,\dot{\varphi} + at\cos\varphi\,)\,\overrightarrow{e\varphi}$

3) On a $\vec{\Omega}\,(R_1/R) = \vec{0}$ ⇒ translation

$\vec{V}(O_1/R)$ = at $\vec{\jmath}$ ⇒ réctiligne

4) L'accélération relative $\vec{\gamma}(M/R_1)$

$$\vec{\gamma}\left(\frac{M}{R_1}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left(\frac{M}{R_1}\right)}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d(\rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi})}{dt}\right|_{R_1} = \rho\ddot{\varphi}\;\overrightarrow{e_\varphi} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_\rho} \quad \text{Avec } \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt} = -\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\rho}$$

$\vec{\gamma}(M/R_1) = -\rho\,\dot{\varphi}^{\,2}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\,\overrightarrow{e_\varphi}$

- L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$(M)

$$\overrightarrow{\gamma_e}(M) = \left.\frac{dV(O_1/R)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \Lambda\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\Lambda(\vec{\Omega}\,\Lambda\overrightarrow{O_1M})$$

$\vec{\gamma}(M) = = \left.\frac{dat\,\vec{\jmath}}{dt}\right|_R$ = a $\vec{\jmath}$ =a $(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})$ ⇒ $\boxed{\vec{\gamma}(M) = a\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + a\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}}$

- L'accélération de Coriolis $\gamma_c(M)$

$\overrightarrow{\gamma_c}(M) = 2\,\vec{\Omega}(R_1\,/\,R)\Lambda\vec{V}(M\,/\,R_1) = \vec{0}$ ⇒ $\boxed{\overrightarrow{\gamma_c}(M) = \vec{0}}$

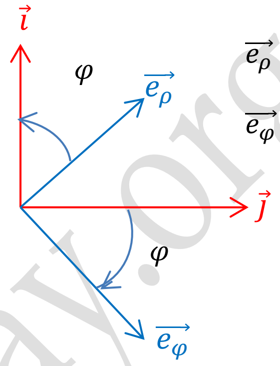
- L'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}(M)$

$\overrightarrow{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \overrightarrow{\gamma_e}(\mathrm{M}) + \overrightarrow{\gamma_c}(M) = = \rho\,\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} - \rho\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho} + \mathrm{a}t\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \mathrm{a}\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$

$$\overrightarrow{\gamma_a}(M) = (\,\mathrm{a}t\sin\varphi - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\,\ddot{\varphi} + \mathrm{a}\cos\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

B. R (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) comme referential absolu et R_2 comme relatif.

1) L'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$



$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{e_\rho}$$

$$\left.\frac{d(\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_{\mathrm{R}} = \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{e_\rho}$$

Car $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$

$\dot{\varphi}\,(\,-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}) = \vec{\Omega}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\wedge\overrightarrow{e_\rho}$

$\Longrightarrow\quad \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} = \dot{\varphi}(\vec{k}\wedge\overrightarrow{e_\rho}) = \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{e_\rho}$

Alors : $\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\varphi}\vec{k}}$

L'expression de $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$

On a $\vec{\Omega}(R_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k} + \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k}}$

2) l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_2)$ et de la vitesse d'entrainement $\vec{V}(M)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

- Vitesse relative $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_2)$

$\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d(\rho\overrightarrow{e_\rho})}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_2) = \vec{0}}$

- Vitesse d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{V_e}}(\mathrm{M})$

On a : $\overrightarrow{V_e}(\mathrm{M}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\mathrm{R}} + \vec{\Omega}(R_2/R_2)\wedge\overrightarrow{O_1M}$

$\overrightarrow{V_e}(\mathrm{M}) = = \mathrm{a}t\vec{\jmath} + \dot{\varphi}\vec{k}\wedge\rho\overrightarrow{e_\rho} = \mathrm{a}t(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\rho\overrightarrow{e_\varphi}) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{V_e}(\mathrm{M}) = \mathrm{a}t\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + (\mathrm{a}t\cos\varphi + \dot{\varphi}\rho)\overrightarrow{e_\varphi}}$

- Vitesse absolue $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})$

$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) = \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_2) + \overrightarrow{\mathrm{V}_e}(\mathrm{M}) = \vec{0} + \overrightarrow{\mathrm{V}_e}(\mathrm{M})$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \mathrm{a}t\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + (\mathrm{a}t\cos\varphi + \dot{\varphi}\rho)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

3) l'expression des vecteurs accélération relative $\vec{\gamma_a}(M/R_2)$, d'entrainement $\vec{\gamma_e}$(M) et de Coriolis $\vec{\gamma_c}$(M) . En déduire l'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$(M)

- Accélération relative :$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R_2})$

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$$

- Accélération d'entrainement $\vec{\boldsymbol{\gamma_e}}$ (M)

$$\vec{\gamma_e}(\text{M}) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_2/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}) \quad \text{Or: } \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = a(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi})$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_2/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} = \ddot{\varphi}\,\vec{k_1}\wedge\rho\,\vec{e_\rho} = \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}) = \dot{\varphi}\vec{k}(\dot{\varphi}\vec{k}\wedge\rho\vec{e_\rho}) = \dot{\varphi}\vec{k}(\dot{\varphi}\rho\,\vec{e_\varphi}) = -\dot{\varphi}^2\,\rho\,\vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{\gamma_e}(\text{M}) = (a\sin\varphi - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_\rho} + (a\cos\varphi + \rho\ddot{\varphi})\vec{e_\varphi}}$$

- L'accélération de Coriolis $\vec{\gamma_c}$(M)

$$\vec{\gamma_c}(\text{M}) = 2\,\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\vec{V}(M/R_2) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\gamma_c}(\text{M}) = \vec{0}}$$

- -L'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$(M)

$$\vec{\gamma_a}(\text{M}) = \vec{\gamma}(M/R_2) + \vec{\gamma_e}(\text{M}) + \vec{\gamma_c}(\text{M}) = \vec{0} + \vec{\gamma_e}(\text{M}) + \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\gamma_a}(\text{M}) = \vec{\gamma_e}(\text{M})}$$

4) Les expressions des vitesses absolues obtenues en A-3 et 8-2 sont identiques
5) Les expressions de l'accélération absolue obtenue en A-5 et B-3 sont identiques le calcul de l'accélération est indépendant de choix de référentiel

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Toutes les bases considérées dans les exercices sont orthonormées directes

Exercice :1

Soient $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$ un référentiel absolus fixe et $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ référentiel relatif en mouvement de rotation de vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ par rapport à $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$

Un point M décrit un mouvement circulaire dans $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ auteur de l'axeOZ_o.M est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, Z) **(voir figure 1).**

On pose : $\rho = Om = a$ et $Z = \overrightarrow{OH} = b$ où a et b sont des constantes.

1) Rappeler les lois de composition des vitesses et des accélérations?
2) Déterminer dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$

a) Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$
b) Le vecteur rotation de $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ par rapport à $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$.
c) Le vecteur vitesse relative $\overrightarrow{V_r}(M)$.
d) Le vecteur vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}(M)$.
e) Le vecteur vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}(M)$.
f) Le vecteur accélération relative $\overrightarrow{\gamma_r}(M)$.
g) vecteur accélération d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}(M)$.
h) Le vecteur accélération Coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}(M)$.
i) Le vecteur accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}(M)$.

Exercice :2

Un point matériel M de masse m est en mouvement sans frottement sur le plan horizontal XOY d'un référentiel galiléen R(OXYZ). Un opérateur exerce une force de module F dirigée constamment vers le point O.

M est repéré par ses coordonnées (ρ, φ) **(voir figure 2).**

1) Représenter sur un schéma les forces appliquées à M
2) Appliquer le PFD dans le référentiel R et en déduire les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} F = m\left(\frac{d^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) & (1). \\ 0 = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} & (2). \end{cases}$$

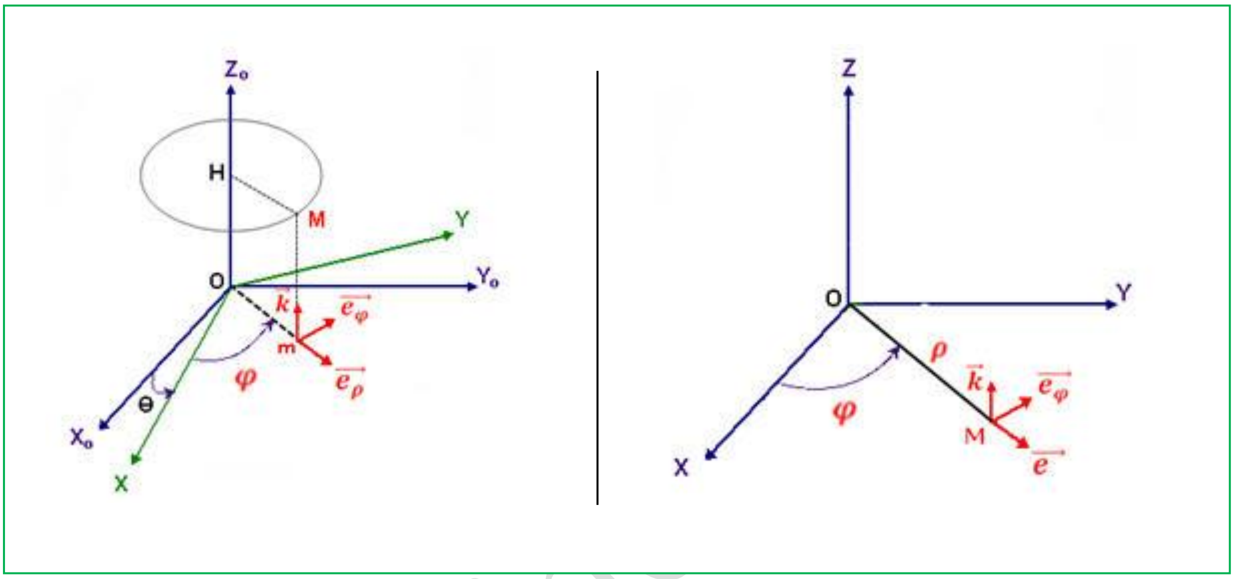
3)

a) En utilisant l'équation (2) montrer que $\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = A$ où A est constante.
b) Sachant que les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont les suivantes : $\rho(t=0) = \rho_o$, $\dot{\rho}(t=0) = \dot{\rho_o}$, $\varphi(t=0) = \varphi_o$ et $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi_o}$ (le point sur les grandeurs indique $\frac{d}{dt}$) en déduire que $A = \rho_o^2\dot{\varphi_o}$

4) On suppose $\dot{\varphi_o}$nulle, $\dot{\rho_o}$nulle et F constant.

a) Etablir l'équation horaire ρ(t) du mouvement du point M.
b) Calculer le temps t_1 qu'il faut à M pour arriver au point O.

5) On suppose $\dot{\varphi_o}$ nulle, $\dot{\rho_o}$ non nulle et la force F nulle. Etablir l'équation horaire ρ(t) du mouvement du point M.



Corrigés de contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM :

Exercice : 1

Soit $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$ Un référentiel absolu Et $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ Un référentiel relatif

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{R_o} = \dot{\theta}$, $om = a = cst$ et $\overline{oh} = b = cst$

1) Les lois de compositions des vitesses:

$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_o}\right) = \vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) + \vec{V_e}(M)$ Avec $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$ où O origine de R

$\vec{V_e}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{(OO)}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\overrightarrow{OM}$

Les lois de co[…] accélérations:

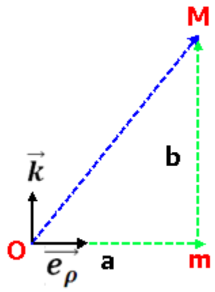
Figure : 1

Figure : 2

$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R_o}\right) = \vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M)$ avec $\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$

- $\vec{\gamma_e}(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2}\right|_{R_o} + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R/R_o)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\overrightarrow{OM}$
- $\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{V}(M/R)$ où $\vec{V}(M/R)$ est la vitesse relative

2) Déterminons dans la base orthonormée directe $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$



c) Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

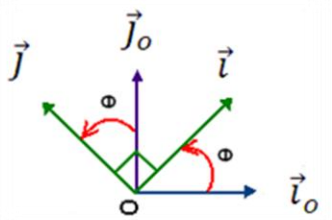
On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$ (relation de shale)

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{e_\rho} + b\vec{k}$$

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} = a\vec{e_\rho}$

$\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{OH} = b\vec{k}$

d) Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R/R_o)$



$$On\ a : \left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_{R_o} = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath} + \left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R$$

$\vec{\imath}$: fixe dans R donc $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \vec{0}$ avec $\vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{\imath_o} + \sin\theta\,\vec{J_o}$

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath_o} + \sin\theta\,\vec{J_o}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath_o}) + \frac{d}{dt}(\sin\theta\,\vec{J_o}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath}$$

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\imath_o} + \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{J_o} = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath}$$

$$(-\sin\theta)\dot{\theta}\vec{\imath_o} + (\cos\theta)\dot{\theta}\vec{J_o} = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath}$$

$$\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{\imath_o} + \cos\theta\,\vec{J_o}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath}$$

$$\dot{\theta}\vec{J} = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath} \Rightarrow \dot{\theta}(\vec{k}\wedge\vec{\imath}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath} \Rightarrow (\dot{\theta}\vec{k})\wedge\vec{\imath} = \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\imath}$$

$R_0(\vec{\imath_o}, \vec{J_o}, \vec{k_o})$: Référentiel absolu

$R(\vec{\imath}, \vec{J}, \vec{k})$: Référentiel relatif

$\dot{\theta}\vec{k} = \vec{\Omega}(R/R_o)$ Finalement on trouve $\vec{\Omega}(R/R_o) = \dot{\theta}\vec{k}$

3) Le vecteur vitesse relative $\overrightarrow{V_r}(M)$

$$\overrightarrow{V_r}(M) = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt/R}\left(a\overrightarrow{e_\rho} + b\vec{k}\right)$$

Puisque : $a = constante$ et $\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}$ $car\ \vec{k}\ est\ fixe\ dans\ R$

Alors $\overrightarrow{V_r}(M) = \frac{d}{dt/R}\left(a\overrightarrow{e_\rho}\right) + \vec{0} = a\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$ finalement $\boxed{\overrightarrow{V_r}(M) = a\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}$

a) Le vecteur vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}(M)$

$\overrightarrow{V_e}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{(OO)}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\overrightarrow{OM}$ Puisque le piont O fixe dans le Repére R_o et de plus $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$

Alors $\left.\frac{d\overrightarrow{(OO)}}{dt}\right|_R = \vec{0}$

$\overrightarrow{V_e}(M) = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{k}\wedge\left(a\overrightarrow{e_\rho} + b\vec{k}\right) = \dot{\theta}\vec{k}\wedge a\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\theta}b\vec{k}\wedge\vec{k} = \dot{\theta}a\overrightarrow{e_\varphi} + \vec{0}$ Alors $\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = a\dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}}$

b) Le vecteur vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}(M)$

On a $\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M) = a\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + a\dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} = \left(a\dot{\varphi} + a\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi} = a\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}$

c) Le vecteur accélération relative $\overrightarrow{\gamma_r}(M)$

$$\overrightarrow{\gamma_r}(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{\overrightarrow{V_r}(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\left(a\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}\right)\right|_R = a\frac{d}{dt}(\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi} + a\dot{\varphi}\frac{d\,\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = a\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - a\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho}$$

Finalement $\overrightarrow{\gamma_r}(M) = a\left(\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - \dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho}\right)$

d) Vecteur d'accélération d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}(M)$

$$On\ a\ \overrightarrow{\gamma_e}(M) = \left.\frac{\overrightarrow{d^2OO}}{dt^2}\right|_{R_o} + \left.\frac{d\,\vec{\Omega}(R/R_o)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e}(M) = \vec{0} + \ddot{\theta}\vec{k}\wedge\left(a\overrightarrow{e_\rho} + b\vec{k}\right) + \dot{\theta}\vec{k}\wedge\left(\dot{\theta}\vec{k}\wedge\left(a\overrightarrow{e_\rho} + b\vec{k}\right)\right) = \ddot{\theta}a\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\theta}\vec{k}\wedge a\dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e}(M) = -a\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho} + \ddot{\theta}a\overrightarrow{e_\varphi}$$

e) Le vecteur accélération Coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}(M)$

On a $\overrightarrow{\gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{V}(M/R) = 2\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\overrightarrow{V_r}(M) = 2\dot{\theta}\vec{k}\wedge a\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_c}(M) = -2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}}$$

- Vecteur d'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}(M)$

$$\overrightarrow{\gamma_a}(M) = \overrightarrow{\gamma_r}(M) + \overrightarrow{\gamma_e}(M) + \overrightarrow{\gamma_c}(M) = a\left(\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - \dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho}\right) - a\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho} + \ddot{\theta}a\overrightarrow{e_\varphi} - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$$

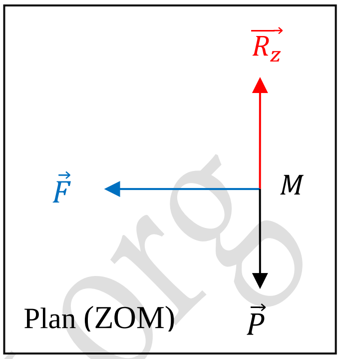
$$\overrightarrow{\gamma_a}(M) = -a\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\rho} + a\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_a}(M) = -a\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right)^2\overrightarrow{e_\rho} + a\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

Exercice : 2

$R(O\ X\ Y\ Z)$ est un référentiel galiléen et M en mouvement sans frottement sur le plan (XOY) alors les deux composantes $R_\rho$et R_φ sont nuls ($R_\rho = R_\varphi = 0$)

1) Représentation graphique : sur le plan (ZOM)



- la réaction : $\vec{R} = R_z\vec{k}$
- la force : $\vec{F} = -F\vec{e_\rho}$
- le poids : $\vec{P} = -mg\vec{k}$

2) On applique le PFD dans le référentiel R

$$On\ a:\quad m\vec{\gamma}(M) = \sum \vec{F}_{ext}(M) \Longrightarrow m\vec{\gamma}(M) = -mg\vec{k} - F\vec{e_\rho} + R_z\vec{k}$$

$$\Longrightarrow m\vec{\gamma}(M) = -F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}$$

Avec $\vec{\gamma}(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d^2(\rho\vec{e_\rho})}{dt^2}\right|_R$

$$\left.\frac{d(\rho\vec{e_\rho})}{dt}\right|_R = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} \Rightarrow \left.\frac{d^2(\rho\vec{e_\rho})}{dt^2}\right|_R = \frac{d\rho^2}{dt^2}\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e_\varphi} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M) = \left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi}}$$

$$Par\ la\ suite:\quad m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi} = -F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}$$

$$m\begin{pmatrix} \frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k}} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ R_z - mg \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{e_\rho} \\ \vec{e_\varphi} \\ \vec{k} \end{matrix}$$

- la projection sur $\vec{e_\rho}$

$$\vec{e_\rho}\left\{m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi}\right\} = \vec{e_\rho}.\{-F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}\}$$

$$F = -m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

- la projection sur $\vec{e_\varphi}$

$$\vec{e_\varphi}\left\{m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi}\right\} = \vec{e_\varphi}.\{-F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}\}$$

$$m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] = 0 \Longrightarrow 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

3)

a) Montrons que $\boldsymbol{\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = A}$

Première méthode :

On a $2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ équation(3)

Équation (3) $\times\ \boldsymbol{\rho} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{2\rho\frac{d\rho}{dt}}\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\frac{d}{dt}}(\rho^2).\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$

$$Si\ on\ pose: \ \rho^2 = f\ \ et\ \ \frac{d\varphi}{dt} = g\ on\ constate\ que\ \dot{f}.g = f.\dot{g} = (f.g)^{\cdot}$$

Donc $\frac{d}{dt}\left(\rho^2.\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \int\left(\frac{d}{dt}\left(\rho^2.\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0\right) \Rightarrow \rho^2.\frac{d\varphi}{dt} = A$ ou A est une constante

Deuxième méthode

On a $\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = A \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\rho^2.\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{A} \;\Rightarrow\; 2\rho\boldsymbol{\frac{d\rho}{dt}}\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \Rightarrow 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$

b) en déduire que $A = \rho_o^2\dot{\varphi}_o$

$On\ a: \ A = \rho^2\frac{d\varphi}{dt} \;\Rightarrow\; \rho^2\dot{\varphi} = A$

$Pour\ t = 0\ \ on\ a: \ \ \rho(t=0) = \rho_o \;\Rightarrow\; \rho^2(t=0) = {\rho_o}^2\ \ et\ \ \ \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_o$ Donc $A = {\rho_o}^2\,\dot{\varphi}_o$

4) On suppose $\dot{\varphi}_o$ nulle, $\dot{\rho}_o$ nulle et F constant.

$$\dot{\varphi}_o = \dot{\rho}_o = 0\ \ \ et\ \ \ F = Cst$$

L'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement du point M

$$On\ a\ \rho^2\frac{d\varphi}{dt} = A = \rho_0^2\,\dot{\varphi}_0 = 0 \;\Rightarrow\; \rho^2 = 0\ ou\ \frac{d\varphi}{dt} = 0\ \ avec\ \ \rho(t) \neq 0$$

On remplace $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ dans (1) on trouve $F = -m\frac{d^2\rho(t)}{dt^2} \;\Rightarrow\; \frac{d^2\rho(t)}{dt^2} = -\frac{F}{m}$ $\quad avec\ F = Cst$

$$Alors\ \ \frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{F}{m}t + C_1 \qquad \left|Si\ \ t = 0\ \ \dot{\rho_o}(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1\ \right|$$

$$\Rightarrow\; \rho(t) = -\frac{F}{m}t^2 + C_2$$

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM :

Toutes les bases considérées sont orthonormées directes

Exercices 1 :

Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (ou $R(O,x,y,z)$) un référentiel

Soit M un point matériel se déplacant dans le référentiel R le long d'une courbe d'équations p aramétriques :

$$x(t) = 0{,}3\cos(\omega t) \quad ; \quad y(t) = 0{,}3 sin(\omega t) \quad ; \quad z(t) = 0{,}1\omega t\,.$$

Où $\omega = 2\pi\, rad.s^{-1}$ L'unité de longueur est le centimètre.

1) Exprimer dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: le vecteurposition $\overrightarrow{OM}$,le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ et le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$.
2) Calculer les normes $\|\vec{V}(M/R)\|$ et $\|\vec{\gamma}(M/R)\|$.
3) Exprimer, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les vecteus $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de la base de Frenet.
4) Calculer le rayon de courbure R_C .

Exercice 2 :

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m coulisse sans frottement sur un axe $O\Delta$ L'axe $O\Delta$ est horizontal et en rotation à vitesse angulaire constant ω autour d'un axe vertical OZ .Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le référentiel du labaratoire supposé galiléen et soit $R_1(O,\overrightarrow{e\rho},\overrightarrow{e\varphi},\vec{k})$ le référentiel lié à l'axe $O\Delta$ M est repéré par ses coordonnées polaire ρ et φ .(Voir figures)

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la se $(\overrightarrow{e\rho},\overrightarrow{e\varphi},\vec{k})$

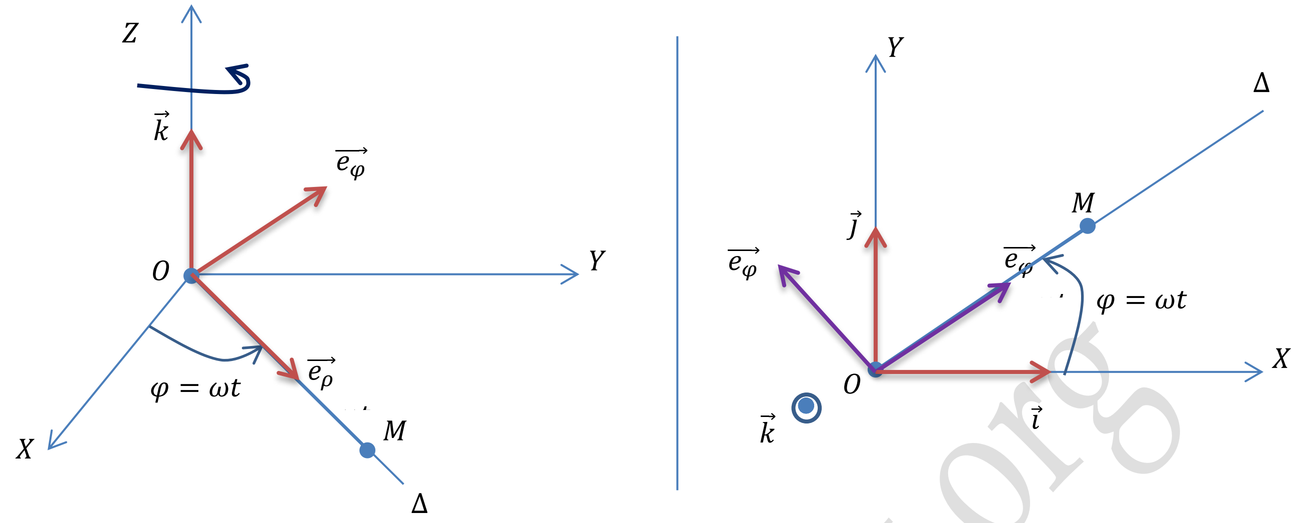
C. Etude dans le référentiel R_1

1) Quelles sont les forces appliquées à M dans le référentiel R_1 ?
2) Ecrire chacune de ces forces dans la base $(\overrightarrow{e\rho},\overrightarrow{e\varphi},\vec{k})$.
3) Calculer $\vec{\gamma}(M/R_1)$; vecteur accélération de M par rapport au référentiel R_1
4) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel R_1.
5) Par projection du (PFD) suivant $\vec{\rho}$ déduire l'équation différentielle du mouvement.

D. Etude dans le référentiel R :

1) Calculer $\vec{\gamma}(M/R_1)$; vecteur accélération de M par rapport au référentiel R
2) Ecrire, sous forme vectorielle, le principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel R.

3) En déduire l'équation différentielle du mouvement.



Corrigés de contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM

Exercices 1 :

Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel

1) Vecteur position $\overrightarrow{OM} = 0{,}3cos(\omega t)\vec{\imath} + 0{,}3\sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + 0{,}1\omega t\vec{k}$

- Vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$: $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(0{,}3cos(\omega t)\vec{\imath}+0{,}3\sin(\omega t)\vec{\jmath}+0{,}1\omega t\vec{k})}{dt}\right|_R$

$$= 0{,}3\,\omega\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + 0{,}3\omega cos(\omega t)\vec{\jmath} + 0{,}1\omega\vec{k}$$

On a $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0\ car\ \vec{\imath},\vec{\jmath}et\ \vec{k}\ \ sont\ fixe\ dan\ R$

- Vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

: $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(0{,}3\,\omega\sin(\omega t)\vec{\imath}+0{,}3\omega cos(\omega t)\vec{\jmath}+0{,}1\omega\vec{k})}{dt}\right|_R$

Alors : $\vec{\gamma}(M/R)\ = -0{,}3\,\omega^2 cos(\omega t)\,\vec{\imath} + 0{,}3\omega^2 sin(\omega t)\vec{\jmath}$

2) Les normes $\|\vec{V}(M/R)\|\ et\ \|\vec{\gamma}(M/R)\|$:

$$\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{(0{,}3\,\omega\sin(\omega t))^2 + \left(0{,}3\omega cos(\omega t)\right)^2 + (0{,}1\omega)^2}$$

$= \sqrt{(0{,}3\omega)^2(\sin^2\ (\omega t) + \cos^2(\omega t))\ + (0{,}1\omega)^2} =$
$\sqrt{(0{,}3\omega)^2 + (0{,}1\omega)^2} = \omega\sqrt{0{,}09 + 0{,}01}$

$$\|\vec{V}(M/R)\| = \omega\sqrt{0{,}1}$$

A.N : $\omega = 2\pi rad/s\ \ et\ \ \|\vec{V}(M/R)\| m/s$

$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{(0{,}3\,\omega^2\ cos(\omega t))\ ^2 + (0{,}3\omega^2 sin(\omega t))^2}$$
$$= \sqrt{(0{,}3\omega^2)^2\cos^2(\omega t) + (0{,}3\omega^2)^2\sin^2(\omega t)}$$
$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{(0{,}3\omega^2)^2} = (0{,}3\omega^2)$$

A.N : $\omega = 2\pi$rad/s

3) les vecteus $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de la base de Frenet

- Vecteur tangentiel $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}\left(\frac{M}{R}\right)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{0{,}3\,\omega\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + 0{,}3\omega cos(\omega t)\vec{\jmath} + 0{,}1\omega\vec{k}}{\omega\sqrt{0{,}1}}$$
$$\vec{\tau} = \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}1}} sin(\omega t)\vec{\imath} + \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}1}} cos(\omega t)\vec{\jmath} + \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}1}}\vec{k}$$

- Vecteur normal $\vec{n}$

On a : $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$ trièdre direct $\Rightarrow \vec{b}=\vec{\tau}\wedge\vec{n}=\vec{k} \Rightarrow \vec{n}=\vec{k}\wedge\vec{\tau}\ \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}sin(\omega t)\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}cos(\omega t)\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}cos(\omega t)\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}sin(\omega t)\\ 0\end{pmatrix}$ Alors : $\vec{n}=\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}(sin(\omega t)\vec{\imath}+cos(\omega t)\vec{\jmath})$

4) Le rayon de courbure R_C

Méthode 1

On a le rayon de courbure définie par : $R_C=\frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{\gamma}(M/R)\wedge\vec{V}(M/R)\|}$

$$\vec{\gamma}(M/R)\wedge\vec{V}(M/R)=\begin{pmatrix}-0,3\omega^2\cos\omega t\\ -0,3\omega^2\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-0,3\omega\sin\omega t\\ 0,3\omega\cos\omega t\\ 0,1\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,1\times0,3\omega^3\\ 0,1\times0,3\omega^3\cos\omega t\\ -(0,3)^2\omega^3\cos^2\omega t+(0,3)^2\omega^3\sin^2\omega t\end{pmatrix}$$

Méthode 2 :

On a $\left\|\vec{\gamma_n}(M)\right\|=\frac{\left\|\vec{V}(M/R)\right\|^2}{R_c}$

On a : $\vec{\gamma}(M/R)=-0,3\omega^2\cos\omega t\,\vec{i}-0,3\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$

$\vec{\gamma}(M/R)=\vec{\gamma_\tau}(M)+\vec{\gamma_n}(M)=\gamma_\tau\vec{\tau}+\gamma_n\vec{n}$

Donc : $\gamma_n=\vec{n}\cdot\vec{\gamma}(M/R)$ Avec $\vec{n}=\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}(\cos\omega t\,\vec{i}+\sin\omega t\,\vec{j})$

$$\gamma_n=\vec{n}\cdot\vec{\gamma}(M/R)=\begin{pmatrix}\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}\cos\omega t\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0,3\omega^2\cos\omega t\\ -0,3\omega^2\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_n=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}\cos^2\omega t+\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}\sin^2\omega t=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}(\underbrace{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}_{1})=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}$$

$$\gamma_n=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}$$

Et $\left\|\vec{V}(M/R)\right\| = \omega\sqrt{0,1} \Rightarrow \left\|\vec{V}(M/R)\right\|^2 = \omega^2 \times 0,1 \Rightarrow R_c = \frac{\left\|\vec{V}(M/R)\right\|^2}{\gamma_n} = \frac{\omega^2 \times 0,1 \times \sqrt{0,1}}{0,3\omega^2}$

$$R_C = \frac{0,1 \times \sqrt{0,1}}{0,3}$$

Exercice 2 :

- Un point matériel de masse **m**
- **Coulisse** sans frottement sur $O\Delta \Rightarrow R_\rho = 0$
- $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le référentiel du laboratoire supposé Galiléen
- $R_1(O,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ le référentiel lié à l'axe $(O\Delta)$
- $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho}$

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$

E. Etude dans le référentiel R_1 :

1) Les forces appliquées à M dans R_1 sont :

- Le poids $\vec{P}$
- Frottement $\vec{R}$
- Les forces d'inertie $\vec{F}_{ic}, \vec{F}_{ie}$

2) Les expressions des forces dans la base $(\overrightarrow{e\rho}, \overrightarrow{e\varphi}, \vec{k})$.

- On a : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- Frottement : $\vec{R} = R_\rho\vec{e_\rho} + R_\varphi\vec{e_\varphi} + R_z\vec{k}$

Comme le point matériel M coulisse sans frottement sur $O\Delta$ et le vecteur directeur de $O\Delta$ est $\vec{e_\rho}$ donc la composante de $\vec{R}$ suivant $\vec{e_\rho}$ est nul ($R_\rho = 0$)

$\Rightarrow \vec{R} = R_\varphi\vec{e_\varphi} + R_z\vec{k}$

- forces d'inertie

  - Force de Coriolis $\vec{F}_{ic}$

On a $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M)$ avec $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}(M/R_1)$

On a $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \omega\vec{k}$ (car $\varphi = \omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega$) et $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho}$

$$\vec{V}(M/R_1)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_1}=\left.\frac{d\,\rho\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_1}=\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_1}$$ $\to 0$ (car $\vec{e}_\rho$ est fixe dans R_1)

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R_1)=\dot{\rho}\vec{e}_\rho$$

Donc $\vec{F}_{ic}=-m(\omega\vec{k})\wedge(\dot{\rho}\vec{e}_\rho)=-m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$ (Car $\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho=\vec{e}_\varphi$)

$$\vec{F}_{ic}=-m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$$

- Force d'entrainement $\vec{F}_{ie}$:

Origine de R_1

On a : $\vec{F}_{ie}=-m\vec{\gamma}_e(M)$ Avec $\vec{\gamma}_e(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right|_R+\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM})$

R

$\vec{\Omega}(R/R_1)=\omega\vec{k}\Rightarrow\left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}(R/R_1)\right|_R$ et $\left.\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right|_R=\vec{0}$

Alors : $\vec{F}_{ie}=-m\omega\vec{k}\wedge(\omega\vec{k}\wedge\rho\vec{e}_\rho)=-m\omega\vec{k}\wedge(\omega\rho\vec{e}_\varphi)$ (car $(\vec{k}\wedge\vec{e}_\varphi)=-\vec{e}_\rho$)

$$\vec{F}_{ie}=+m\omega^2\rho\vec{e}_\rho$$

3) Le principe fondamentale de la dynamique dans R_1 :

$$m\vec{\gamma}(M/R_1)=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_{ic}+\vec{F}_{ie}$$

Avec $\vec{\gamma}(M/R_1)=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{R_1}=\left.\frac{d^2(\rho\vec{e}_\rho)}{dt^2}\right|_{R_1}=\left.\frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e}_\rho)\right|_{R_1}$

$\vec{\gamma}(M/R_1)=\ddot{\rho}\vec{e}_\rho$ $\left(\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_1}=\vec{0}\right.$ Car $\vec{e}_\rho$ est fixe dans R_1)

$$\Rightarrow m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho=-mg\vec{k}+R_\varphi\vec{e}_\varphi+R_z\vec{k}-m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi+m\omega^2\rho\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho=m\omega^2\rho\vec{e}_\rho+(R_\varphi-m\omega\dot{\rho})\vec{e}_\varphi+(R_z-mg)\vec{k}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})}=\begin{pmatrix} m\omega^2\rho \\ (R_\varphi-m\omega\dot{\rho}) \\ (R_z-mg) \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})}\Rightarrow\begin{pmatrix} m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})}=\begin{pmatrix} m\omega^2\rho \\ (R_\varphi-m\omega\dot{\rho}) \\ (R_z-mg) \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})}$$

4) La projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$:

$$m\vec{\gamma}(M/R_1)=\vec{e}_\rho\cdot(\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_{ic}+\vec{F}_{ie})$$

$$=\vec{e}_\rho\cdot\left[m\omega^2\rho\vec{e}_\rho+(R_\varphi-m\omega\dot{\rho})\vec{e}_\varphi+(R_z-mg)\vec{k}\right]$$

$$=m\omega^2\rho\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\rho+(R_\varphi-m\omega\dot{\rho})\underbrace{\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\varphi}_{0}+(R_z-mg)\underbrace{\vec{e}_\rho\cdot\vec{k}}_{0}$$

Avec $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 1$ et $\begin{cases} \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \\ \vec{e}_\rho \cdot \vec{k} = 0 \end{cases}$ car $\begin{cases} \vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_\rho \perp \vec{k} \end{cases}$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho} = m\omega^2\rho \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

F. Etude dans le référentiel R (Galiléen)

1) L'accélération de M par rapport à référentiel R

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R \quad \text{Avec } \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\rho\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R\right)\right|_R = \left.\frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt}\right|_R \qquad Or: \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad et \quad \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt}\right|_R = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi + \rho\omega\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi - \rho\omega\dot{\varphi}\vec{e}_\rho = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi - \rho\omega^2\vec{e}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$$

2) PFD dans R

$$m\vec{\gamma}(M/R) = \sum \vec{F}_{réelles} \qquad \text{R : Galiléen}$$

$$m\left[(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi\right] = -mg\vec{k} + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + (R_z - mg)\vec{k}$$

$$Alors: m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi = R_\varphi\vec{e}_\varphi + (R_z - mg)\vec{k}$$

3) L'équation différentielle du mouvement

Pour trouver cette équation, il faut faire une projection sur un vecteur de telle sorte éliminer les composantes de réaction.

$$\Rightarrow \vec{e}_\rho \cdot m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{e}_\rho \cdot \sum \vec{F}_{réelles} \Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) + 0 = 0 + 0 \quad \Rightarrow \ddot{\rho} - \rho\omega^2 = 0$$

Thermodynamique :

Contrôle N : 1 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM :

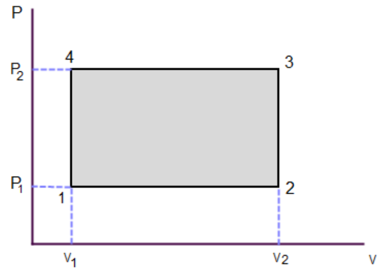
Questions de cours :

Une mole de gaz reçoit, au cours d'une transformation élémentaire réversible,une quantité de chaleur δQ qui peut s'exprimer de trois façons différentes, suivant le choix des variables (prassion P, volumeV, température T) : $\delta Q = c_v dT + l dV$; $\delta Q = c_p dT + h dP$ ou $\delta Q = \lambda dP + \mu dV$

Exprimer les coefficients calorimétriques l,h,μ , λ en fonction des capacités calorifiques molaire c_v et c_p et des dérivées partielles $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v$.

Exercice 1 :

On considère la transformation cyclique réversible d'une mole de gaz parfait, représentée par un rectangle sur le diagramme de Clapeyron (P,V) :



1) Calculer le travail et la quantité de chaleur échangés au cours de chaque transformation $1 \longrightarrow 2$, $2 \longrightarrow 3$, $3 \longrightarrow 4$ *et* $4 \longrightarrow 1$, entre le système gazeux et le milieu extérieur , en fonction de γ et des coordonnées indiquées dans le diagramme.
2) Calculer le travail et la quantité de chaleur échangés au cours du cycle entier.
3) Verifier le premier principe de la thermodynamique.

Le rapport des capacités calorifiques molaire à pression et volume constants est$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

Exercice 2:

Un cylindre horizontal, de volume invariable, est divisé en deux compartiments, par un piston mobile, sans frottement. Les parois du cylindre et le piston sont imperméables à la chaleur. A l'état initial (l'état d'équilibre thermodynamique initial), le piston de trouve au milieu du cylindre. Les deux compartiments C_1 et C_2 contiennt un même volume $V_0 = 2l$ d'hélium (gaz parfait), à la pression$P_0 = 1$ atmosphère, et à la température$T_0 = 273K$.

A l'aide d'une résistance chauffante, on chauffe lentement le gaz du compartimentC_1. Au bout d'un certain temps, on atteint l'état final (l'état d'équilibre thermodynamique final) lorsque la pression du gaz contenu dans C_1devient $P_1 = 3P_0$.On suppose donc que la transformation est une adiabatique réversible.

Le rapport des capacités calorifiques molaire à pression et volume constants est$\gamma = \frac{5}{3}$.

Déterminer:

1) les pressions, les volumes et les températures des compartiments C_1etC_2à l'etat final.

2) la variation d'énergie interne de gaz dans C_1etC_2 et l'énergie fournie par la résistance chauffante

Corrigé de contrôle N : 1 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM :

Question de cours

On a

- $\delta Q = C_v dT + l dV$ (1)
- $\delta Q = C_p dT + h dP$ (2)
- $\delta Q = \lambda dP + \mu dV$ (3)

A pression constante dP=0

(2) $\Rightarrow \delta Q = C_p dT$

(1) $\Rightarrow \delta Q = C_v dT + l dV \quad \Rightarrow C_p dT = C_v dT + l dV$

$(C_p - C_v) dT = l dV \quad \Rightarrow (C_p - C_v)\frac{dT}{dV} = l$ Alors : $l = (C_p - C_v)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$

(3) $\Rightarrow \delta Q = \mu dV = C_p dT \Rightarrow \mu = C_p \frac{dT}{dV}$ Alors : $\mu = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$

À volume constant donc dV=0

- $\delta Q = C_v dT$ (1)
- $\delta Q = C_p dT + h dP$ (2)
- $\delta Q = \lambda dP$ (3)

$\Rightarrow C_v dT = \lambda dP = C_p dT + h dP \Rightarrow C_v dT = \lambda dP \Rightarrow C_v \frac{dT}{dP} = \lambda \Rightarrow \lambda = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v$

Et $C_v dT = C_p dT + h dP \Rightarrow (C_v - C_p) dT = h dP \Rightarrow (C_v - C_p)\frac{dT}{dP} = h \Rightarrow \; h = (C_v - C_p)\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v$

Exercice 1

1) Calculons les travaux échangés :

$\delta W_{1,2} = -P dV$

$1 \to 2$ Transformation isobare $P_1 = P_2 \Rightarrow W_{1,2} = -P_1 \int_{V_1}^{V_2} dV \Rightarrow W_{1,2} = -P_1(V_2 - V_1)$

$2 \to 3$ Transformation isochore. $\Rightarrow W_{2,3} = -\int_{V_2}^{V_3} P dV$=0 (dV=0)

$3 \to 4$ Transformation isobare $\Rightarrow P_3 = P_4 \Rightarrow W_{3,4} = -\int_{V_3}^{V_4} P dV = -P_2(V_4 - V_3)$

$$P_3 = -P_2(V_1 - V_2)$$

$4 \rightarrow 1$ Transformation isochore $= 0$. $\Rightarrow W_{3,4} = -\int PdV = 0$

Calculons les quantités de chaleur échangées :

$1 \rightarrow 2$ Isobare dP=0 $\Rightarrow$ $\delta Q = C_p dT + hdP$ Avec $hdP = 0$

$$Q_{1,2} = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT = c_p(T_2 - T_1)$$

On a $c_p - c_v = nR$ avec n=1 mol

$c_p - c_v = R$ et $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ alors $\frac{c_p}{c_v} - \frac{c_v}{c_v} = \frac{R}{c_v} \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{R}{c_v}$, $c_v = \frac{c_p}{\gamma}$ donc $\gamma - 1 = \frac{R}{c_p/\gamma}$

$\Rightarrow \gamma - 1 = R\frac{\gamma}{c_p} \Rightarrow c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$$Q_{1,2} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$$

$1 \rightarrow 2$ Isobare $\begin{cases} P_1V_1 = RT_1 \\ P_1V_2 = RT_2 \end{cases} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{P_1}{R}(V_2 - V_1) \Rightarrow Q_{1,2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}P_1(V_2 - V_1)$

Le long de l'isochore $2 \rightarrow 3$ dV=0

On a $\delta Q_{2,3} = c_v dT + ldV \ avec \ ldV = 0 \Rightarrow Q_{2,3} = c_v \int_{T_2}^{T_3} dT$

On a $c_p - c_v = R \Rightarrow \frac{c_p}{c_v} - \frac{c_v}{c_v} = \frac{R}{c_v} \Longrightarrow \gamma - 1 = \frac{R}{c_v} \Longrightarrow c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

Et $Q_{2,3} = \frac{R}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$

$1 \rightarrow 2$ Isochore $\Rightarrow \begin{cases} P_2V_2 = RT_2 = P_1V_2 \\ P_3V_2 = RT_3 = P_2V_2 \end{cases} \Longrightarrow T_3 - T_2 = \frac{V_2}{R}(P_2 - P_1)$

$\Longrightarrow Q_{2,3} = \frac{1}{\gamma - 1} V_2(P_2 - P_1)$

Le long d'isobare $3 \rightarrow 4 \Rightarrow Q_{3,4} = \int_{T_3}^{T_4} c_p dT = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_4 - T_3) = -\frac{\gamma}{\gamma - 1}P_2(V_2 - V_1)$

Avec $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ et $\begin{cases} P_3V_3 = RT_3 = P_2V_2 \\ P_3V_4 = RT_4 = P_2V_1 \end{cases} \Rightarrow (T_4 - T_3) = \frac{P_2}{R}(V_2 - V_1)$

Le long de l'isochore $4 \rightarrow 1$:

$$Q_{4,1} = \int_{T_4}^{T_1} c_v dT = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_4) = -\frac{1}{\gamma - 1}V_2(P_2 - P_1)$$

Avec $T_1 - T_4 = -\frac{PV_1}{R}(P_2 - P_1)$

2) Le travail total échangé avec le milieu extérieur est :

$$W_T = W_{1,2} + W_{2,3} + W_{3,4} + W_{4,1} = -P_1(V_2 - V_1) - P_2(V_1 - V_2)$$
$$= -P_1(V_2 - V_1) + P_2(V_2 - V_1)$$

$$W_T = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1$$

La quantité de chaleur totale échangée est :

$$Q_T = Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,4} + Q_{4,1}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1(V_2 - V_1) + \frac{1}{\gamma - 1} V_2(P_2 - P_1) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_2(V_2 - V_1) - \frac{1}{\gamma - 1} V_1(P_2 - P_1)$$

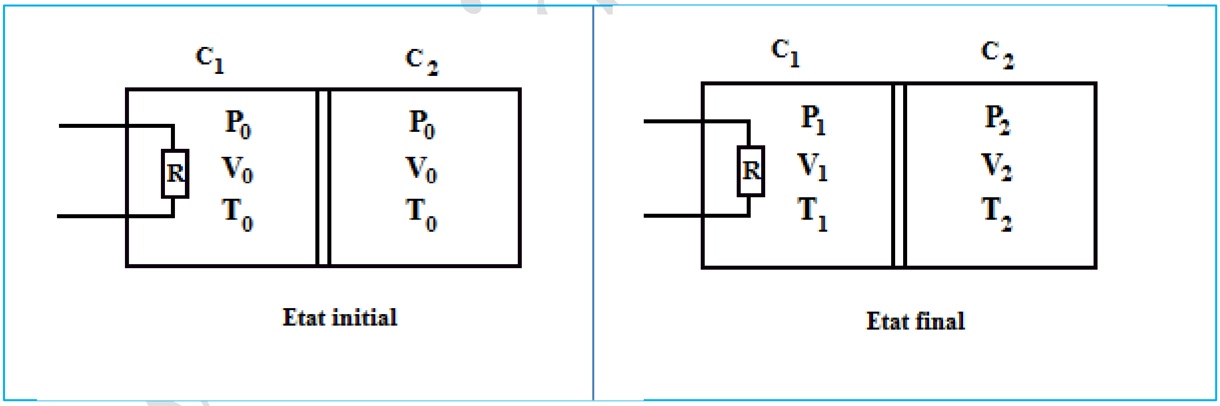
$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1}(P_1V_2 - P_1V_1 - P_2V_2 + P_2V_1) + \frac{1}{\gamma - 1}(V_2P_2 - V_2P_1 - V_1P_2 + V_1P_1)$$

$$= -(P_2 - P_1)(V_2 - V_1) \qquad \Longrightarrow \qquad Q_T = -\mathrm{W_T}$$

On a $\mathrm{W_T} + Q_T = (Q + W)_{cycle} = 0$

Donc le premier principe de la thermodynamique est vérifié.

Exercice 2 :



$P_0 = 1\ atm$ gaz parfait $\Rightarrow PV = nRT$

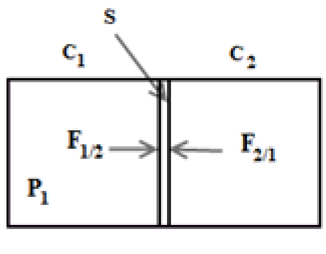
$V_0 = 2\ L$ Adiabatique $\Rightarrow PV^\gamma = Cte$

$T_0 = 273\ K$

1) Déterminations des pressions, des volumes et des températures des compartiments C_1 et C_1 à l'état final.

- A l'équilibre mécanique ⇒ Somme des forces égale a 0

Autrement dit $\sum \vec{F} = 0 = \vec{F}_{1/_2} + \vec{F}_{2/_1}$



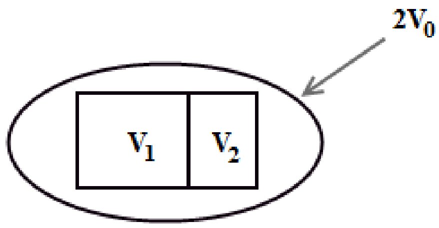
Etat final

$$\left\|\vec{F}_{1/2}\right\| = \left\|\vec{F}_{2/1}\right\| \Rightarrow \frac{P_1}{S} = \frac{P_2}{S} \Rightarrow P_1 = P_2$$

On a $P_1 = P_2 = 3P_0 = 3\ atm$

- Dans C_2

$$\begin{cases} P_0 \\ V_0 \\ T_0 \end{cases} \xrightarrow{Compression\ adiabatique} \begin{cases} P_2 \\ V_2 \\ T_2 \end{cases} \Rightarrow P_0 V_0^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$



$$\Rightarrow \frac{P_0}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_0}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{V_2}{V_0} = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma}$$

A.N: $V_2 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \simeq 1{,}03L$

On a $2V_0 = V_1 + V_2 \Rightarrow V_1 = 2V_0 - V_2 \Rightarrow$

A.N : $V_1 = 2{,}97L$

- Pour T_1 et T_2

On a $\frac{V_2}{V_0} = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma}$ avec $\begin{cases} P_2V_2 = nRT_2 \\ P_0V_0 = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{P_2V_2}{P_0V_0} = \frac{T_2}{T_0} \Rightarrow \frac{T_2}{T_0} \times \frac{P_0}{P_2} = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma}$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_0} = \frac{P_2}{P_0} \times \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{-1}\left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma - 1} \Rightarrow T_2 = T_0\left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma - 1} = T_0\left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{1 - 1/\gamma}$$

AN : $T_2 = 273 \times (3)^{2/5} = 423{,}7K$

- Pour T_1

On a

$$\begin{cases} P_1V_1 = nRT_1 \\ P_0V_0 = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{P_1V_1}{P_0V_0} = \frac{T_1}{T_0} \Rightarrow T_1 = T_0\frac{P_1V_1}{P_0V_0}$$

AN : $T_1 = 273 \times \frac{3 \times 2{,}97}{1 \times 2} = 943°C$

2) La variation d'énergie interne de n moles dans C_1 et C_2 :

- Dans C_1

Dans le cas d'une transformation infinitésimale réversible, le premier principe peut s'ecrire

$$dU = \delta Q + \delta W = C_v dT + l dV - P dV \Rightarrow dU = C_v dT + (l - P)dV$$

Pour un gaz parfait : l=P

Donc $dU = C_v dT$ alors $\Delta U = C_V \Delta T$

- Dans C_1 :

$\Delta U_1 = C_{V_1}(T_1 - T_0)$ Avec $C_{V_1} = \frac{nR}{\gamma-1}$

Avec $\begin{cases} P_1V_1 = nRT_1 \\ P_0V_0 = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow P_1V_1 - P_0V_0 = nR(T_1 - T_0) \Rightarrow \Delta U_1 = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma-1} \Rightarrow$ A.N $\Delta U_1 = 1040\ KJ$

- Dans C_2 :

$\Delta U_1 = \frac{P_2V_2 - P_0V_0}{\gamma-1}$ donc $\Delta U_1 = 164\ KJ$

L'énergie fournie par la résistance chauffante :

$$\mathrm{E} = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

Donc

$$\mathrm{E} = (1040 + 164)\mathrm{KJ} \ \text{ alors: } \mathrm{E} = 1204\ \mathrm{KJ}$$

Contrôle N : 1 **Thermodynamique** Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM:

Questions de cours

1) Gaz parfait

Choisir **deux** phrases parmi les quatre proposées ci-dessous, pour compléter cette définition :

«Un gaz parfait est un ensemble d'atomes ou de molécules contenus dans un volume V dont :………………………………………………………………….. ».

- Les interactions entre les atomes ou les molécules sont fortes,
- Les interactions entre les atomes ou les les molécules sont faibles ,
- Le volume propre des atomes ou des molécules est grand devant le volume du gaz,
- Le volume propre des atomes ou des molécules est petit devant le volume du gaz.

2) Travaildes forces de pression

Pour une transformation quelconque, laquelle de ces expression est vraie ? $\delta W = P_{ext}dV, \delta W = -P_{ext}dV \; ou \; \delta W = -PdV,$ où P est la pression et V le volume du gaz étudié.

3) Chaleur

Donnez les expressions de la chaleur δQ pour un gaz parfait, en coordonnées (T,V) et en coordonnées (P,T).

4) Transformation adiabatique réversible

Donner l'équation d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait en coordonnées (P,T).

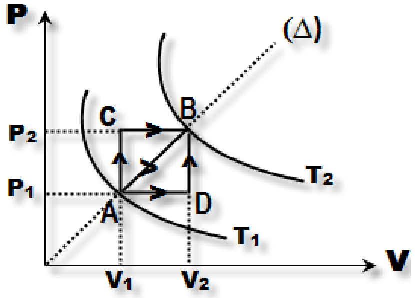
5) Premier principe

Compléter le définition suivante : « Si au cours d'une transformation d'un système d'un état d'équilibre initial vers un autre état d'équilibre final, il y a échange de travail et de chaleur avec le milieu extérieur,……………………………………………… ».

Exercice :

Un gaz parfait de n moles, pour lequel la chaleur spécifique molaire $C_{v=}(5/2)$R, est pris dans les conditions du point A dans la figure

Ci-contre. On lui fait décrire le chemin AB de 3 manières différentes :



- Le trajet ACB ;
- Le trajet ADB ;
- Le trajet AB coïncidant avec la droite (Δ) de pente 1 dans le plan (P,V) ,avec $P_2 = 2P_1$ et $V_2 = 2V_1$.

Remarques : **les lettres Q ,W et U désignent respectivement :la chaleur ,le travail et l'énergie interne .**

Questions :

On donnera les réponses en fonctions de R et T_1.(R étant la constante des gaz parfaits) .

1) Les températures

a) Calculer T_2 en fonction de T_1
b) Calculer T_c en fonction de T_1
c) Calculer T_D en fonction de T_1

2) Pour le trajet (ACB).

a) Donner la nature de la transformation (AC) puis calculer $W_{AC} et\ Q_{AC}$.
b) Donner la nature de la transformation (CB) puis calculer $W_{CB} et\ Q_{CB}$.
c) Calculer $W_{ACB} et\ Q_{ACB}$

3) Pour le trajet (ADB)

a) Donner la nature de la transformation (AD) puis calculer $W_{AD} et\ Q_{AD}$.
b) Donner la nature de la transformation (DB) puis calculer $W_{DB}\ et\ Q_{DB}$.
c) Calculer $W_{ADB}\ et\ Q_{ADB}$.

4) Pour le trajet (AB)

a) Calculer la variation de l'énergie interne ΔU_{AB}.
b) Calculer W_{AB}.
c) En déduire Q_{AB}.

5) Calculer la variation de l'énergie interne totale au cours du cycle (ACBDA) .résultat est –il prévisible ?Justifier votre réponse.

Corrigé du contrôle N : 1 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM:

Question Cours :

1) gaz parfait :

Un gaz parfait est un ensemble d'atomes ou de molécules contenus dans un volume V dont : les interactions entre atomes ou molécules sont faibles et le volume propre des atomes ou des molécules est petit devant le volume du gaz.

2) Travail des forces de pression :

Pour une transformation quelconque $\delta W = -P_{ext}dV$ est vraie.

3) Chaleur (gaz parfait)

l'expression de la chaleur δQ pour un gaz parfait en coordonnés (T,V) est : $\delta Q = C_V dT + PdV$

l'expression de la chaleur δQ pour un gaz parfaiten coordonnés (P,T) est : $\delta Q = C_P dT + hdP$=$C_P dT - VdP$ Pour un gaz parfait l=P , h= $-V$

4) Transformation adiabatique réversible :

$PV^\gamma = C$st

5) Premier principe :

Si ai cours d'une transformation d'un système d'un état d'équilibre initial vers un autre état d'équilibre ;il y a un échange de travail et de chaleur avec le milieu extérieur, la variation de l'énergie interne est égale à la somme algébrique des travaux et des chaleurs échangés avec le milieu extérieur ΔU =Q+W .

Exercice 2 :

1) Les températures :

a) On a $P_1V_1 = nRT_1$ avec $P_2 = 2P_1$ et $V_2 = 2V_1$ (1)
$or: P_2V_2 = nRT_2 \Longrightarrow 2P_1 \times 2V_1 = nR\,T_2$ (2)

$\frac{(1)}{(2)} \longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{T_1}{T_2} \Longrightarrow T_2 = 4T_1$

b) Au point c on a : $P_2V_1 = nRT_C$

Avec : $P_2 = 2P_1 \Longrightarrow 2P_1V_1 = nRT_C$ (1) or : $P_1V_1 = nRT_1$ au point A. (2)

$\frac{(1)}{(2)} \longrightarrow \frac{T_C}{T_1} \Longrightarrow T_C = T_1$

c) Au point D on a D(P_1, V_2, T_D)

$P_1V_2 = nRT_D$ (1) avec $V_2 = 2V_1$ Et $P_1V_1 = nRT_1$ (2) au point A .

$\frac{(1)}{(2)} \longrightarrow 2=\frac{T_D}{T_1} \longrightarrow T_D = 2T_1$

2) Le trajet (ACB)

d) Du point A au point C ,il y a une compression isochore.

- Le travail W_{AC}

Donc dV=0 $\Longrightarrow W_{AC} = -\int_A^C PdV = 0 \Longrightarrow W_{AC} = 0$

- La chaleur Q_{AC}

On a $\delta Q = C_V dT + ldV$ (ldV=0) $\Longrightarrow \delta Q = C_V dT$ Or $C_V = nC_{V_M}$

$Q_{AC} = nC_{V_M}(T_C - T_A)$ avec $\begin{cases} T_C = 2T_1 \\ T_A = T_1 \\ C_{V_M} = \frac{5}{2} R \end{cases} \Longrightarrow Q_{AC}=\frac{5}{2}\, n\, RT_1$

e) Du point C au point B, il y a une transformation isobare.

- Le travail W_{CB}

Pour $W_{CB} = -\int_C^B PdV$ B(P_2,V_2)

On a $W_{CB} = +\int_B^C PdV = -P_2(V_C - V_B)$ Et $P_2 = 2P_1$, $V_C = V_1$, $V_B = V_2$

$\Longrightarrow W_{CB} = +2P_1(V_1 - V_2) = +2P_1(V_1 - 2V_2) \Longrightarrow W_{CB} = -2P_1V_1 = -2nRT_1 \Longrightarrow W_{CB} = -2nRT_1$

- La chaleur Q_{CB} :

On a : $\delta Q = C_p dT + hdP$ (dP=0)$\Longrightarrow Q_{CB} = nC_p(T_B - T_C)$ avec $\begin{cases} C_P = nC_p \\ T_C = 2T_1 \\ T_B = T_2 = 4T_1 \end{cases}$

$\Longrightarrow Q_{CB} = nC_p(4T_1 - 2T_1) = 2nC_pT_1$ Avec : $C_p - C_V = nR$

$\Longrightarrow C_p - C_V = R \Longrightarrow C_p = R + C_V = R + \frac{5}{2} R = \frac{7}{2} R$ Finalement $Q_{CB} = 7nRT_1$

f)

- Le travail W_{ACB}

$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = 0 + (-2nRT_1) \Longrightarrow W_{ACB} = -2nRT_1$

- La chaleur Q_{ACB}

$Q_{ACB} = Q_{AC} + Q_{CB} = \frac{5}{2}nRT_1 + 7nRT_1 = \left(\frac{5}{2} + 7\right)nRT_1 \Longrightarrow Q_{ACB} = \frac{19}{2}nRT_1$

3) Pour le trajet ADB

a) Du point A au point D , il y a une dilatation isobare .

- Le travail W_{AD}

$$W_{AD} = -\int_A^D PdV = -P_A(V_D - V_A) = P_1(V_D - V_1)$$

$\Longrightarrow W_{AD} = -P_1(2V_2 - V_1) = -P_1V_1 = -nRT_1$

$Alors : \ W_{AD}{=}{-}nRT_1$

- La chaleur Q_{AD}

$Q_{AD} = C_P(T_D - T_A)$= n$C_{P_M}(T_D - T_A)$ = n$C_{P_M}(2T_1 - T_1)$ = n$C_{P_M}T_1$ Avec $C_{P_M} = \frac{7}{2}R(2-b)$

$Alors : \ Q_{AD} = \frac{7}{2}nRT_1$

b) Du point D au point B , il y a une compression isochore.

- Le travail W_{DB}

Donc dV= 0 $\Longrightarrow$ W_{DB}=0

- La chaleur Q_{DB}

$Q_{DB} = C_p(T_B - T_D)$= $nC_{P_M}(T_2 - 2T_1)$=$(4T_1 - 2T_1)$ Avec C_{P_M}=$\frac{5}{2}R$ $\Longrightarrow$
$Q_{DB} = n\frac{5}{2}R2T_1$=5n$RT_1$

$Alors : \ Q_{DB} = 5nRT_1$

c)

- Le travail fourni au cour du trajet ADB est :

W_{ADB}=W_{AD}+W_{BD} =$-nRT_1$+0 $\Longrightarrow W_{ADB} = -nRT_1$

- La quantité de chaleur fournie au cours du trajet ADB est :

$Q_{ADB} = Q_{AD} + Q_{DB}$=$\frac{7}{2}nRT_1$+5n$RT_1$ $\Longrightarrow Q_{ADB}$=$\frac{17}{2}nRT_1$

4) Trajet AB :

a) L'énergie interne U_{AB}

On a dU =$C_VdT + (l - P)dV$ Pour un gaz parfait $l = P \Longrightarrow$ dU=C_VdT

$U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1)$=$\frac{5}{2}nR(4T_1 - T_1)$=$\frac{15}{2}nRT_1$

$$Alors :\ U_{AB} = \frac{15}{2} nRT_1$$

b) Le travail W_{AB}:

On a $W_{AB} = -\int_A^B PdV$ d'après le graphe on à P=V

$W_{AB} = -\int_A^B VdV = -[\frac{V^2}{2}]_{V_A}^{V_B} \Longrightarrow W_{AB} = \frac{-V_B}{2} + \frac{V_A}{2} = \frac{1}{2}(V_A^2 - V_B^2) = \frac{1}{2}(V_1^2\text{-}V_2^2)$

$$\Longrightarrow W_{AB} = \frac{1}{2}(V_1^2 - 4V_1^2) = -3\frac{V_1^2}{2} = \frac{-3}{2} \times \frac{n^2R^2T_1^2}{P_1^2}$$

$$Alors :\ W_{AB} = \frac{-3}{2} nRT_1$$

c) La chaleur Q_{AB}?

D'après le premier principe de la thermodynamique :$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB} \Longrightarrow Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB}$

$\Longrightarrow Q_{AB} = \frac{15}{2} nRT_1 - \frac{3}{2} nRT_1 = 6nRT_1$

$$Alors :\ Q_{AB} = 6nRT_1$$

5) Calcul de l'énergie interne totale fournie au cours du cycle ACBDA :

On a : $\Delta U_{ACBDA} = W_{ACBDA} + Q_{ACBDA} = W_{ACB} + W_{BDA} + Q_{ACB} + Q_{BDA}$

- $W_{ACB} = -2P_1V_1 = 2nRT_1$
- $Q_{ACB} = \frac{19}{2} nRT_1$
- $W_{BDA} = -W_{ADB} = nRT_1$
- $Q_{BDA} = -Q_{ADB} = -\frac{17}{2} nRT_1$

Donc $\Delta U_{ACBDA} = -nRT_1 + \frac{19}{2} nRT_1 + nRT_1 - \frac{17}{2} nRT_1 = -nRT_1 + \frac{19-17}{2} nRT_1$

$\Delta U_{ACBDA} = -nRT_1 + nRT_1 = 0$

$$Alors :\ \Delta U_{ACBDA} = 0$$

Ce résultat est prévisible car $\Delta U = 0$ pour un cycle. *U* étant une fonction d'état ne dépend pas de chemin suivit. L'énergie interne ne dépend que de l'état initial et l'état final.

Contrôle N : 1 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM:

Question de cours :

1) Donner la définition d'une grandeur intensive et d'une grandeur extensive.
2) Pour une transformation infinitésimale réversible d'un gaz parfait , laquelle de ces expression du travail élémentaire est vrai :

$$\delta W = -P_{gaz}\,dV \;, \qquad \delta W = -P_{ext}\,dV \;, \qquad \delta W = P_{gaz}\,dV$$

3) Donner l'équation d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait , en variables (P.V) ,et en variables (T.V)
4) Donnez l'énoncé du premier principe de la thermodynamique.
5) Exprimer la variation élémentaire d'énergie interne dU d'un gaz parfait en fonction de sa capacité thermique à volume constant Cv.

Problème :

On fait subir à une mole de gaz parfait initialement dans l'état $A(P_0\ , V_0, T_0\ )$,les transformation successive suivantes (toutes réversible) ;

- Transformation adiabatique amenant les gaz à l'état $B(V_1 = (\frac{V_0}{3}), P_1, T_1)$.
- Transformation à volume constant amenant le gaz de l'état $B(P_1, V_1, T_1)$ à l'état $C(V_2 = V_1\ , P_2\ , T_2 = T_0)$.
- Transformation isotherme qui ramène le gaz de l'état $C\ (V_2, P_2\ , T_2)$ à l'état initial

1) Représenter dans un diagramme (P, V) le cycle décrit par le gaz.
2) Déterminer T_1, P_1 et P2 en fonction de $T_0\ , P_0$ et $\delta = \frac{Cp}{Cv}$ .Préciser si T1 est supérieur ou inférieur à T_0.
3) Exprimer le travail et la chaleur échangés par le gaz au cours des trois transformations, en fonction des données : $R, T_0\ \ et\ \delta = \frac{Cp}{Cv}$.
4) Exprimer le travail total $Wcycle$ échangé par le gaz au cours du cycle en fonction des données R T0 et δ=Cp/Cv. peut–on prévoir le signe de $Wcycle$? justifier votre réponse ?
5) Exprimer la variation de l'énergie interne du gaz pour chaque transformation
6) En déduire $\Delta Ucycle$ du gaz. commenter.

Corrigé du contrôle N : 1 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM:

Question de Cours :

1) Définition :

- Une grandeur intensive est une grandeur indépendante da la masse du système.

Exemple la pression, la température …

- Une grandeur extensive et une grandeur qui dépend de la masse du système.

Exemple : la masse, le volume, l'énergie …

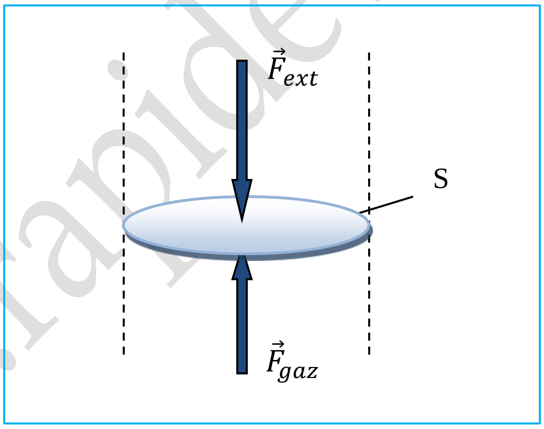
2) Pour une transformation infinitésimale réversible d'un gaz parfait $\delta W = -P_{gaz}\,.dV$ est vrai

En effet :

Pour une transformation quelconque $\delta W = -P_{ext}\,.dV$.

Si la transformation est réversible donc le système est en équilibre à chaque instant $F_{ext} = F_{Gaz}$

$$P_{ext} \times S = P_{Gaz} \times S \Longrightarrow \quad P_{ext} = P_{Gaz}$$



3)
4) L'équation d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait

- En variable (P, V) est $PV^{\gamma} = cst$
- En variable (T, V) est : $PV = nRT \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{nRT}{V}$

$$nR\frac{T}{V}V^{\gamma} = cst \Longrightarrow \frac{T}{V}V^{\gamma} = \frac{cst}{nR} = cst'$$

$Alors : \ T.V^{\gamma-1} = cst$ en variables $(T\,, V)$

5) Premier principe de la thermodynamique :

Si au cour d'une transformation d'un système d'un état d'équilibre initial vers un autre état d'équilibre final, il y a échange de travail W et de la chaleur Q avec le milieu extérieur. alors la variation de l'énergie interne du système est égale à la somme du travail W et la chaleur .

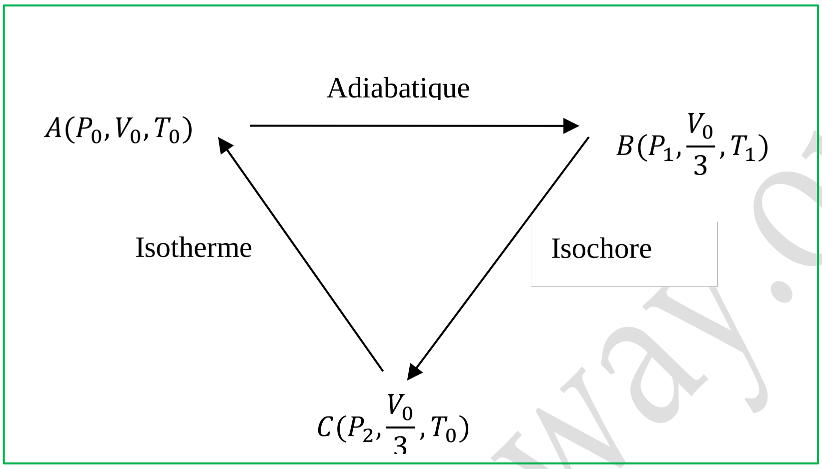
6) La variation elementaire dU d'n gaz parfait en fonction de Cv

On a : $dU = \delta Q + \Delta v = CvdT + ldV - PdV = CvdT + (l - P)dV$

Pour un gaz parfait $l = P \Longrightarrow dU = CvdT$

Problème :

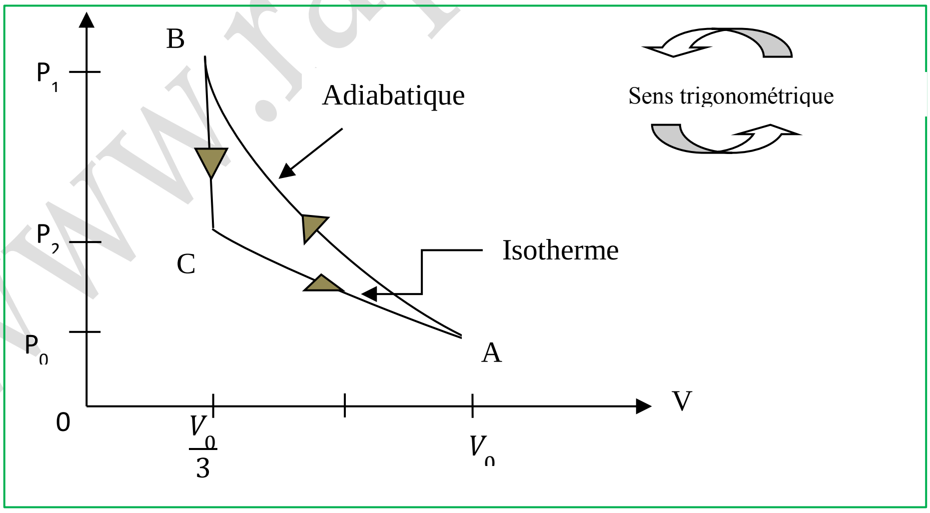
1) Représentation du diagramme $(P, V) du$ cycle décrit par le gaz.



Le diagramme (P, V)

On a $A \rightarrow B$ adiabatique $\Longrightarrow P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma}$

On a $\left.\begin{array}{l} V_A = V_0 > V_B = \frac{V_0}{3} \\ P_A = P_0 > P_B = P_1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} V_C = \frac{V_0}{3} < V_A = V_0 \\ P_C > P_A \end{array} \Longrightarrow P_1 > P_2 > P_0$



2)

- Pour T1 :

De A au point B, il s'agit d'une transformation adiabatique réversible.
L'équation d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait en variable (T, V) est :

- Au point A on a $A(P_0, V_0, T_0) \Longrightarrow T_0 . {V_0}^{\gamma-1} = cst$
- Au point B on a $A(P_0, V_0, T_0)$ $B(P_1, \frac{V_0}{3}, T_1) \Longrightarrow T_1 . \left(\frac{V_0}{3}\right)^{\gamma-1} = cst \Longrightarrow T_1 . \left(\frac{V_0}{3}\right)^{\gamma-1} = T_0 . {V_0}^{\gamma-1}$

$T_1 = T_0 . \frac{{V_0}^{\gamma-1}}{\left(\frac{V_0}{3}\right)^{\gamma-1}} = T_0 . 3^{\gamma-1} \Longrightarrow T_1 = T_0 . 3^{\gamma-1} \Longrightarrow T_1 > T_0$ car : $\gamma = 1.4 > 1$

- Pour P_1 :

De A au point B, il s'agit d'une transformation adiabatique.

- Au point A on a :
  $P_0 {V_0}^{\gamma} = cst$
- Au point B on a :
  $P_1 \left(\frac{V_0}{3}\right)^{\gamma} = cst \Longrightarrow P_0 {V_0}^{\gamma} = P_1 \left(\frac{V_0}{3}\right)^{\gamma}$

$Alors : P_1 = \frac{P_0 {V_0}^{\gamma}}{\left(\frac{V_0}{3}\right)^{\gamma}} \Longrightarrow P_1 = P_0 . 3^{\gamma}$

- Pour P_2 :

Du point B au point C, il ya une transformation a volume constant

- Au point B on a Au point C on a $A(P_0, V_0, T_0)$ $P_1 \left(\frac{V_0}{3}\right) = 1RT_1$ (1) avec n=1 mole du gaz parfait
- Au point C on a $P_2 \left(\frac{V_0}{3}\right) = RT_2$ (2)

$\frac{(2)}{(1)} = \frac{P_2\left(\frac{V_0}{3}\right)}{P_1\left(\frac{V_0}{3}\right)} = \frac{RT_2}{RT_1} \Longrightarrow P_2 = \frac{P_1 T_0}{T_1}$ Avec $P_1 = P_0 . 3^{\gamma}$ Et $T_1 = T_0 . 3^{\gamma-1}$

$\Longrightarrow P_2 = \frac{P_0 . 3^{\gamma} T_0}{T_0 . 3^{\gamma-1}} = P_0 . 3^{\gamma-(\gamma-1)} \Longrightarrow P_2 = 3 . P_0$

$$Finalement : \begin{cases} P_2 = 3 . P_0 \\ P_1 = P_0 . 3^{\gamma} \\ T_1 = T_0 . 3^{\gamma-1} \end{cases}$$

2) Le travail et la chaleur échangée par le gaz au cours des trois transformation en fonction de R , T0 et γ

- Le travail échangé :
  - Transformation adiabatique A→ B
    - La chaleur $Q_{AB}=0$
    - Le travail $dU = U_B - U_B = W_{AB} + Q_{AB} \Longrightarrow dU = W_{AB}$

D'après la question 5 (Qu. de cours) on a $dU = CvdT$

$W_{AB}=\int_A^B dU=\int_A^B C_v\,dT=C_v(T_B-T_A)$

Avec $T_B=T_1=\ T_0.3^{\gamma-1}$ et $T_A=T_0 \Longrightarrow W_{AB}=\ C_{v(}T_0.3^{\gamma-1}-1)$

Pour un gaz parfait : $C_p\text{-}C_v=nR$ (1) n=1 mole et $\frac{C_p}{C_v}=\gamma \Longrightarrow C_p=\gamma C_v$ (2)

(1) et (2) $\Longrightarrow$ $\gamma C_v-C_v=R \Longrightarrow C_v=\frac{R}{\gamma-1}$

Donc $W_{AB}=\frac{RT_0}{\gamma-1}(3^{\gamma-1}-1)$

✘ Transformation isochore $B \rightarrow C$:

- Le travail $W_{BC}=0\ Car\!: V=cst \Longrightarrow dV=0$
- La chaleur Q_{BC} :

$\delta Q=CvdT+ldV\quad Avec\ dV=0$

$$QBC=\int_B^C dU=\int_B^C C_v\,dT=C_v(T_C-T_B)\ Avec\quad T_C=T_0\ ,T_B=T_1=T_0 3^{\gamma-1},\quad C_v=\frac{R}{\gamma-1}$$

$$Alors:\ Q_{BC}=\frac{RT_0}{\gamma-1}(3^{\gamma-1}+1)$$

✘ Transformation isotherme C→ A :

- Le travail W_{CA}

$$W_{CA}=-\int_C^A PdV\quad avec\ \frac{nRT_0}{V}\quad Et\ n=1$$

$$W_{CA}=-\int_C^A \frac{RT_0}{V}dV=\ -RT_0[LnV_A-LnV_C]=-RT_0\frac{LnV_A}{LnV_C}\quad Avec\!: V_A=V_0\quad et\quad V_C=\frac{V_0}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{V_A}{V_C}=\frac{V_0}{V_0/3}=3$$

$Alors$: $W_{CA}=-RT_0\text{Ln}3$

- La chaleur

On a $\delta Q=CvdT+ldV$ et l=P pour un gaz parfait $A \rightarrow B$ $dT=0$

$$\delta Q=PdV \rightarrow Q_{CA}=\int_C^A PdV=-\left(\int_C^A -PdV\right)=-W_{CA} \Longrightarrow Q_{CA}=\ RT_0Ln3$$

Récapitulation :

$$\begin{cases} W_{AB}=\frac{RT_0}{\gamma-1}(3^{\gamma-1}-1) \\ W_{BC}=0 \\ W_{CA}=-RT_0\text{Ln}3 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} Q_{AB}=0 \\ Q_{BC}=\frac{RT_0}{\gamma-1}(1-3^{\gamma-1}) \\ Q_{CA}=RT_0\text{Ln}3 \end{cases}$$

3) Le travail total Wcycle échangé par le gaz au cours du cycle :

On a $Wcycle \ = W_{ABC} = W_{AB} + \ W_{BC} + \ W_{CA}$

$$Wcycle \ = \ \frac{RT_0}{\gamma - 1}(3^{\gamma-1} - 1) + \ 0 \ \ + (-RT_0 Ln3) \Longrightarrow Wcycle \ = \ RT_0 \left[\frac{3^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} - \ Ln3\right] \ > 0$$

- Oui on peut prévoir le signe de W_{cycle} .

  Ce travail est positif car le sens du cycle est le sens trigonométrique.

4) La variation de l'énergie interne du gaz pour chaque transformation :

- Transformation adiabatique (A → B)

$$\Delta U_{AB} = \ Q_{AB} + \ W_{AB} = 0 + \frac{RT_0}{\gamma-1}(3^{(\gamma-1)} - 1) \ \Longrightarrow \Delta U_{AB} = (RT_0)/(\gamma - 1)(3^{(\gamma-1)} - 1)$$

- Transformation isochore (B → C)

$$\Delta U_{BC} = \ Q_{BC} + \ W_{BC} = \frac{RT_0}{\gamma-1}(3^{\gamma-1} - 1) + 0$$

$$Alors: \ \Delta U_{BC} = \ \frac{RT_0}{\gamma - 1}(3^{(\gamma-1)} - 1)$$

- Transformation isotherme ($C \rightarrow \ A$)

$$\Delta U_{CA} = \ Q_{CA} + \ W_{CA} = RT_0 Ln3 - \ RT_0 Ln3$$

$$Alors: \ \Delta U_{CA} = 0$$

5) ΔU_{cycle} du gaz

$$\Delta U_{cycle} = \ \Delta U_{ABC} = \ \Delta U_{AB} \ + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = \ \frac{RT_0}{\gamma - 1}(3^{\gamma-1} - 1) \ + \ \frac{RT_0}{\gamma - 1}(3^{\gamma-1} - 1) \ + \ 0$$

$$\Delta U_{cycle} = \frac{RT_0}{\gamma - 1}[\ 3^{\gamma-1} - 1 + 1 - 3^{\gamma-1}] \quad Donc \ \Delta U_{cycle} = 0$$

Ce résultat est prévisible car $\Delta U = \ 0$ pour un cycle. U étant une fonction d'état ne dépend pas de chemin suivit. L'énergie interne ne dépend que de l'état initial et l'état final.

Algèbre 1 :

Contrôle N : 1 Algèbre Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM :

Exercices 1 :

On considère le système suivant $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$

1) Ecrire la matrice élargie de ce système.
2) Résoudre le système par la méthode de Gauss.

Exercice 2 :

Soit B une fonction polynômiale de degré trois de la forme :

$B(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad$ $Avec: a, b, cet\ d\ sont\ des\ réels.$

3) Déterminer les coefficients a,b,c ,d sachant que : $B(0) = 3$, $B(1) = 4$, $B(-1) = 0$ et $B'^{(1)} = 2$.
4) Décomposer la fonction polynômiale B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.
5) Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle.

$$F(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)(x^3-x^2+x+3)}.$$

Exercices 3 :

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de 1 par la fonction polynomiale $2+x$ à l'ordre 5.

Corrigé de Contrôle N : 1 Algèbre Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM :

Exercices 1 :

Soit le système : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$

1) Ecrire la matrice élargie de ce système.

La matrice élargie de système est : $\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) Résoudre le système par la méthode de Gauss

- Pour éliminer l'inconnue x dans la deuxième équitation on effectue l'opération $L_2 - L_1$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Pour éliminer l'inconnue x dans la troisième équitation on effectue l'opération $L_3 - 3L_1$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- On permute $L_2\ avec\ L_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Pour éliminer l'inconnue y dans la troisième équitation n on effectue l'opération $L_3 - 2\,L_2$

$On\ \ donc$: $\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Alors que le système

devient : $\begin{cases} x+y+z=1 & (E_1) \\ -y-2z=-1 & (E_2). \\ 4z=4 & (E_3) \end{cases}$

$(E_3) \quad \Rightarrow \quad 4z = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 1$

$(E_2) \quad \Rightarrow \quad y + 2z = 1 \quad \Rightarrow y + 2 = 1 \quad \Rightarrow y = 1$

$(E_1) \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 1 + 1 = 1 \quad \Rightarrow x = 1$

L'ensemble des solutions est : $\{(1,-1,1)\}$.

Exercices 2 :

Soit B une fonction polynômiale de degré trois de la forme :

$B(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad$ *Avec: a, b, cet d sont des réels.*

1) Décomposer la fonction polynômiale B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.

On a $B(0) = 3 \implies B(0) = 3 = a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 + d = d \implies d = 3$

On a $B(1) = 4 \implies B(1) = 4 = a + b + c + 3 \implies a + b + c = 1$

On a $B(-1) = 0 \implies B(-1) = 0 = -a + b - c + 3 \implies a - b + c = 3$

On a $B'^{(x)} = 3ax^2 + 2bx + c$

Alors : $B'^{(1)} = 2 \implies B'^{(1)} = 2 = 3a \times (1)^2 + 2b \times 1 + c \implies 3a + 2b + c = 2$

$\implies \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = 3 \\ 3a + 2b + c = 2 \end{cases}$ La solution de ce système est résolue en Exercice 1 alors $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \\ d=3 \end{cases}$

2) Décomposition de B en en produit de facteur irréductibles dans. $\mathbb{R}$.

$On\ a:\quad B = x^3 - x^2 + x + 3 \quad et \quad B(-1) = -1 - 1 - 1 + 1 = 0$

Alors -1 est une racine de $B(x)$ *or* $B'(-1) = 6 \neq 0 \implies -1$ est un racine simple de $B(x)$

$\implies B(x) = (x + 1)Q(x)$ Avec $Q(x)$: polynôme de degré 2 $\implies B(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

$\implies B(x) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c = x^3 - x^2 + x + 3$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -1 \\ b + c = 1 \\ c = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases} \implies B(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 3)$$

Soient : $x^2 - 2x + 3 = 0$ et $\Delta = (-1)^2 - 2 \times 1 \times 3 = -8 \leq 0$

Donc $B(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 3)$ est irréductible dans $\mathbb{R}$.

3) $Soit:\quad F(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)(x^3-x^2+x+3)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+1)(x^2-2x+3)} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x^2-2x+3)}$

La partie entière E=0 car $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3} = 0$ donc $F(x) = \frac{a}{(x+1)} + \frac{bx+c}{x^2-2x+3}$

On a : $(x + 1)F(x) = a + (x + 1)\left[\frac{bx+c}{x^2-2x+3}\right] = \frac{x-1}{x^2-2x+3}$

Pour $x = -1$ on $\quad a + (-1 + 1)\left[\frac{bx+c}{x^2-2x+3}\right] = \frac{-1-1}{(-1)^2-2(-1)+3} = -\frac{2}{6}$ alors $\quad a = -\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty} xF(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2-2x+3)} = a + \lim_{x\to\infty} \frac{bx^2+c}{x^2-2x+3} = a + b = 0 \implies b = -a = \frac{1}{3}$

$$F(1)=\frac{(1-1)}{(1+1)(1^2-2\times1+3)}=0=\frac{a}{1+1}+\frac{a\times1+c}{1-2\times1+3}$$

$$\Rightarrow 0=\frac{c}{2}+\frac{b+a}{2}\Rightarrow c=a+b=0$$

$$Alors : F(x)=-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{x}{3(x^2-2x+3)}$$

Exercices 3 :

La division suivant les puissances croissantes de 1 par la fonction polynomiale $2+x$ à l'ordre 5.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 2+x \\
\underline{1+\frac{1}{2}x} & \hline \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{64}x^5 \\
0-\frac{1}{2}x & \\
\underline{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2} & \\
0\quad+\frac{1}{4}x^2 & \\
\underline{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3} & \\
0\quad-\frac{1}{8}x^3 & \\
\underline{-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{16}x^4} & \\
0\quad+\frac{1}{16}x^4 & \\
\underline{\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}x^5} & \\
0\quad-\frac{1}{32}x^5 & \\
\underline{-\frac{1}{32}x^5-\frac{1}{64}x^6} & \\
0\quad+\frac{1}{64}x^6 &
\end{array}$$

Chimie générale 1 :

Contrôle N : 1 Chimie générale Filière SMPC 2007-2008 FSSM :

Important: Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle sera comptée fausse.

Problème I

G. un électron gravite autour d'un noyau de charge Ze sur une trajectoire circulaire.

1) Conformément à la théorie de Bohr, donner (sans justifier) :

a) l'expression du rayon r de l'orbite, en fonction de a0, Z et n.
b) l'expression de l'énergie correspondante en fonction de E_H, Z et n.

2) A partir de l'état fondamental, cet électron saute à un autre état d'énergie supérieure quand il reçoit un rayonnement de longueur d'onde l = 304,5.10-10 m. Quel est le niveau atteint lorsqu'il s'agit de l'ion He+ ?
3) Quelle est la longueur d'onde du rayonnement nécessaire pour exciter l'atome d'hydrogène H (initialement à l'état fondamental) pour qu'il atteigne le même niveau que celui de He+ excité (question 2).
4) On voudrait fabriquer une lampe à hydrogène et une autre à He+, laquelle des deux consommerait plus d'énergie ?
5) Quelle est la fréquence nécessaire pour ioniser l'atome d'hydrogène initialement pris à l'état fondamental ?

H. On considère un électron sur le niveau *n* = 3.

1) Quels sont les nombres quantiques qui peuvent être associés à cet électron ?
2) Préciser les orbitales atomiques (*s*, *p*, *d* ou *f*) associées aux différents états de cet électron.

Données :

- $EH = -13{,}6\,eV$; $1\,eV = 1{,}602.10 - 19\,J$
- $h = 6{,}626.10^{-34}\,J.$
- $c = 3.108\,m.s^{-1}$
- $Z(H) = 1 et\, Z(He) = 2.$

Problème II :

Soient les éléments chimiques suivants : $_1H$, $_7N$, $_8O$, $_{11}Na$, $_{14}Si$, $_{15}P$, $_{16}S$.

1) Etablir leurs configurations et indiquer ceux qui appartiennent à la même période et ceux qui appartiennent à la même colonne.
2) Le soufre S réagit avec le fluore F pour donner trois composés SF_x, SF_y et SF_z. Identifier ces composés.
3) Avec l'hydrogène le soufre ne donne que SF_x, pourquoi ?
4) Etablir les structures de Lewis des molécules SF_x, SF_y, SF_z, SiO et prévoir leur géométrie de base. Indiquer celles qui sont polaires.

5) Comparer la longueur de liaison et le caractère ionique des liaisons N-H et P-H dans les molécules NH_3 et PH_3.
6) Sachant que l'interaction *s-p* est présente dans la molécule SiO,

a) Construire son diagramme des orbitales moléculaires.
b) Déterminer le nombre et la nature des liaisons.
c) Indiquer le caractère magnétique de SiO.

1) Donner la configuration électronique de $\mathbf{SiO^{2-}}$.
2) En déduire :

a) le nombre et la nature des liaisons.
b) le caractère magnétique de SiO2-.

Corrigé du contrôle N : 1 Chimie générale Filière SMPC 2007-2008 FSSM :

Problème I :

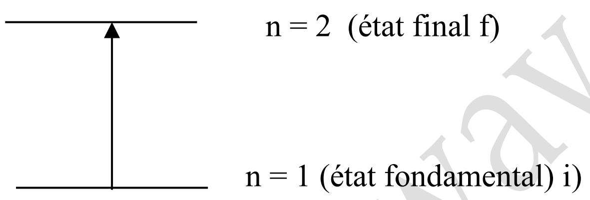
I.

3)

a) $r = \dfrac{n^2}{Z} a_\circ$

b) $E_n = \dfrac{Z^2}{n^2} E_H$

4)



Il s'agit de l'hélium donc Z = 2 or $|\Delta E| = |E_f - E_i| = |E_p - E_1| = \dfrac{hc}{\lambda}$

$E_p = \dfrac{4}{P^2} E_H$ et $E_1 = 4E_H$ .Donc : $4E_H (\dfrac{1}{p^2} - 1) = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \dfrac{1}{p^2} - 1 = \dfrac{hc}{\lambda} \times \dfrac{1}{4E_H}$

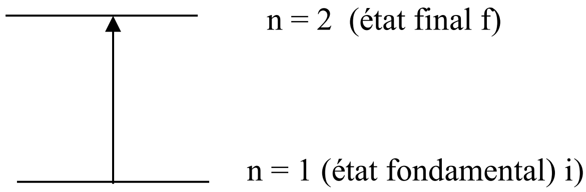
$\Rightarrow \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{hc + 4\lambda E_H}{4\lambda E_H}$ D'où $p = \sqrt{\dfrac{4\lambda E_H}{hc + 4\lambda E_H}}$

A.N.:

$$p = \sqrt{(\frac{4 \times 304{,}5.10^{-10} \times (-13{,}6) \times 1{,}602.10^{-19}}{6{,}626.10^{-34} \times 3.10^{8} + 4 \times 304{,}5.10^{-10} \times (-13{,}6) \times 1{,}602.10^{-19}})} = 1{,}99 \cong 2$$

Donc le niveau atteint est le niveau 2.

5) Calcul de λ dans le cas de l'hydrogène :



$$|\Delta E| = h\nu = |E_f - E_i| = \left|\frac{1}{4}\times E_H - E_H\right| = \left|-\frac{3}{4}\times E_H\right| = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \left|-\frac{4hc}{3E_H}\right|$$

A. N. : $\lambda = \left|-\dfrac{4\times 6{,}626.10^{-34}\times 3.10^{8}}{3\times(-13{,}6)\times 1{,}602.10^{-19}}\right| = 1216{,}5.10^{-10}\, m$

Remarque : Si on veut calculer une grandeur positive (λ, ν …) et pour éviter toute erreur, il vaut mieux prendre la valeur absolue de ΔE.

6) $\Delta E_{He^+} = \dfrac{4}{4}E_H - \dfrac{4^2}{1^2}E_H = -15E_H$ et

$$\Delta E_H = -\frac{3}{4}E_H \; .$$

D'où : $\Delta E_{He+} > \Delta E_H$ donc la lampe à He^+ consommerait plus d'énergie.

Ou bien : $\lambda_H > \lambda_{He+} \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_H} < \dfrac{1}{\lambda_{He^+}} \Rightarrow \dfrac{hc}{\lambda_H} < \dfrac{hc}{\lambda_{He^+}}$ d'où même C/C.

7) Ioniser l'atome d'hydrogène ; c'est envoyer son électron vers l'infini :

$$|\Delta E| = h\nu = |E_f - E_i| = |0 - E_H| \qquad \nu = \left|\frac{-E_H}{h}\right|$$

A. N. : $\nu = \dfrac{-(-13{,}6)\times 1{,}602.10^{-19}}{6{,}626.10^{-34}} = 3{,}29.10^{15}\, s^{-1}(Hz)$

J.

8) n est le nombre quantique principal : $n \in N^*$

- l est le nombre quantique secondaire ou azimuthal : $0 \le l \le n-1$
- m_l est le nombre quantique magnétique : $-l \le m_l \le l$.

De là il découle que pour une valeur donnée de n on a n valeurs possibles de l et n^2 valeurs possibles de m_l. Donc on aura n^2 triplet (n, l, m_l).

n = 3 $\Rightarrow$ l = 2 $\Rightarrow$ m_l = -2, -1, 0, 1, 2

$l = 1 \Rightarrow m_l = -1, 0, 1$

$l = 0 \Rightarrow m_l = 0.$

9) l'O.A. est notée s si $l = 0$, p si $l = 1$, d si $l = 2$ et f si $l = 3$.

Donc : (3, 2, -2), (3, 2, -1), (3, 2, 0), (3, 2, 1) et (3, 2, 2) correspondent aux O.A. 3d.

(3, 1, -1), (3, 1, 0) et (3, 1, 1) correspondent aux O.A. 3p.

(3, 0, 0) correspond à l'O.A. 3s.

Problème II

1) Configurations électroniques :

${}_1H : 1s^1$ ${}_{11}Na : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1 = [Ne]3s^1$

${}_7N : 1s^2\ 2s^2\ 2p^3 = [He]2s^2\ 2p^3$ ${}_{14}Si : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^2 = [Ne]3s^2\ 3p^2$

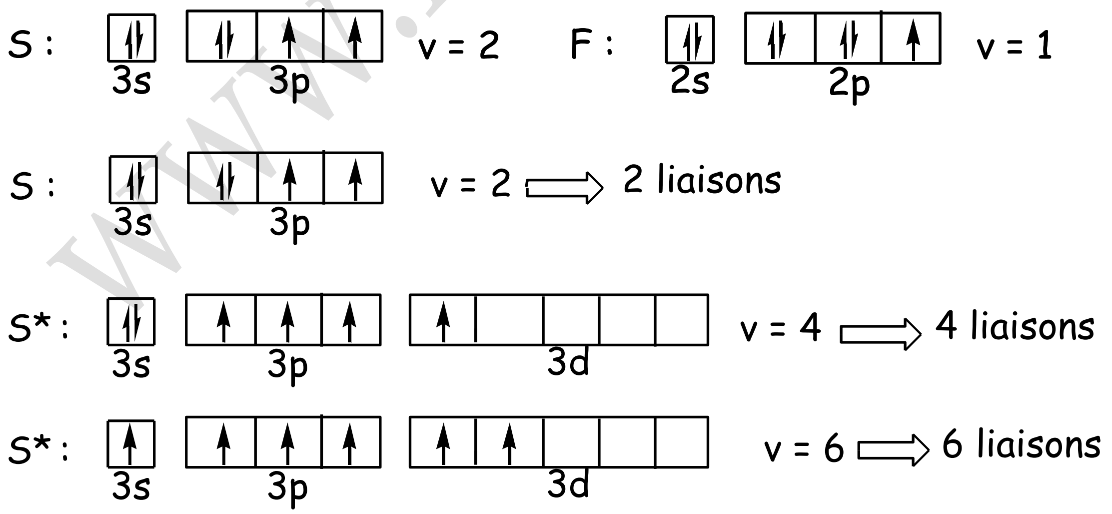
${}_8O: 1s^2\ 2s^2\ 2p^4 = [He]2s^2\ 2p^4$ ${}_{15}P : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^3 = [Ne]3s^2\ 3p^3$

${}_9F: 1s^2\ 2s^2\ 2p^5 = [He]2s^2\ 2p^5$ ${}_{16}S : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^4 = [Ne]3s^2\ 3p^4$

Les éléments appartenant à la même colonne sont caractérisés par la même configuration externe, alors que ceux qui appartiennent à la même période sont caractérisés par la même valeur de n.

Même colonne	Même période
H, Na	N, O, F
N, P	Si, P, S, Na
O, S	

2) SF_x, SF_y et SF_z :



$\Rightarrow SF_x = SF_2$, $SF_y = SF_4$ et $SF_z = SF_6$

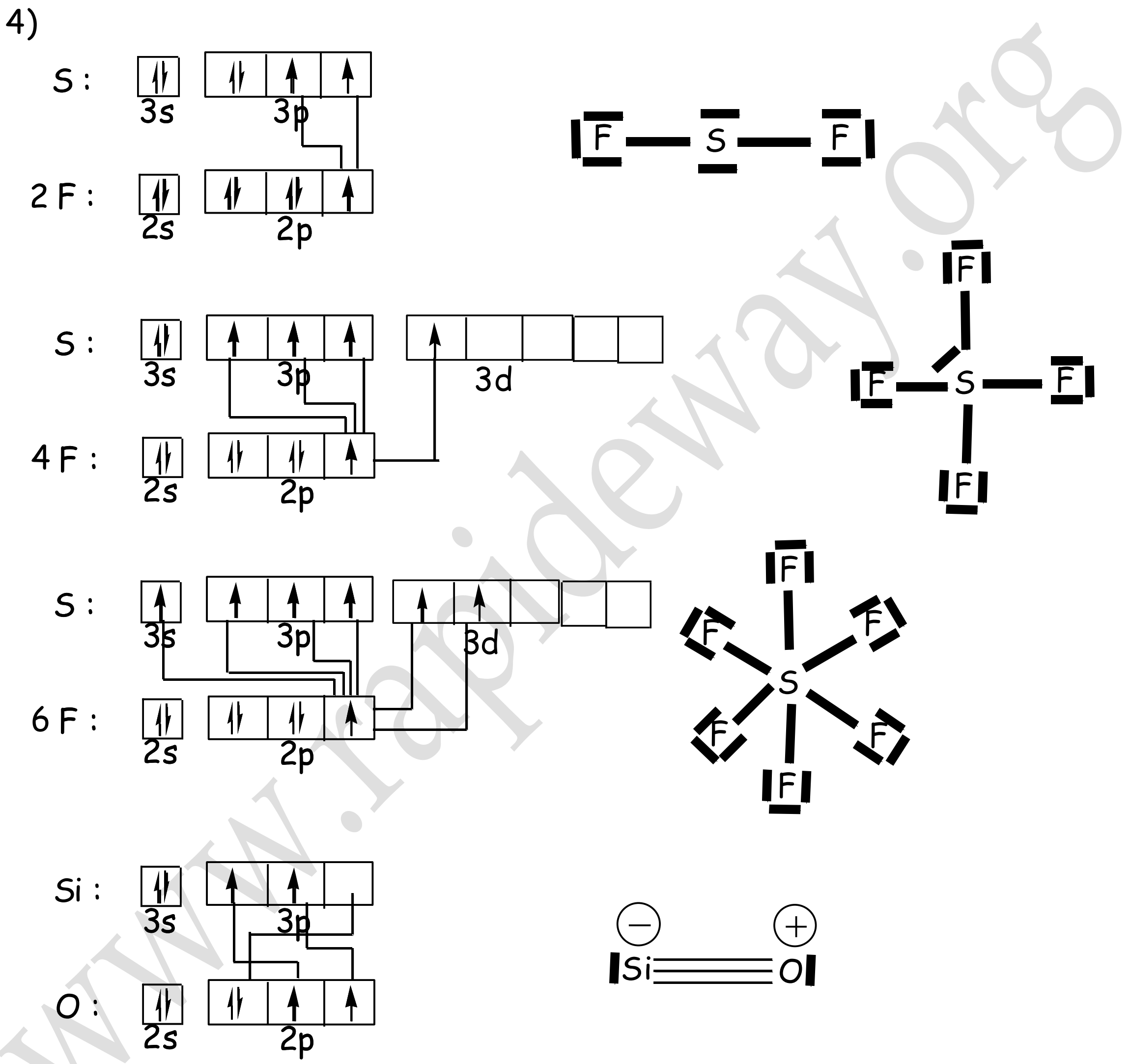
S possède des O. A. d (en effet ces O. A. existent à partir de n = 3).

Remarque : dans SF_4 et SF_6 S est entouré de plus de 8e⁻ on a donc une dilatation de l'octet et cette dilatation n'est possible que lorsque deux conditions sont satisfaites :

- l'atome central doit posséder des O. A. d,
- l'atome central doit être moins électronégatif que les atomes qui l'entourent.

3) $SH_x = SH_2$, SH_4 et SH_6 ne peuvent pas exister car $\chi(H) < \chi(S)$ c'est-à-dire la 2ème condition de la dilatation de l'octet n'est pas satisfaite.

4)



* SF_2 : 4 doublets autour de S (2 doublets σ et 2 non liants (doublets n) ; formule structurale AX_2E_2) la géométrie de base est tétraédrique.

N.B. : pour obtenir la forme moléculaire il faut regarder uniquement les liaisons ; SF_2 a une forme coudée ou forme en V.

* SF_4 : 5 doublets autour de S (4 σ et 1 n ; formule structurale AX_4E_1) $\Longrightarrow$ la géométrie de base est une bipyramide à base triangulaire (la forme moléculaire est un tétraèdre déformé).

* SF_6 : 6 doublets autour de S (6 σ ; formule structurale AX_6E_0) $\Rightarrow$ la géométrie de base est une bipyramide à base carrée (la forme moléculaire est une bipyramide à base carrée ou un octaèdre régulier).

* SiO : 2 doublets autour de Si $\Rightarrow$ "géométrie de base linéaire".

Molécules polaires	Molécules non polaires
SF_2, SF_4, SiO	SF_6

5) χ(N) > χ (P) de plus χ (N) < χ (P) donc d(N-H) < d(P-H)

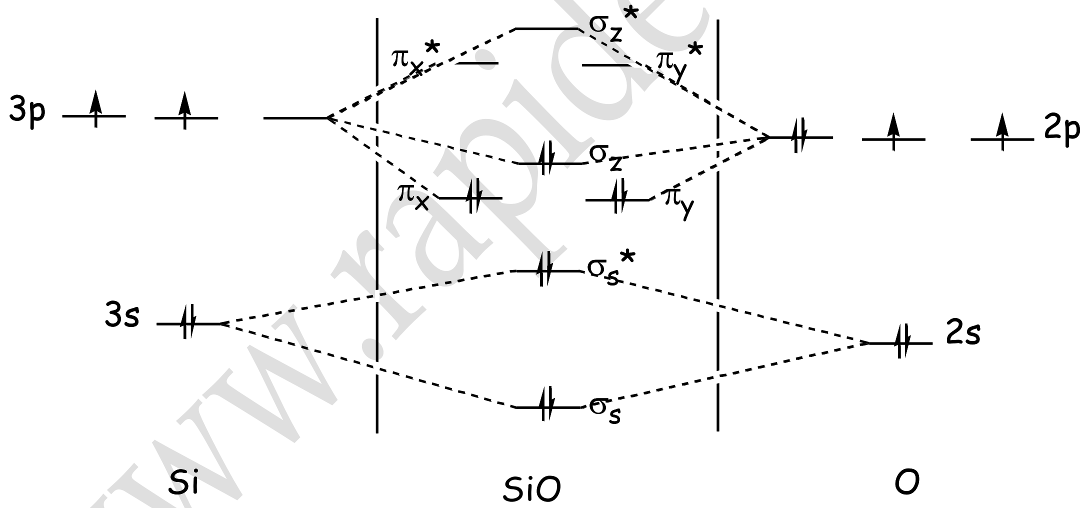
χ (N) > χ(P) $\Rightarrow$ le caractère ionique dans N-H sera plus important que dans P-H.

N.B. : $\%C.I. = \frac{\mu_{exp}}{\mu_{the}} \times 100 = \frac{\delta \times d}{e \times d} \times 100 = \frac{\delta}{e} \times 100$; δ dans N-H est > à δ dans P-H

6)

c) Diagramme des OM de SiO :

* χ(O) > χ(Si) $\Longrightarrow$ les O.A. de O sont plus stables que celles de Si
* Interaction s-p $\Longrightarrow$ π_x et π_y sont plus stables que σ_z.



$\omega = \frac{n - n^*}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$ $\Rightarrow$1 liaison σ et 2 liaisons π.

d) pas d'e- célibataire dans SiO donc la molécule est diamagnétique.

7- SiO^{2-} : $\sigma_s^{\,2}\, \sigma^*{}_s^{\,2}\, (\pi_x, \pi_y)^4\, \sigma_z^{\,2}\, (\pi^*{}_x^{\,1}, \pi^*{}_y^{\,1})$.

7)

e) $\omega = \frac{8-4}{2} = 2$ $\Rightarrow$1 liaison σ et 2 demi liaison π (1 liaison π)

f) 2 e- célibataires $\Rightarrow$ SiO2- est paramagnétique.

Remarque : le diagramme des O.M. avec interaction s-p (Ex. : celui de SiO ci-dessus) est présenté d'une façon très simplifiée.

Contrôle N : 1 Chimie générale Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM :

Tout réponse non justifiée sera compté fausse. Les parties Exercice 1, Exercice 2, et Exercice 3 sont indépendantes

Exercice 1 :

On considère les éléments dont le numéro atomique Z est inférieur à 18

1) Donner toutes les configurations électroniques caractérisées par la présence de deux électrons célibataires.
2) Parmi ces configurations, lesquelles correspondent-elles aux éléments de la famille de l'oxygène.
3) Donner la configuration et le symbole de l'élément de la troisième période caractérisé par l'une des configurations de la question 2).
4) Quelles répartitions électroniques de la valence (à donner sous forme de case quantique), doit adopter cet élément pour former 2,4 ou 6 liaisons.

Exercice 2 :

On appelle que selon le module de Bohr le rayon du cercle décrit par l'électron et l'énergie associée sont donnés par :

$$r = a_0 \frac{n^2}{Z} \text{ et } E = E_H \frac{Z^2}{n^2}$$

1) L'électron d'un hydrogeneoide de numéros atomique Z se trouve sur l'orbite de rayon $r = 4{,}5\ a_0$ et possède une énergie $E = 0{,}444E_H$.

a) De quel hydrogeneoide s'agit-il ?
b) Sur quel niveau énergétique se trouve cet électron ?

1) Le retour à l'état fondamental s'accompagne de l'émission d'une radiation lumineuse. Calculer la fréquence de cette radiation.
2) Quelle quantité d'énergie permet-elle d'ioniser cet hydrogeneoide ?
3) Cet hydrogeneoide résulte de l'ionisation de l'élément chimique correspondant.

Evaluer, selon le modèle de Slater :

a) L'énergie électronique de cet élément,
b) L'énergie d'ionisation permettant de produire l' hydrogeneoide en question.

Données : $E_H = -13{,}6\ eV$; $1eV = 1{,}6.10^{-19}J$; $h = 6{,}626.10^{-34}J.s$

$\sigma_{ij}(e_i\ fait\ écram\ à\ e_j)$

i\j	1s	2s2p
1s	0,31	
2s2p	0,85	0,35

Exercice 3 :

1) Construire le diagramme des orbitales moléculaires de l'anion NO^- sachant que cet anion est caractérisé par la présence de l'ionisation s-p. En déduire sa configuration électronique.
2) Déterminer l'ordre (nombre) de liaison et le type de liaison dans cet anion.
3) Ce système est-il para ou diamagnétique ?
4) Quel sera l'ordre de liaison dans NO, NO^+ ?
5) Comparer les forces des liaisons entre N et O dans la série NO, NO^+ et NO^-
6)

a) Etablir la structure de Lewis de chacune de ces espèces.
b) Expliquer pourquoi les liaisons dans NO_3^- sont équivalentes.

7)

a) Quelle est la géométrie de base et la forme moléculaire (géométrie) de NO_2^- et NO_3^- ?
b) Quel est l'état d'hybridation de l'azote dans ces anions ?

Données : $Z(N) = 7$ et $Z(O) = 8$

Corrigé du contrôle N : 1 Chimie générale Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM :

Exercice 1 :

1) configuration électronique $(Z < 18 \; et \; deux \; electrons \; célibataire)$

Les cas possibles sont :

- $1s^2 \; 2s^2 \; 2p^6 \; 3s^2 3p^4$ (la saturation et 20 électrons)
- $1s^2 \; 2s^2 \; 2p^4$ (la saturation et 10 électrons)

2) la famille de l'oxygène a une configuration électronique de valence de la forme $ns^2 \; np^4$

la configuration électronique $1s^2 \; 2s^2 \; 2p^4$, il s'agit donc de l'atome d'oxygène

3) l'élément de la troisième période donc $n = 3$

La configuration électronique est : $1s^2 \;\; 2s^2 2p^6 \;\; 3s^2 3p^4$ donc il s'agit de l'atome de soufre S

4) configuration électroniques de la valence

$3s^2 3p^4$

$3s^2$ $3p^4$

Cas d'une liaison

- 1[er] excitation :

4 liaisons

$3s^2$ $3p^4$ $3d^1$

- 2[eme] excitation

6 liaisons

$3s^2$ $3p^4$ $3d^1$

Exercice 2 :

1)

a) On a $\begin{cases} r = a_0 \dfrac{n^2}{Z} \\ E = E_H \dfrac{Z^2}{n^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} r = 4{,}5 \; a_0 \\ E = 0{,}444 E_H \end{cases}$

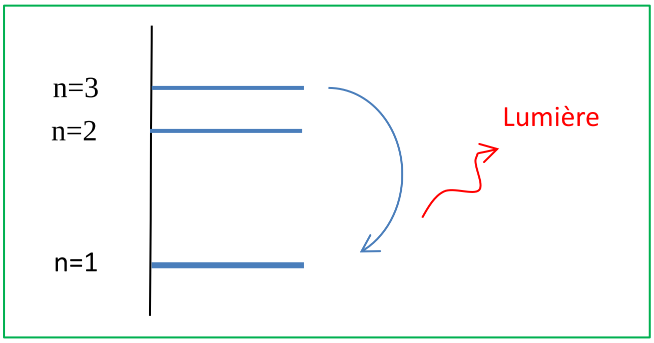
Donc : $E_H \dfrac{Z^2}{n^2} = 0{,}444 E_H \Rightarrow \dfrac{Z^2}{n^2} = 0{,}444 \quad or : \; a_0 \dfrac{n^2}{Z} = 4{,}5 \; a_0 \Rightarrow \dfrac{n^2}{Z} = 4{,}5$

$$\frac{Z^2}{n^2} \times \frac{n^2}{Z} = 0{,}444 \; \times 4{,}5 \; \Rightarrow Z = 0{,}444 \; \times 4{,}5 = 1{,}998 \approx 2$$

$Z = 2 \Rightarrow$ Il s'agit de l'atome l'hélium

b) On a $\frac{n^2}{Z} = 4{,}5 \Rightarrow n^2 = 4{,}5 \times Z \Rightarrow n = \sqrt{4{,}5 \times Z} = \sqrt{4{,}5 \times 2} = 3 \;\; (nivaux \; trois)$

2)



La fréquence de la radiation

$$\Delta E = E_H \frac{Z^2}{n_3^2} - E_H \frac{Z^2}{n_1^2}$$

$$= E_H Z^2 \left(\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

$$= 4E_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right)$$

$$= 4 \times (-13{,}6)\left(\frac{1}{9} - 1\right)$$

$$\Delta E = 48{,}35\ eV = 48{,}35\ \times 1{,}6.10^{-19} = 77{,}368.10^{-19} J$$

On a $\Delta E = h\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\Delta E}{h}$

AN : $\upsilon = \frac{77{,}368..10^{-19}}{6{,}626.10^{-34}} = 1{,}168.10^{16}\ Hz = 1{,}168.10^{16}\ s^{-1}$

3) Quantité d'énergie d'ionisation EI

Pour ioniser cette atome on a besoin d'une Quantité d'énergie nécessaire à passer l'électron de l'état fondamentale à l'∞

Donc $EI = E_\infty - E_{n_1}$ $(Avec:\ E_\infty = 0)$

$$EI = 0 - E_{n_1} = -E_H \frac{Z^2}{n_1^2} \quad (Avec\ E_{n_1} = E_H \frac{Z^2}{n_1^2})$$

$Alors$: $EI = -(-13{,}6)\frac{2^2}{1^2}$ L'atome l'hélium $\Rightarrow Z = 2$

$$\boxed{EI = 54{,}4\ eV}$$

4) L'énergie électronique de cet élément selon le modèle de Slater

L'équation d'ionisation de He est $He \longrightarrow He^+ + e$

Donc $EI = E(He^+) - E(He)$

Selon le modèle de Slater

l'atome l'hélium $\Rightarrow Z = 2$ a pour configuration électronique : $1s^2$

pour $He^+ \Rightarrow Z = 1$ a pour configuration électronique : $1s^1$

Donc $\begin{cases} E(He^+) = 1E_{1s} = E_H \left(\frac{Z^*_{He^+}}{n}\right)^2 \\ E(He) = 2E_{1s} = E_H \left(\frac{Z^*_{He}}{n}\right)^2 \end{cases}$

- calculons Z^{*}_{He}

$Z^{*}_{He} = Z - \sigma_i$

Un électron de la couche externe $1s^2$ a donc comme électron d'écran :

1 électron (1s) de la couche $n = 1$: $\sigma_i = 0{,}31$

Donc $Z^{*}_{He} = Z - \sigma_i = 2 - 0{,}31 = 1{,}69$

$\sigma_{ij}(e_i\ fait\ écram\ à\ e_j)$

Electron i\j	n=1 1s	n=2 2s2p
1s	0,31	
2s2p	0,85	0,35

- calculons $Z^{*}_{He^+}$

pour $He^+ \Rightarrow Z = 1$ a pour configuration électronique : $1s^1$

un électron de la couche externe $1s^1$ a donc comme électron d'écran : $\sigma_i = 0$

Donc $Z^{*}_{He} = Z - \sigma_i = 1 - 0 = 1$

Alors $EI = E(He^+) - E(He)$

$$EI = 1E_{1s} - 2E_{1s}$$

$$EI = 1 \times E_H \left(\frac{Z^{*}_{He^+}}{n}\right)^2 - 2 \times E_H \left(\frac{Z^{*}_{He}}{n}\right)^2$$

$$EI = 1 \times (-13{,}6)\left(\frac{1}{1}\right)^2 - 2 \times (-13{,}6)\left(\frac{1{,}69}{1}\right)^2$$

$$EI = 64\ eV$$

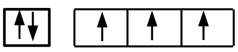
Exercice 3 :

1) le diagramme des orbitales moléculaires de l'anion NO^-

la configuration électronique de N(Z=7) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$

La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^3$

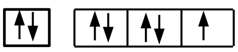


$2s^2$ $2p^3$

La configuration électronique de O^-(Z=8) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^{4+1}$

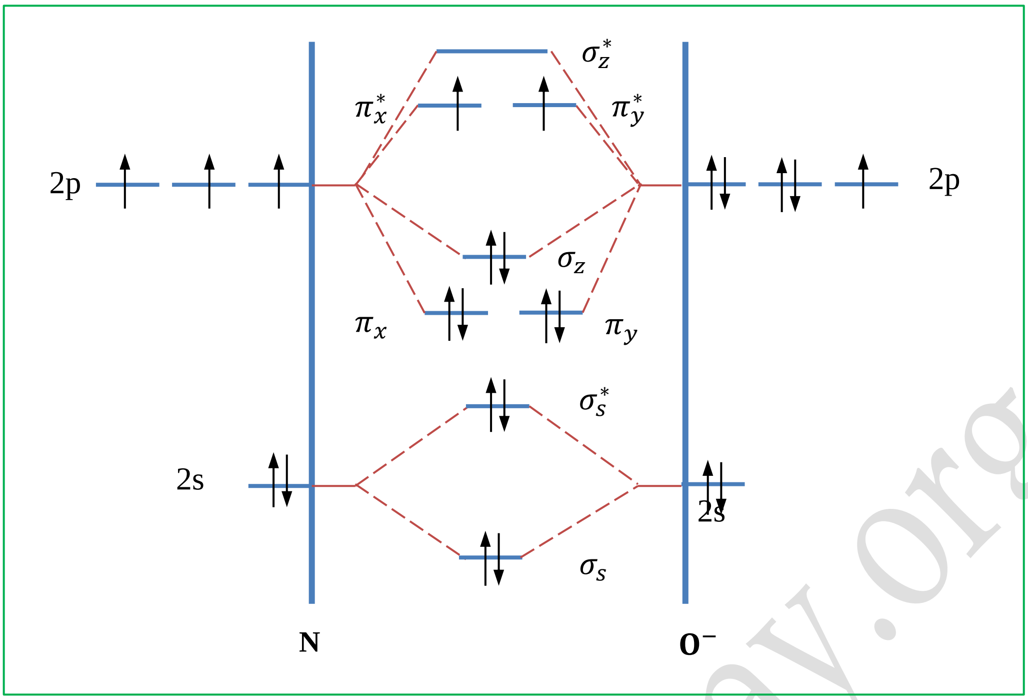
La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^5$



$2s^2$ $2p^3$

Le diagramme des orbitales moléculaires de l'anion NO^-



La configuration électronique est $\sigma_s^2 \sigma_s^{*2} (\pi_x \pi_y)^2 \sigma_z^2 \pi_x{}^* \pi_y{}^*$

2) l'ordre de liaison

$$n(NO^-) = \frac{8-4}{2} = 2\ liaisons \begin{cases} 1\sigma \\ 1\pi \end{cases}$$

3) d'après le diagramme on a 2 électrons célibataires donc la molécule est paramagnétique.
4) l'ordre de liaison dans NO

$$n(\mathrm{NO}) = \frac{n_l - n_a}{2} = \frac{8-3}{2} = 2{,}5\ liaisons \begin{cases} 1\sigma \\ 1{,}5\pi \end{cases}$$

- l'ordre de liaison dans NO^+

$$n(NO^+) = \frac{n_l - n_a}{2} = \frac{8-2}{2} = 3\ liaisons \begin{cases} 1\sigma \\ 2\pi \end{cases}$$

5) on a le classement de l'ordre de liaison est :

$$n(NO^-) < n(\mathrm{NO}) < n(NO^+)$$

La molécule la plus stable est celle du plus grand ordre de liaison.

Le classement selon la force des liaisons $NO^+ > \mathrm{NO} > NO^-$

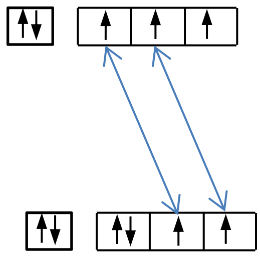
2) structure de Lewis

- NO

la configuration électronique de N(Z=7) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$

La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^3$

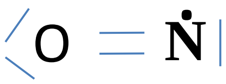


La configuration électronique de O(Z=8) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^4$

La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^4$

- structure de Lewis

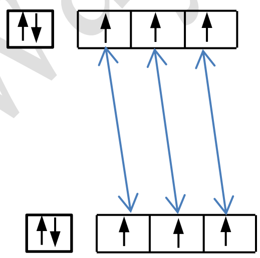


- NO^+

la configuration électronique de N(Z=7) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$

La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^3$



La configuration électronique de O^+(Z=8) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$

La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^3$

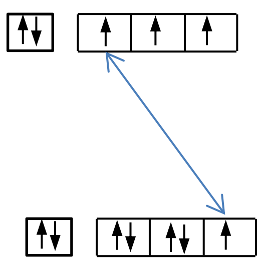
- Structure de Lewis

- NO^-

la configuration électronique de N(Z=7) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$

La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^3$



La configuration électronique de O(Z=8) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^5$

La configuration électronique de la valence

$2s^2 2p^5$

- Structure de Lewis

Série des exercices de l'atomistique en Chimie générale

Exercice 1

1) Préciser le nombre et la nature des constituants de chacun des éléments chimiques suivants et indiquer ceux qui sont des isotopes. ${}^{63}_{29}A^{+}$; ${}^{56}_{28}B$; ${}^{14}_{6}D$; ${}^{60}_{28}E$
2) Calculer la masse atomique théorique de l'élément A en u.m.a et la comparer à la valeur expérimental qui est de 62.9296 u.m.a, conclure
3) Calculer l'énergie de stabilité E du noyau A.
4) Sachant que l'élément A, qui est le cuivre, est un mélange naturel de ${}^{63}Cu$ et ${}^{65}Cu$. Sa masse apparente est de 63.5460 u.m.a , calculer l'abondance relative des deux isotopes.

Données :

- $M({}^{65}Cu) = 64.9278$ u.m.a .
- Le nombre d'Avogadro $N = 6{,}022\ 10^{23}$.
- $m(neutron) = 1{,}6747.10^{-27} Kg; m(proton) = 1{,}6724.10^{-27} Kg;$
- $m(électron) = 9{,}110.10^{-31} Kg.$

Exercice 2

On considère l'ion ${}_{Z}X^{(z-1)+}$ $(Z > 1)$ à l'état fondamental.

1) En appliquant la théorie de Bohr à cet ion,

a) Etablir les expressions, du rayon r_n des orbitales stationnaires et de l'énergie électronique E_n, en fonction de Z,h ε_0,π, e m et de l'entier n.
b) Exprimer r_n en fonction du rayon r_0 (rayon de Bohr) et E_n en fonction de l'énergie E_H de l'atome d'hydrogène à l'état fondamental.

1) L'ionisation de cet ion nécessite une énergie de 54,4 eV. De quel ion s'agit-il ?
2) Calculer la longueur d'onde du rayonnement permettant cette ionisation.
3) Calculer la longueur d'onde de la première raie (λ_{min}) et de la dernière raie (λ_{max}) de chaque série du spectre de l'atome d'hydrogène

Données :

- Energie de l'atome d'hydrogène à l'état fondamental : $E_H = -13{,}6\ eV$,
- Constante de Planck : $h = 6{,}626.10^{-34} J.s$,
- Vitesse de la lumière : $c = 3.10^{8}\ m.s^{-1}$.

Exercice 3

On considère les systèmes suivants :

- Un électron ayant une vitesse $v_1 = (100 \pm 1)10^{6} m/s$.
- Un mobile de masse $m = 1t$ et aminé d'une vitesse $v_2 = (100 \pm 1) Km/h$.

1) En appliquant le premier principe de Louis De Broglie et le principe d'incertitude d'Heisenberg, calculer les longueurs d »onde associées a chacun de ces deux systèmes et l'erreur commise sur leurs positions.
2) Dans quel cas les résultats sont-ils significatifs.

Exercice 4

On considère un électron se trouvant dans la couche $n = 4$.

1) Donner tous les états propres ψ_{min} possibles qui caractérisent cet électron.
2) Donner le nombre maximal d'électrons que peut contenir cette couche.
3)

Corrigé de la série des exercices de l'atomistique en Chimie générale

Exercice 1

1)

Elément	Nombre de protons	Nombre de neutrons	Nombre des électrons	Sa nature
$^{63}_{29}A^{+}$	29	34	28	cation
$^{56}_{28}B$	28	30	28	atome
$^{14}_{6}D$	6	8	28	atome
$^{60}_{28}E$	28	32	28	atome

Rappels :

On représente l'atome par le symbole $^{A}_{Z}X$

- A : le nombre de masse (nombre de nucléon)
- Z : le numéro atomique (nombre de proton)
- N : le nombre de neutrons tel que, $A = Z + N \Rightarrow N = A - Z$

On dit que le nombre d'électrons n_e égale au nombre de protons Z dans le cas d'un atome **neutre**

- Si l'élément est un atome neutre $^{A}_{Z}X \Rightarrow n_e = Z$
- Si l'élément est un cation $^{A}_{Z}X^{+n} \Rightarrow n_e = Z - n$
- Si l'élément est un anion $^{A}_{Z}X^{-n} \Rightarrow n_e = Z + n$

B et E sont des isotopes $^{56}_{28}B, ^{60}_{28}E$ (même Z)

2) La masse théorique d'élément A en u.m.a

On a

La masse de A est : $m(A) = n_n \times m(n) + n_p \times m(p) + n_e \times m(e)$

Avec :

- $m(n) = 1{,}6747.10^{-27}Kg$ masse de neutron
- $m(p) = 1{,}6724.10^{-27}Kg$ masse de proton
- $m(e) = 9{,}110.10^{-31}Kg$ masse d'électron

- n_n : nombre de neutron
- n_p : nombre de proton
- n_e : nombre d'électron

Remarque :

On néglige la masse d'électron devant celle de noyau, car,

$$\frac{m(e)}{m(p)} = \frac{9{,}110.10^{-31}}{1{,}6724.10^{-27}} \simeq 0{,}0003 \quad \Rightarrow \quad m(e) \ll m(p)$$

Par la suite toujours on fait $m(X) = \sum m_p + \sum m_n$

Donc $m(A) = n_n \times m(n) + n_p \times m(p)$

$$^{63}_{29}A$$

$$m(A) = (A - Z) \times m(n) + n_p \times m(p)$$

$$= (63 - 29) \times 1{,}6747.10^{-27} + 29 \times 1{,}6724.10^{-27}\ Kg$$

$$= (34 \times 1{,}6747 + 29 \times 1{,}6724).10^{-27}\ Kg$$

$$= (34 \times 1{,}6747 + 29 \times 1{,}6724)\frac{\cancel{10^{-27}}}{1{,}66.\cancel{10^{-27}}}\ \text{u.m.a}$$

$$1\ \text{u.m.a} = 1{,}66.10^{-27} Kg$$

$$1Kg = \frac{1}{1{,}66.10^{-27}}\ \text{u.m.a}$$

$$\boxed{m(A) = 63{,}51\ \text{u.m.a}}$$

On remarque que la masse calculer $m(A)$ est supérieur à celle calculer théoriquement $(62.9296\ u.m.a)$

3) L'énergie de stabilité E du noyau A (énergie de cohésion ou énergie de liaison des nucléons)

D'après la relation d'Einstein $E = \Delta m C^2$

avec $\Delta m = m(A) - m_{exp}(A)$ est appelé défaut de masse

C : Vitesse de la lumière : $C = 3.10^8\ m.s^{-1}$

Donc $E = \Delta m C^2 = [m(A) - m_{exp}(A)]C^2 = (63{,}51 - 62.9296) \times (3.10^8)^2$

$$E = 0{,}5804 \times 9.10^{16} \times 1{,}66.10^{-27} \times \frac{1}{1{,}6.10^{-19}}$$

$$E = 8337\ MeV$$

$$1\ \text{u.m.a} = 1{,}66.10^{-27} Kg$$

$$1eV = 1{,}6.10^{-19} J$$

$$1\ MeV = 10^6\ eV$$

4) l'abondance relative des deux isotopes du cuivre :

Soient x l'abondance relative du ^{63}Cu

et y l'abondance relative du ^{65}Cu

$$\begin{cases} x + y = 100\% & (1) \\ M(Cu) = \frac{x.M(^{63}Cu) + y.M(^{65}Cu)}{100} & (2) \end{cases}$$

$(1) \;\Rightarrow x = 100 - y \qquad\qquad (3)$

$$(3)\; dans\; (2) \;\Rightarrow M(Cu) = \frac{(100-y)M(^{63}Cu) + y.M(^{65}Cu)}{100}$$

$$\Rightarrow 100.M(Cu) = 100.M(^{63}Cu) - yM(^{63}Cu) + y.M(^{65}Cu)$$

$$\Rightarrow 100.M(Cu) - 100.M(^{63}Cu) = y[M(^{65}Cu) - M(^{63}Cu)]$$

$$y = \frac{100[M(Cu) - M(^{63}Cu)]}{[M(^{65}Cu) - M(^{63}Cu)]}$$

A.N

$$\begin{cases} M(Cu) = 63.5460 \;\; \text{u.m.a} \\ M(^{65}Cu) = 64.9278 \;\; \text{u.m.a} \\ M(^{63}Cu) = 62.9296 \; \text{u.m.a} \end{cases}$$

$$y = \frac{100[63.5460 \;\; -62.9296]}{64.9278-62.9296}$$

$y = 30{,}54\ \%$

On a $x + y = 100\% \;\Rightarrow x = 100 - y \;\; x = 100 - 30{,}54 = 69{,}54$

Finalement $\boxed{\begin{cases} x = 69{,}54\ \% \\ y = 30{,}54\ \% \end{cases}}$

Exercice 2

1) En appliquant la théorie de Bohr à ion $_{z}X^{(z-1)+}$

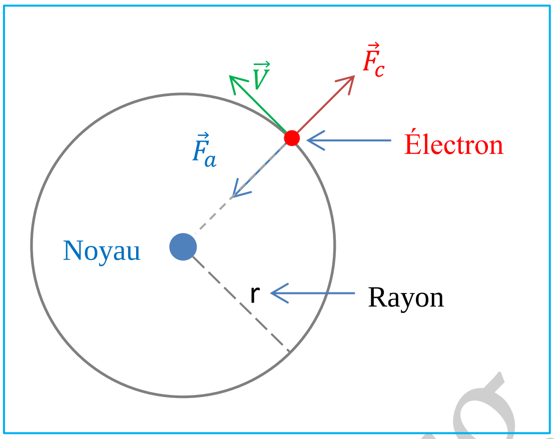
a) L'expression du rayon r_n des orbites stationnaires

L’électron en mouvement circulaire soumis à deux forces $\vec{F}_a$ et $\vec{F}_c$

- ✘ $\vec{F}_a$ (force attractive) : force électrostatique appliquée par le noyau sur l’électron

Par définition $\vec{F}_a = \frac{Q.Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$

- Q : la charge du noyau $Q = Ze$
- Q' : la charge d'électron $Q' = e$
  (e : la charge élémentaire)
- Z : nombre de proton
- e : la charge élémentaire
- $\vec{u}$: Vecteur unitaire



✖ $\vec{F}_c$ (force centrifuge) : est imposée par l'équilibre dynamique

En appliquant le P.D.F sur l'électron on trouve $\vec{F}_c = m_e\vec{\gamma}$

- m_e : Masse d'électron
- $\vec{\gamma}$: L'accélération d'électron
- Le mouvement circulaire $\Rightarrow \gamma = \gamma_n = \frac{V^2}{r}$
- V : vitesse d'électron
- r : le rayon entre l'électron et le noyau

En tenant compte de la nature du mouvement ces deux forces sont de mêmes intensités mais sens opposé donc $|\vec{F}_a| = |\vec{F}_c|$

$$\frac{Q.Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{m_eV^2}{r} \Longrightarrow \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{m_eV^2}{r} \Longrightarrow V^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$$

- La quantification du mouvement cinétique $\vec{j}$

J ne peut prendre que des valeurs entières de la quantité $\frac{h}{2\pi}$

Par définition $\vec{j} = m_e.\vec{V}\wedge\vec{r} = m_e.V.r.sin(\vec{V},\vec{r})$ avec $sin(\vec{V},\vec{r}) = sin\frac{\pi}{2} = 1$

Donc $j = m_eVr$

- La quantification $\Rightarrow\ j = m_eVr = n\frac{h}{2\pi}$

- h : Constante de Planck : $h = 6{,}626.10^{-34}J.s$
- j : module du moment cinétique

on a

$$V^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} \Rightarrow m_eVr^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow (m_eVr)^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}m_er \quad \text{avec } m_eVr = n\frac{h}{2\pi}$$

$$\left(n\frac{h}{2\pi}\right)^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}m_er \Rightarrow n^2\frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}m_er \Rightarrow r = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\frac{n^2}{Z}$$

Comme r est une fonction de n on note r_n

$$r_n = \left(\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\right)\frac{n^2}{Z}$$

On pose $r_0 = a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = 0{,}529.10^{10}m = 0{,}53\ A°$

r_0 ou a_0 est le noyau de Bohr si la valeur que prend r quand $r = 1$et $z = 1$ (atome d'hydrogène)

- Pour l'énergie électronique E_n

L'énergie électronique de l'ion sur son orbital est $E_t = E_c + E_p$

- E_c : énergie cinétique de l'électron $E_c = \frac{1}{2}m_e V^2$
- m_e : masse d'électron
- V : vitesse d'électron
- E_p : énergie potentielle définit par $dE_p = -\vec{F}.\vec{dr}$

Le travail fourni par le système pour ramener l'électron depuis l'infini jusqu'au la distance r du noyau, ce travail est celui de la force $\vec{F}_a$ d'origine électrostatique.

$$dE_p = -\vec{F}.\vec{dr} = -|\vec{F}|.|\vec{dr}|.\cos(\vec{F},\vec{dr}) = -|\vec{F}|.|\vec{dr}| \times (-1)$$

$$E_p = \int_\infty^r dE_p = \int_\infty^r \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\left[\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_\infty^r = -\left[\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \lim_{r\to\infty}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right] = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + 0$$

$$\boxed{E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

D'autre part : $E_c = \frac{1}{2}m_e V^2$ avec $V^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$

Donc $E_c = \frac{1}{2}m_e\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$

D'où $E_t = E_c + E_p = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

$$\boxed{E_t = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

En remplaçant r par son expression $\left(r_n = \left(\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\right)\frac{n^2}{Z}\right)$

$$E_t = E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0} \times \frac{\pi m_e e^2}{h^2\varepsilon_0}\frac{Z}{n^2}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2}\left(\frac{Z}{n}\right)^2}$$

$$E_H = -\frac{m_e e^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^2} = -13{,}6\ eV$$

E_H est appelée énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène, c'est l'énergie qui possède l'électron de H quand ce dernier ne reçoit aucune forme d'énergie externe.

b) r_n en fonction du rayon r_0

On a $r_n = \left(\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\right)\frac{n^2}{Z}$ avec $r_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = 0{,}53\ A°$

Donc $r_n = r_0\ \frac{n^2}{Z}$

- E_n en fonction de l'énergie E_H

On a $E_n = -\frac{m_e e^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^2}\left(\frac{Z}{n}\right)^2$ avec $E_H = -\frac{m_e e^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^2} = -13{,}6\ eV$

E_H est l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène

Donc $E_n = E_H\ \left(\frac{Z}{n}\right)^2$

1) L'ionisation de ${}_zX^{(z-1)+}$ nécessite une énergie de $\Delta E = 54{,}4\ eV$

Donc $E_I = \Delta E = E_\infty - E_1$

$$E_I = E_H\left(\frac{Z}{n_f}\right)^2 - E_H\left(\frac{Z}{n_i}\right)^2 \quad avec \begin{cases} n_i = n_1 = 1 \\ n_f = n_\infty = \infty \end{cases} \Rightarrow E_I = E_H Z^2\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right)^2 \quad \left(\frac{1}{\infty} \to 0\right)$$

$E_I = -E_H Z^2$ avec $E_H = -13{,}6\ eV$

$$Z = \sqrt{\frac{-E_I}{E_H}}$$

$AN = \sqrt{\frac{-54{,}4}{-13{,}6}} = 2$ donc $Z = 2$

Finalement ${}_zX^{(z-1)+} \longrightarrow {}_2X^+$ D'après le tableau périodique il s'agit de ${}_2H^+$

2) Calcule de la longueur d'onde du rayonnement permettant cette ionisation

On a $\Delta E = E_f - E_i = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E}$

- h : Constante de Planck : $h = 6{,}626.10^{-34} J.s$
- C : Vitesse de la lumière : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.
- ν : fréquence de la radiation
- λ : longueur d'onde