Université Sultan Moulay Slimane
FST de Béni Mellal
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2016/2017

Série N°1

MIPC : Algèbre

Exercice 1 :

Ecrire la négation des assertions suivantes :

1) Toutes les voitures rapides sont rouges.
2) Pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe $q \in Q^*$ tel que $0 \leq q \leq \varepsilon$.
3) $\neg P \wedge Q$, $\neg P \vee Q$, $P \vee (Q \wedge R)$, $P \wedge (Q \wedge R)$
   $P \Rightarrow \neg Q$, $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 2 :

Montrer que les assertions $P \wedge \neg Q$ et $\neg(P \Rightarrow Q)$ sont équivalentes.

Exercice 3 :

1) En utilisant un raisonnement par contraposition, montrer que si p^2 est pair alors p est pair, $p \in IN$.
2) En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que $\sqrt{2} \notin Q$.

Exercice 4 :

Démontrer par récurrence :

1) $\forall n \in IN^*$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$
2) $\forall n \in IN : 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 :

Soit $f : E \to F$ une application,
A, B deux parties de E et C, D deux parties de F.
Montrer les propriétés suivantes.

- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(\overline{C}) = \overline{f^{-1}(C)}$ où $\overline{C}$ = Complémentaire de C dans F.
- $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice 6 :

Montrer si les applications suivantes sont injectives ? surjectives ?

$f : IR \to IR$, $x \mapsto x^3 - x$, $g : IR^2 \to IR^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$, $h : IN \times IN \to IN$, $(n,m) \mapsto 2^n 3^m$

Exercice 7 :

Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer les propriétés suivantes :

1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
2) f est surjective $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$
3) f est injective $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$.
4) f est bijective $\Leftrightarrow f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Exercice 8 :

Dans IR^2, on définit la relation R par $(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow y = y'$.
Montrer que R est une relation d'équivalence.

Rappel :

$f : E \to F$

* f injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

* f n'est pas injective $\Leftrightarrow \exists x, x' \in E^2,\ f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$
* f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$
* f bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y$

$f : E \to F \quad , A \subset E$

* $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ f(x) = y$ 4
* $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \ , x \in E$

Exercice 5 :

* Montrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

Soit $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ tel que $f(x) = y$

or $A \subset B$, alors $\exists x \in B$ tel que $f(x) = y$

Alors $y \in f(B)$ Donc $f(A) \subset f(B)$.

* $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

On a : $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$

de même : $B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$

$\Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ ①

Réciproquement, on montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Soit $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$

alors $\exists x \in A$ ou $\exists x \in B$ tel que $f(x) = y$

$\exists x \in A,\ f(x) = y$ ou $\exists x \in B,\ f(x) = y$

Alors $y \in f(A) \cup f(B)$; Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

$\Longrightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

TD N°1 : Algébre I

Exercice 1 :

1) Il existe une voiture rapide, qui n'est pas rouge

2) Il existe ε 0 , pour tout $q \in \mathbb{Q}^{+} / 0 > q > \varepsilon$

3) * $\neg(\neg P \wedge Q) = \neg(\neg P) \vee \neg Q = P \vee \neg Q$
* $\neg(\neg P \vee Q) = \neg(\neg P) \wedge \neg Q = P \wedge \neg Q$
* $\neg(P \vee (Q \wedge R)) = \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
* $\overline{(P \wedge (Q \wedge R))} = \overline{(P \wedge Q \wedge R)} = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R}.$
* $\neg(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \text{ ou } \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge \neg(\neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge Q$

* $\neg(P \Leftrightarrow Q)$ c-à-d $\neg(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

Exercice 2 :

* 1ère méthode : table de vérité :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$P \wedge \neg Q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow Q)$

* 2ème méthode :

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ alors $\neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

Donc $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

Exercice 3 :

$(P \Rightarrow Q \rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P)$

1) On va utiliser, le raisonnement par contraposition:
Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que p est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $p = 2k+1$, et on va montrer que p^2 est impair.

On a :

$p = 2k+1$ et on a
$$p^2 = (2k+1)^2$$
$$p^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$
$$= 2k' + 1 \quad \text{on pose } (k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z})$$

Donc p^2 est impair

cette assertion est vraie : (p est impair $\Rightarrow$ p^2 est impair)

Donc par la démonstration contraposée :

p^2 est pair $\Rightarrow$ p est pair

2) On montre que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

on suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $PGCD = 1$ (Plus grand diviseur commun)

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

p^2 est pair $\Rightarrow p$ est pair

$p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \frac{4k^2}{q^2} = 2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 = 2\alpha$

et $q = 2\beta$

Ainsi $\begin{cases} p = 2k \\ q = 2\beta \end{cases} \Rightarrow PGCD(p, q) = 2$

Il ressort de notre demonstration une contradiction de l'hypothése posée d'où $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 4 :

① $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Soit $p(n)$, la proposition :

$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (vraie)

On suppose que $p(n)$ est vraie et on montre que $p(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(2+n)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

② $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pour $n = 0$: $0^2 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} \Rightarrow 0 = 0$

ce qui est vrai

On suppose que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

et montrons que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \cancel{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

* Montrons que : $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$

Soit $y \in f(A\cap B) \Leftrightarrow \exists x \in A\cap B$ tq $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \in A$ et $\exists x \in B$ tq $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \in A$ tq: $f(x) = y$ et $\exists x \in B$ tq: $f(x) = y$

$\Leftrightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B)$

$\Leftrightarrow y \in f(A)\cap f(B)$

Donc : $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$

* 2ème méthode : On sait que $A\cap B \subset A \Rightarrow f(A\cap B) \subset f(A)$

de même $A\cap B \subset B \Rightarrow f(A\cap B) \subset f(B)$

Donc $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$

Calcule de f^{-1} d'un ensemble :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

* $f^{-1}(\{-1\}) \Rightarrow f(x) \in \{-1\}$

c-à-d $f(x) = -1 \Rightarrow x^2 = -1$

$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$

* $f^{-1}([0,4]) \Rightarrow f(x) \in [0,4]$

c-à-d $x^2 \in [0,4]$

alors $x^2 \leqslant 4$

donc $|x| \leqslant 2$

$\Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$

$f^{-1}([0,4]) = [-2, 2]$

hors TD

* On montre que $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

Soit $x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$, $x \in E$

or $C \subset D$ alors $f(x) \subset D$, $x \in E$

Donc $x \in f^{-1}(D)$, D'où $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

On sait que :

$C \subset C \cup D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C \cup D)$

de même $D \subset (C \cup D) \Rightarrow f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

Alors $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$ ①

Réciproquement : $x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$

$\Rightarrow f(x) \in C$ ou $f(x) \in D$

Alors $x \in f^{-1}(C)$ ou $x \in f^{-1}(D)$

Donc $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

D'où $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ ②

D'après ① et ② on a : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Exercice 6 :

$$* \quad f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3 - x$$

- $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \quad f(0) = f(1) = 0$

  or $0 \neq 1$ Donc f n'est pas injective

- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$

  $x^3 - x = y$

  Alors f est sorjective

$$* \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow (x+y, x-y)$$

$\forall (x,y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \; g(x,y) = g(x', y')$
$\Rightarrow \; (x, y) = (x, y')$

$$g(x,y) = g(x', y')$$
$$(x+y, x-y) = (x'+y', x'-y')$$

Alors $\begin{cases} x + y = x' + y' \\ x - y = x' - y' \end{cases}$

En faisant • la somme : $2x = 2x' \Rightarrow x' = x$

• La différence : $2y = 2y' \Rightarrow y' = y$

Donc les couples (x, y) et (x', y') sont égaux.

• Montrons que g est surjective.

$\forall (X,Y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=(X,Y)$

$$g(x,y)=(X,Y)$$

C-à-d $(x+y,\ x-y)=(X,Y)$

$$\begin{cases} x+y=X \\ x-y=Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{X+Y}{2} \\ y=\dfrac{X-Y}{2} \end{cases}$$

Alors g est surjective.

$\Rightarrow$ g est injective et surjective donc elle est bijective

$$* \quad h : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(n,m) \longmapsto 2^n 3^m$$

• Soient $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ et $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

Supposons que $h(n,m)=h(p,q)$ et vérifions si $(n,m)=(p,q)$

$h(n,m)=h(p,q) \Rightarrow 2^n 3^m = 2^p 3^q$

$$2^{n-p}=3^{q-m}$$

Cela est vrai si $n-p=0$ et $q-m=0$

donc $n=p$ et $q=m$ alors $(n,m)=(p,q)$

d'où h est injective.

• $\forall y\in\mathbb{N},\ \exists (n,m)\in\mathbb{N}^2$ tel que $h(n,m)=y$

$2^n 3^m \neq 5$, 5 n'appartient pas à l'image

$\Rightarrow$ h n'est pas surjective

Exercice 7 :

$f : E \to F$, $A \subset E$, $B \subset F$

1) Soit $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$, tq: $y = f(x)$

or $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B$

$\Rightarrow y = f(x) \in B$

d'autre part : $x \in f^{-1}(B) \subset E \Rightarrow f(x) \in f(E)$

$\Rightarrow y \in f(E)$

$$\begin{cases} y \in B \\ y \in f(E) \end{cases} \Rightarrow y \in B \cap f(E)$$

Inversement: $B \cap f(E) \subset f(f^{-1}(B))$? :

Soit $y \in B \cap f(E)$

$\Rightarrow y \in B$ et $y \in f(E)$

$\Rightarrow y \in B$ et $y \in f(x)$, $x \in E$

Donc $f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(f^{-1}(B))$

2) f est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$.

$\Leftrightarrow f(E) \cap B = F \cap B = B$

(car $f(E) \cap B = f(f^{-1}(B))$) $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$

3) f est injective $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$

$\Rightarrow$ Si f est injective,

d'aprés Ex_5 on a : $A \subset f^{-1}(f(A))$

Soit $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow \exists a \in A$ tq $f(x) = f(a)$

$\Rightarrow x = a$ (car f injective)

$\Rightarrow x \in A$

Donc par suite $\cancel{A} \cancel{\in} f^{-1}(f(A)) \subset A$

Donc $A = f^{-1}(f(A))$

$\Leftarrow$ Supposons que $f^{-1}(f(A)) = A$ et montrons que f est injective :

Soient, $x, y \in E$, tq : $f(x) = f(y)$.

Posons $A = \{x\}$, on a : $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(x)) = \{x\}$

donc $f^{-1}(f(x)) = x$

de même si $A = \{y\} \Rightarrow f^{-1}(f(\{y\})) = \{y\}$

$\Rightarrow f^{-1}(f(y)) = y$

or $f(x) = f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y))$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow f$ est injective

4) f est bijective $\Leftrightarrow f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

$\Rightarrow$ Supposons que f est bijective et montrons que $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

- $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$:

Soit $y \in f(\bar{A}) \Rightarrow \exists x \in \bar{A} = C_E^A$ tq : $y = f(x)$

$\Rightarrow \exists x \in E$ et $x \notin A$ tq : $y = f(x)$

or : $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$ Car :

Si $f(x) \in f(A) \Rightarrow \exists a \in A$ tq : $f(x) = f(a)$

$\Rightarrow x = a$ (f injective)

$\Rightarrow x \in A$ absurde

Donc $y = f(x) \notin f(A) \Rightarrow y \in C_F^{f(A)} = \overline{f(A)}$

Par suite $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Inversement : Soit $y \in \overline{f(A)} = C_F^{f(A)}$

$\Rightarrow y \in F$ et $y \notin f(A)$

or $y \in F$ et f est surjective $\Rightarrow \exists x \in E$

tq : $y = f(x) \Rightarrow f(x) \notin f(A)$

$\Rightarrow x \notin A$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(\bar{A})$

$\Rightarrow \overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$

$\Leftarrow$ si $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$. Montrons que f est bijective.

- Surjection : Motrons que $f(E) = F$

si $A = \emptyset \Rightarrow f(\bar{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)}$

$\Rightarrow f(E) = \bar{\emptyset} = F$

- Injection : D'aprés ③ il suffit de montrer que $f^{-1}(f(A)) = A$.

on a : $f(\bar{A}) = \overline{f(A)} \Rightarrow \overline{f(\bar{A})} = \overline{\overline{f(A)}}$

$\Rightarrow \overline{f(\bar{A})} = f(A)$

$\Rightarrow A = f^{-1}(\overline{f(\bar{A})}) \Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$

Exercice 8 :

$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow y = y'$

* $\mathcal{R}$ est reflexive car :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \mathcal{R} (x, y)$ (car $y = y$)

* $\mathcal{R}$ est symétrique. car :

si $(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Rightarrow y = y' \Rightarrow y' = y \Rightarrow (x', y') \mathcal{R} (x, y)$

- $\mathcal{R}$ est transitive :

si $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ et $(x', y') \mathcal{R} (x'', y'')$

$\Rightarrow y = y'$ et $y' = y'' \Rightarrow (x, y) \mathcal{R} (x'', y'')$