

Béton Armé

Université Hassan II Ain Chock

Fac. Sciences Casablanca

LP : TMBTP

Pr. : A. AKEF

Chapitre I

INTRODUCTION EN BETON ARME

I Généralités

1) Béton

On appelle béton : le mélange dans des proportions convenables des éléments suivants :

-  liant hydraulique (ciment)
-  granulats (agrégats) (sable, gravier,.....)
-  l'eau

2) Béton Armé

On appelle béton armé le matériau obtenu en ajoutant au béton des barres en acier. Ces barres sont généralement appelées armatures.

3) Remarques

Dans l'association béton + acier, le béton résiste aux efforts de compression et l'acier résiste aux efforts de traction et éventuellement aux efforts de compression si le béton ne suffit pas pour prendre tous les efforts de compression qui existent.

Béton	➔	Résistance à la compression : 20 MPa à 200MPa
		Résistance à la traction = 2 MPa à 5MPa
		La charge est de 25000 N/m ³ .
Acier	➔	Traction ou compression (200 MPa à 500 MPa)

Une construction sera appelée construction en béton armé si les deux matériaux participent à la résistance de l'ensemble.

II Les avantages et les inconvénients du BA

1) Les avantages

- L'intérêt économique
- La souplesse d'utilisation
- Économie d'entretien
- Résistance au feu
- Résistance aux efforts accidentels
- Durabilité

2) Les inconvénients



Le poids



L'exécution



Brutalité des accidents



Difficulté de modification d'un ouvrage déjà réalisé

Chapitre II

REGLEMENTATION ACTIONS ET SOLLICITATIONS

I La sécurité

1) Définition

La sécurité est définie comme étant l'absence de risque dans le domaine de construction; cela implique la stabilité, la durabilité et l'aptitude à l'emploi. La sécurité absolue n'existe pas; il faut accepter une probabilité non négligeable d'accident.

2) L'ouvrage et la sécurité

Le dimensionnement des ouvrages et la vérification de la sécurité ne peuvent pas se faire de manière empirique. Ils sont basés sur des règles de calcul bien précises.

II Règlement classique CCBA

Le règlement CCBA, est un ensemble de formules sommaires de 1968 permettant de calculer le moment de flexion dans divers cas de figures.

Ce règlement utilise la méthode des contraintes admissibles qui consiste à vérifier que les contraintes calculées par la R.D.M en tout point d'une structure sont inférieure à une contrainte admissible obtenue en divisant la contrainte de ruine du matériau par un coefficient de sécurité k fixé à l'avance.

Acier

$$\sigma < \sigma_s = \frac{\sigma_e}{k}$$

Béton

$$\sigma < \sigma_s = \frac{\sigma_r}{k}$$

III Théorie probabiliste de la sécurité

1) Seuil de probabilité

Les ingénieurs ont défini la sécurité par un seuil de probabilité; un ouvrage sera acceptable si la probabilité de ruine reste inférieure à une probabilité fixée à l'avance. Cette valeur varie en fonction de la durée de vie de la construction, du risque et du coût.

2) Limite de la méthode

Cette méthode a de multiple difficulté:

- On ne peut pas définir la probabilité de ruine et son évolution dans le temps.
- On ne peut pas recenser tous les facteurs aléatoires d'une incertitude.

IV États limites:(BAEL) 83-91-99;Eurocode2

1) Définition

Par définition, un état limite est celui qui satisfait strictement aux conditions prévues (la stabilité, la résistance, la durabilité et les déformations non nuisibles pour satisfaire les fonctions techniques d'utilisations des structures), sous l'effet des actions (forces, moments ou couples) qui agissent sur la construction ou l'un de ses éléments.

2) Exemple

Résister aux sollicitations imposées, à l'effet des intempéries, des dilatations, des retraits, etc.

3) Remarque

C'est une théorie semi probabiliste. Elle consiste à :

- Définir les phénomènes que l'on veut éviter (l'état limite), ces phénomènes sont :
 - Ouverture des fissures soit par :
 - a- Compression successive dans le béton.
 - b- Traction successive dans l'acier.
 - Déformation importante dans l'ensemble.
- Estimer la gravité des risques liés à ces phénomènes (on distingue les états limites ultimes et les états limites de services).
- Dimensionner les éléments de la construction de telle manière que la probabilité d'atteindre l'un de ces phénomènes reste faible.

4) État limite ultime (ELU)

a- Définition

Il correspond à la valeur maximale de la capacité portante de la construction et dont le déplacement entraîne la ruine de la construction.

b- Différentes ELU

a- État limite ultime d'équilibre statique de l'ouvrage : stabilité des constructions. C'est la perte de la stabilité d'une partie ou de l'ensemble de la construction (non glissement, non renversement).

b- État limite ultime de résistance de l'un des matériaux de construction : c'est la perte de résistance soit du béton (non rupture par écrasement) soit de l'acier (non rupture par allongement excessif).

c- État limite ultime de stabilité de forme (flambement) : pas d'instabilité. Les pièces élancées soumises à des efforts de compression subissent des déformations importantes et deviennent instable.

Exemple : pour un poteau B.A., non risque de flambement.

5) État limite de service (ELS)

a- Définition

Il constitue des limites au-delà desquelles les conditions normales d'exploitation ne sont plus satisfaites sans qu'il y'ait ruine. Il concerne les conditions d'utilisation des ouvrages et la durabilité

b- Différentes ELS

a- État limite de service de compression de béton : contrainte bornée par le règlement. Cette limitation a pour but d'empêcher la formation des fissures.

b- État limite de service d'ouverture des fissures : durabilité des ouvrages. Il consiste à assurer que les armatures sont convenablement disposées dans la section et les contraintes ne dépassent pas la valeur limite.

Exemple : (non corrosion des aciers).

c- État limite de service de déformation : limitation des désordre. Il consiste à vérifier que les déformations sont inférieures à des déformations limites.

Exemple : flèche des planches limitée pour réduire les désordres de fissuration des cloisons ou des revêtements scellés.

6) Les différents états limites en béton armé (Eurocode2)

- ELU d'équilibre statique: l'ensemble doit rester en équilibre lorsque des charges sont appliquées.
- ELU de résistance des matériaux: le béton et l'acier ne doivent pas se rompre.
- ELU de stabilité de forme: Les éléments ne doivent pas flamber.
- ELS de durabilité : Limitation de l'ouverture de fissure.
- ELS de conditions d'exploitation : Limitation des flèches.

Exercice 1 :

Indiquer dans les différents cas ci-dessous, quel est l'état limite à considérer :

- a - Équilibre d'un mur de soutènement.
- b - Cas de fissuration.
- c - Cas de limitation des flèches.
- d - Équilibre d'un poteau élancé.
- e - Contrainte de compression du béton imposée.

V Les actions et les sollicitations

1) Les actions

a- Définition

Les actions sont des forces ou des couples directement appliqués sur la construction. Elles peuvent aussi provenir de déformations imposées à la structure tels que dilatations, tassements d'appuis, retraits, etc.

Les valeurs de chacune de ces actions ont un caractère **nominal** c'est à dire qu'elles sont connues dès le départ ou données par des textes réglementaires ou contractuels.

On distingue trois types d'actions :

-  actions permanentes.
-  actions variables (d'exploitations).
-  actions accidentelles.

b- Les actions permanentes (G)

Qu'est-ce que les actions permanentes?

Ce sont des actions continues dont l'intensité est constante ou très peu variable dans le temps.

Les types d'actions permanentes

- les charges amenées par **le poids propre de la structure.**
- les charges amenées par **les poids des autres éléments** de la construction.
- les **poussées des terres** et les **pressions éventuelles de liquides.**
- les actions dues aux **actions différées (indépendantes des charges).**

c- Les actions variables (Q)

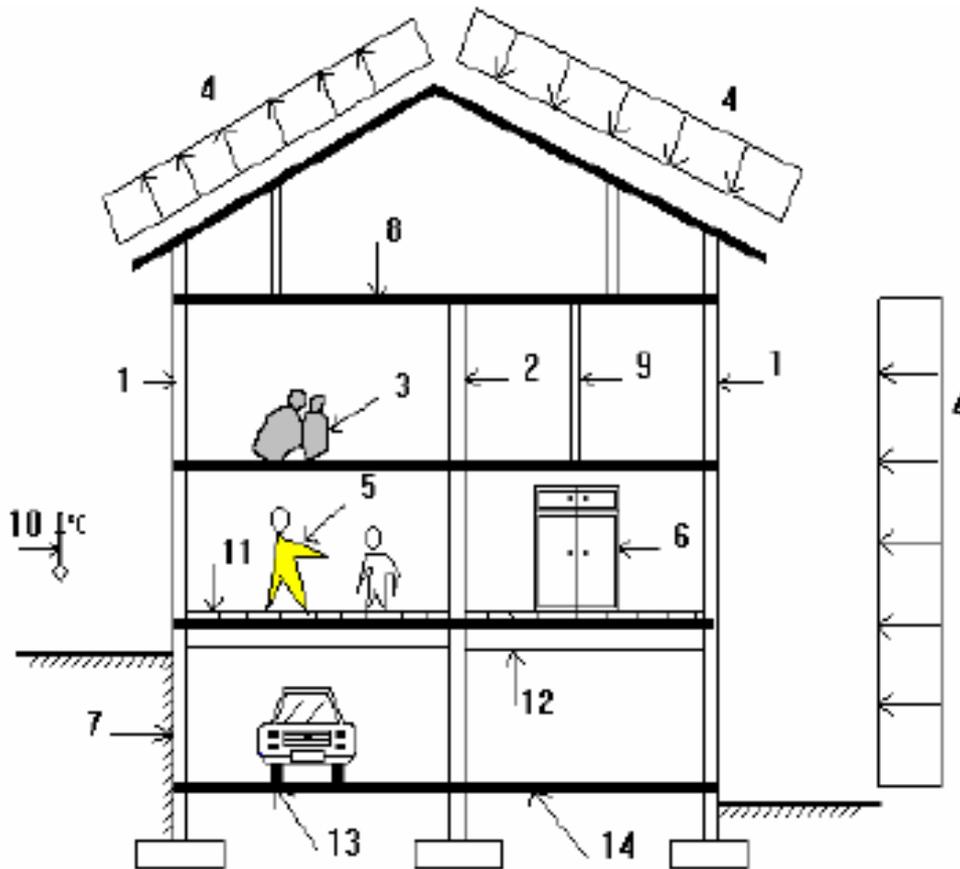
Qu'est-ce que les actions variables?

Ce sont des actions dont l'intensité varie fréquemment et d'une façon importante dans le temps. La durée d'application est très faible par rapport aux durées de vie de constructions. Les valeurs de ces charges sont fixées par le règlement, en fonction des conditions d'exploitation de la construction.

Les types d'actions variables

- les **charges d'exploitation** (Q_B en bâtiment et Q_r pour les ponts).
- les **charges climatiques** (W pour le vent et S_n pour la neige).
- les **charges amenées en cours d'exécution**.
- les **actions de la température** (T variation uniforme et $\Delta\theta$ gradient thermique).
- les **actions accidentelles** (F_A).

d- Exemple



Légende

- 1 - Mur de façade
- 2 - Mur de refend
- 3 - Charge concentrée
- 4 - Action du vent
- 5 - Personnes
- 6 - Meuble
- 7 - Poussée des terres
- 8 - Plancher en béton armé
- 9 - Cloisons
- 10 - Température
- 11 - Revêtement de plancher
- 12 - Poutre en béton armé
- 13 - Automobile
- 14 - Sous-pression d'eau

Les actions permanentes

- les charges amenées par le poids propre de la structure: ce sont, dans notre exemple, les charges 1 et 2 dues au murs de façades et refends ainsi que celles amenées par les planchers et les poutres en béton armé 8 et 12.
- les charges amenées par les poids des autres éléments de la construction: ce sont les charges amenées par les cloisons 9, les revêtements de plancher 11, la couverture et les équipements fixes.
- les poussées des terres 7 et les pressions éventuelles de liquides telles que les sous pressions d'eaux dues aux nappes phréatiques 14.
- les actions dues aux actions différées comme par exemple le raccourcissement par retrait du béton dans le plancher en béton armé 8.

Les actions variables

- les charges d'exploitation comme les charges concentrées 3, les personnes 5, les meubles 6 et l'automobile 13.
- les charges climatiques fixées par des textes réglementaires telles le vent 4 ou éventuellement la neige.
- les charges amenées en cours d'exécution qui proviennent des équipements de chantier non visibles sur notre exemple.
- les actions de la température dues aux variations d'ambiance en cours de journée 10.

2) Les sollicitations

Ce sont les effort normaux et tranchants et les moments fléchissant et de torsions qui sont calculés à partir des actions en utilisant les procédés de la R.D.M.

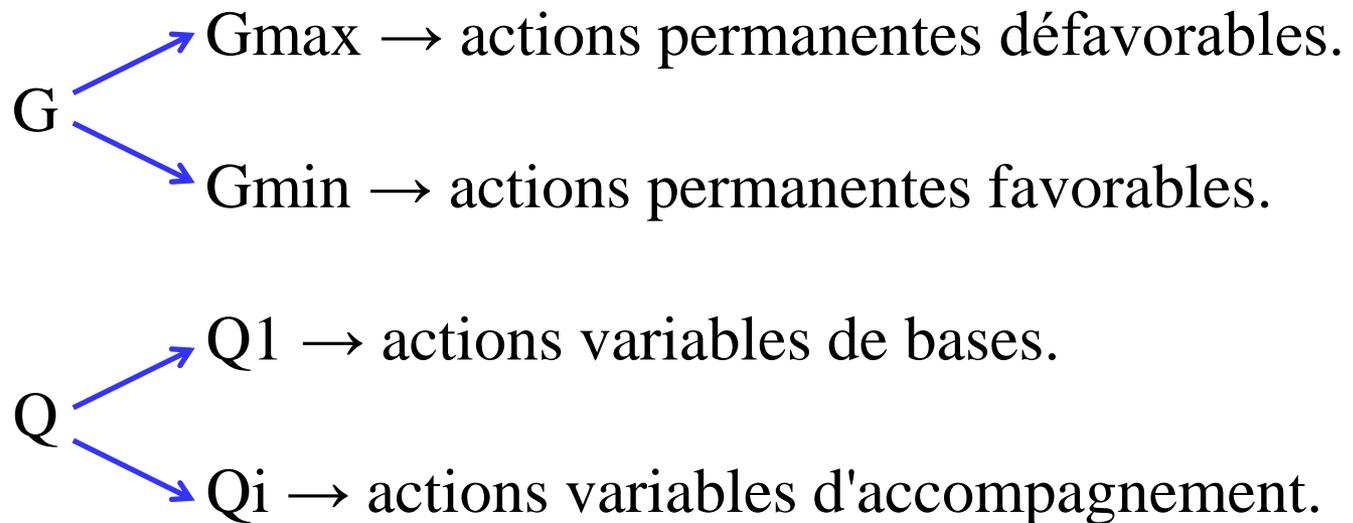
3) Les combinaison d'actions

En fonction des situations qu'une construction va connaître, nous allons être obligé de superposer les effets de plusieurs actions. Pour cela :

- ➔ nous affecterons à chaque type d'actions, un coefficient de sécurité partiel,
- ➔ nous combinerons les actions obtenues (principe de superposition des effets),
- ➔ nous déterminerons la ou les combinaisons qui engendrent les sollicitations les plus défavorables dans les éléments de la construction.

a - Combinaison d'actions et notations

Pour déterminer les sollicitations, on utilise les combinaisons d'actions avec les notations suivantes :



b- États limites ultimes (E.L.U.)

$$1,35.G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q_1} \cdot Q_1 + \sum_{i=1}^n 1,3 \gamma_{Q_i} \cdot Q_i$$

γ_{Q_1} : coefficient multiplicateur = 1,5 dans le cas général.
Avec les actions accidentelles FA nous avons :

$$G_{\max} + G_{\min} + \sum_{i=1}^n \gamma_{Q_i} \cdot Q_i + F_A$$

Les situations accidentelles ont une faible probabilité de se produire.
Généralement la combinaison des charges s'écrit :

$$1,35.G + 1,5.Q$$

c- États limites de services (E.L.S.)

$$G_{\max} + G_{\min} + Q_1 + \sum_{i=1}^n \gamma_{Q_i} \cdot Q_i$$

γ_{Q_1} : coefficient multiplicateur

Généralement la combinaison s'écrit :

$$G + Q$$

Exercice 2 :

Considérons une poutre en béton armé posée sur deux appuis simples A et B. Sa section est de 20 cm x 50 cm et sa portée est de 8,00 m. Elle supporte une charge d'exploitation uniformément répartie de 12000 N/m.

Déterminer :

- 1) Les actions aux appuis R_A et R_B .
- 2) Les efforts tranchants $T(x)$, T_A et T_B pour déterminer les cadres et étriers.
- 3) Les moments de flexion $M(x)$ et M_{\max} pour déterminer les sections d'aciers tendus.

Chapitre III

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

I Le moment statique

1) Théorème

Le moment statique d'une surface plane par rapport à un axe passant dans son plan est égale au produit de l'aire de cette surface par la distance de son centre de gravité (ou centre de surface) à l'axe considéré :

$$M_S / O_Z = A \cdot Y_G$$

$$M_S / O_Y = A \cdot Z_G$$

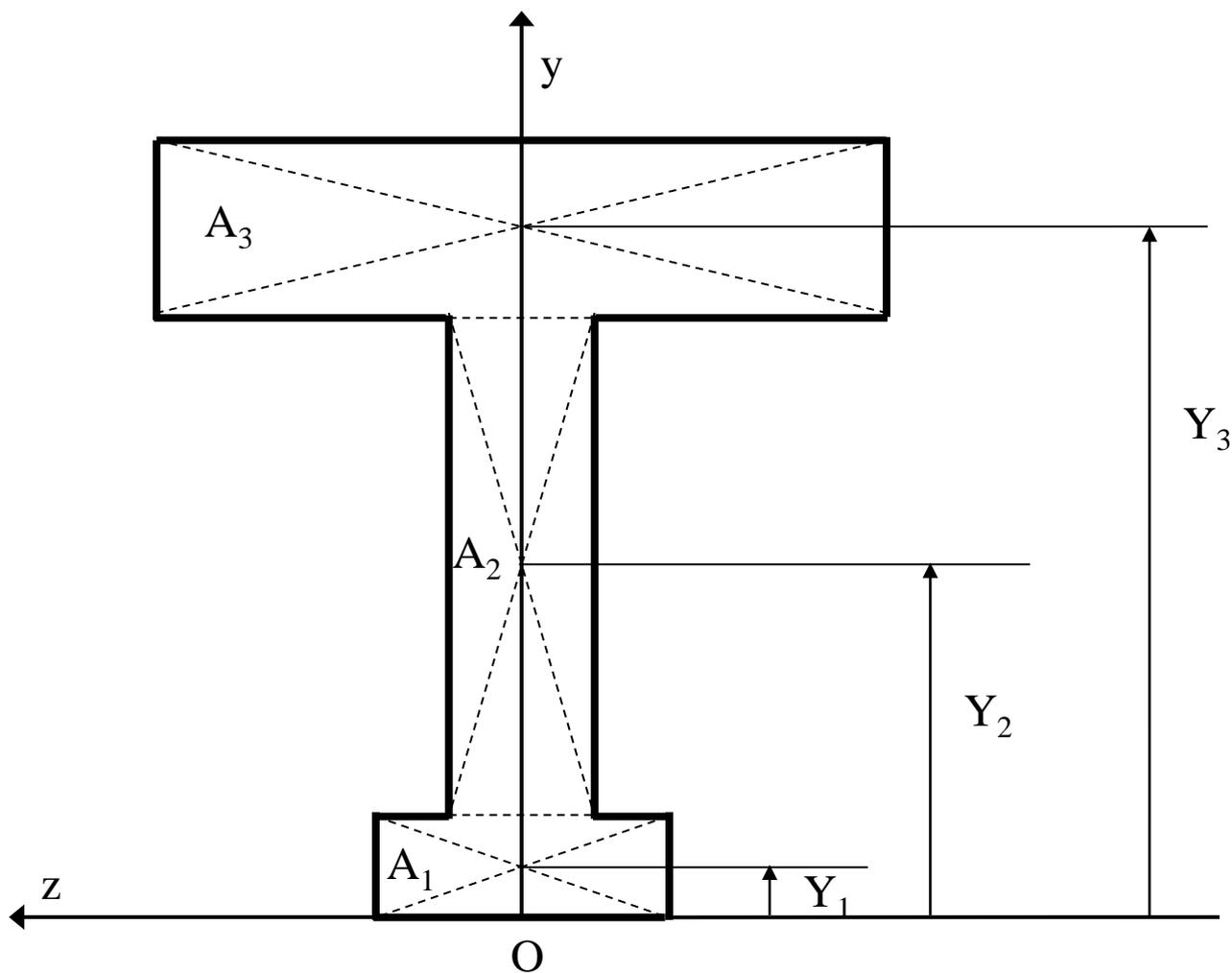
2) Propriétés

Si l'axe O_Z passe par le centre de gravité $M_S / O_Z = 0$.

Si l'axe O_Y passe par le centre de gravité $M_S / O_Y = 0$.

3) Exemple

Considérons une section en I.



Aire élémentaire	Distance du CdG à l'axe O_Z	Produit
A_1	Y_1	$A_1 \cdot Y_1$
A_2	Y_2	$A_2 \cdot Y_2$
A_3	Y_3	$A_3 \cdot Y_3$

$$M_{S/Oz} = \sum_{i=1}^3 A_i \cdot Y_i = A \cdot Y_G$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

On en déduit :

$$Y_G = \frac{M_{S/Oz}}{A}$$

II Le moment quadratique

1) Définition

Le moment quadratique d'un élément de surface plane par rapport à un axe O_Z , situé dans son plan, est égale au produit de l'aire dA de cette élément par le carré de sa distance à l'axe considéré O_Z .

Le moment quadratique de la surface A contenant tous les éléments d'aire dA , par rapport à l'axe OZ , est égale à la somme des moments quadratiques élémentaires :

$$I_{Oz} = \int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} y^2 dA$$

2) Exemple

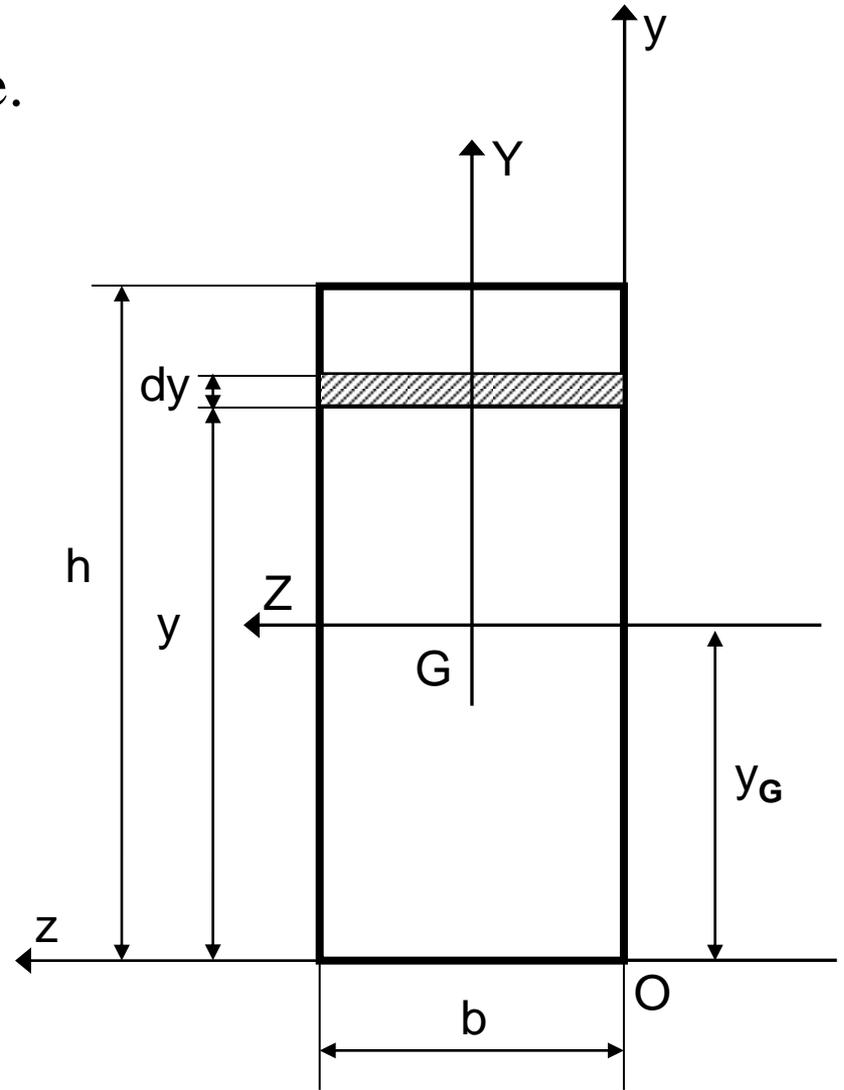
Cas d'une section rectangulaire.

$$I_{Oz} = \int_0^h y^2 dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy$$

$$I_{Oz} = \frac{bh^3}{3}$$

de même :

$$I_{Oy} = \frac{hb^3}{3}$$



3) Théorème de Huyghens

Le moment quadratique d'une surface plane A par rapport à un axe O_Z , situé dans son plan, est égale à la somme :

- du moment quadratique I_{GZ} de cette surface par rapport à l'axe G_Z , parallèle à O_Z et passant par le centre de gravité G.
- du produit de l'aire de la surface A par le carré de la distance y_G du centre de gravité à l'axe O_Z .

$$I_{Oz} = I_{Gz} + A \cdot y_G^2$$

Application à la section rectangulaire

$$I_{Gz} = I_{Oz} - A \cdot y_G^2 \Rightarrow I_{Gz} = \frac{bh^3}{3} - bh \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

d'où :

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

4) Rayon de giration

Le rayon de giration est tel que :

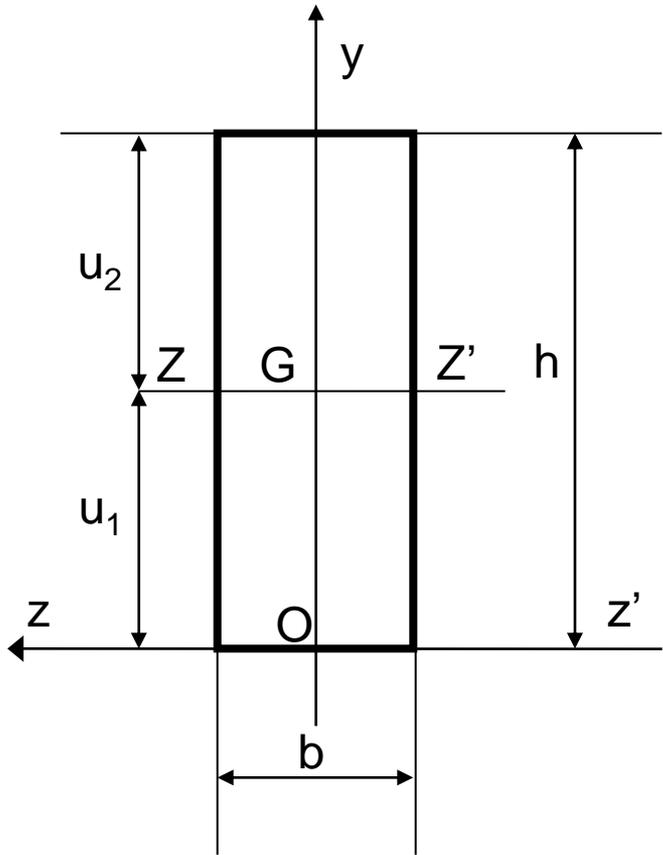
$$r_{z'z}^2 = \frac{I_{z'z} \text{ (moment quadratique)}}{A \text{ (aire de la section)}}$$

soit

$$r_{z'z} = \sqrt{\frac{I_{z'z}}{A}}$$

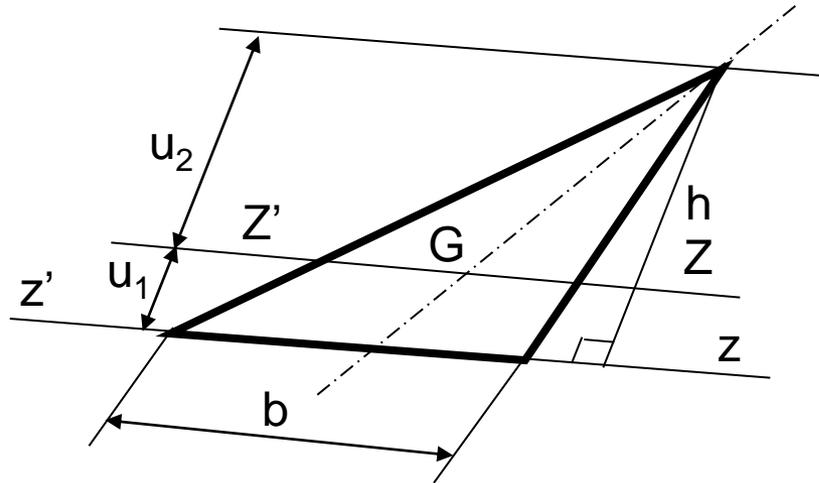
III Caractéristiques des sections courantes

1) Rectangle



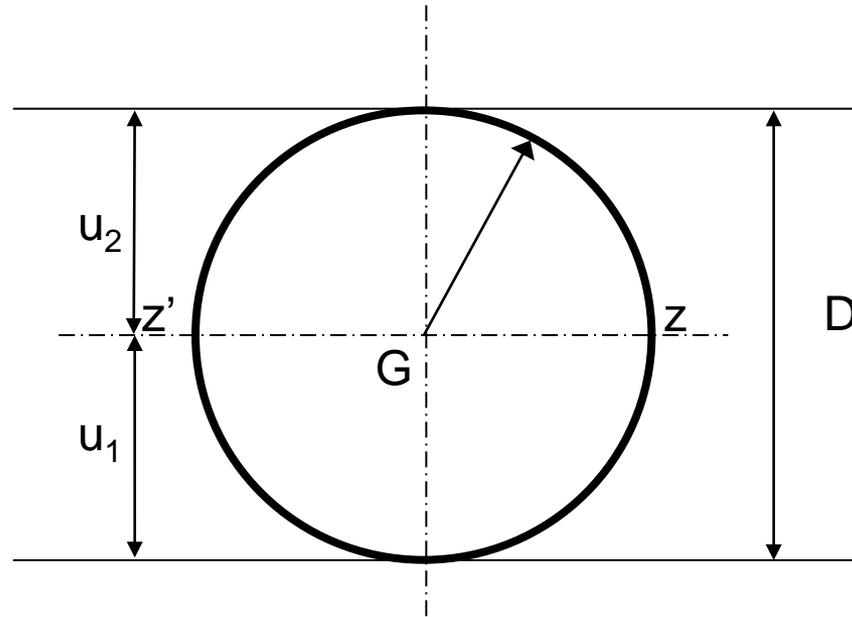
Aire	$b.h$
Centre de gravité	$u_1 = u_2 = h/2$
Moment quadratique	$I_{zz'} = \frac{bh^3}{3}$ $I_{ZZ'} = \frac{bh^3}{12}$

2) Triangle



Aire	$(b \cdot h)/2$
Centre de gravité	$u_1 = h/3$; $u_2 = 2h/3$
Moment quadratique	$I_{z'z} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{Z'Z} = \frac{bh^3}{36}$

3) Disque



Aire	$\pi D^2/4$
Centre de gravité	$u_1 = u_2 = D/2$
Moment quadratique	$I_{Z'Z} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$

Exercice 3 :

En utilisant les notations précédentes :

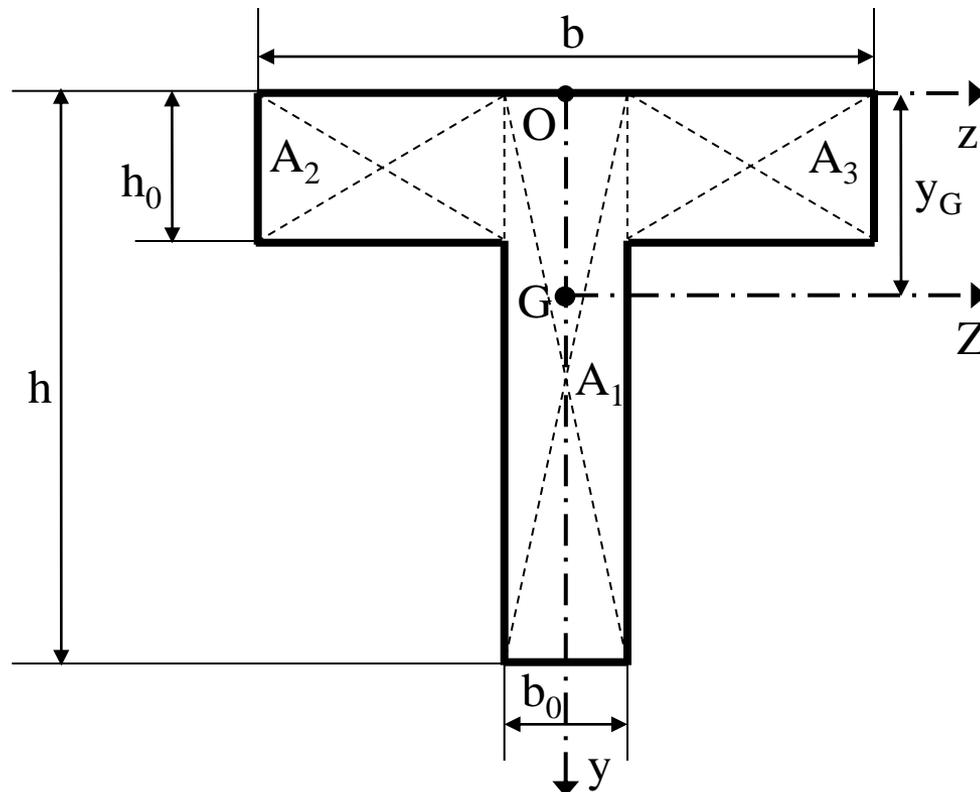
A , u_1 , I_{GZ} et I_{Oz} .

- 1) Surface rectangulaire avec $b = 6$ cm et $h = 40$ cm.
- 2) Surface triangulaire avec $b = 32$ cm et $h = 40$ cm.
- 3) Surface rectangulaire avec $b = 40$ cm et $h = 16$ cm.
- 4) Disque de rayon $14,28$ cm.

IV Section en forme de T

Établissons les formules pour calculer la position du centre de gravité et le moment quadratique d'une section homogène en T dans le cas où le centre de gravité est en dehors de la table.

1) Calcul de y_G (u_2)



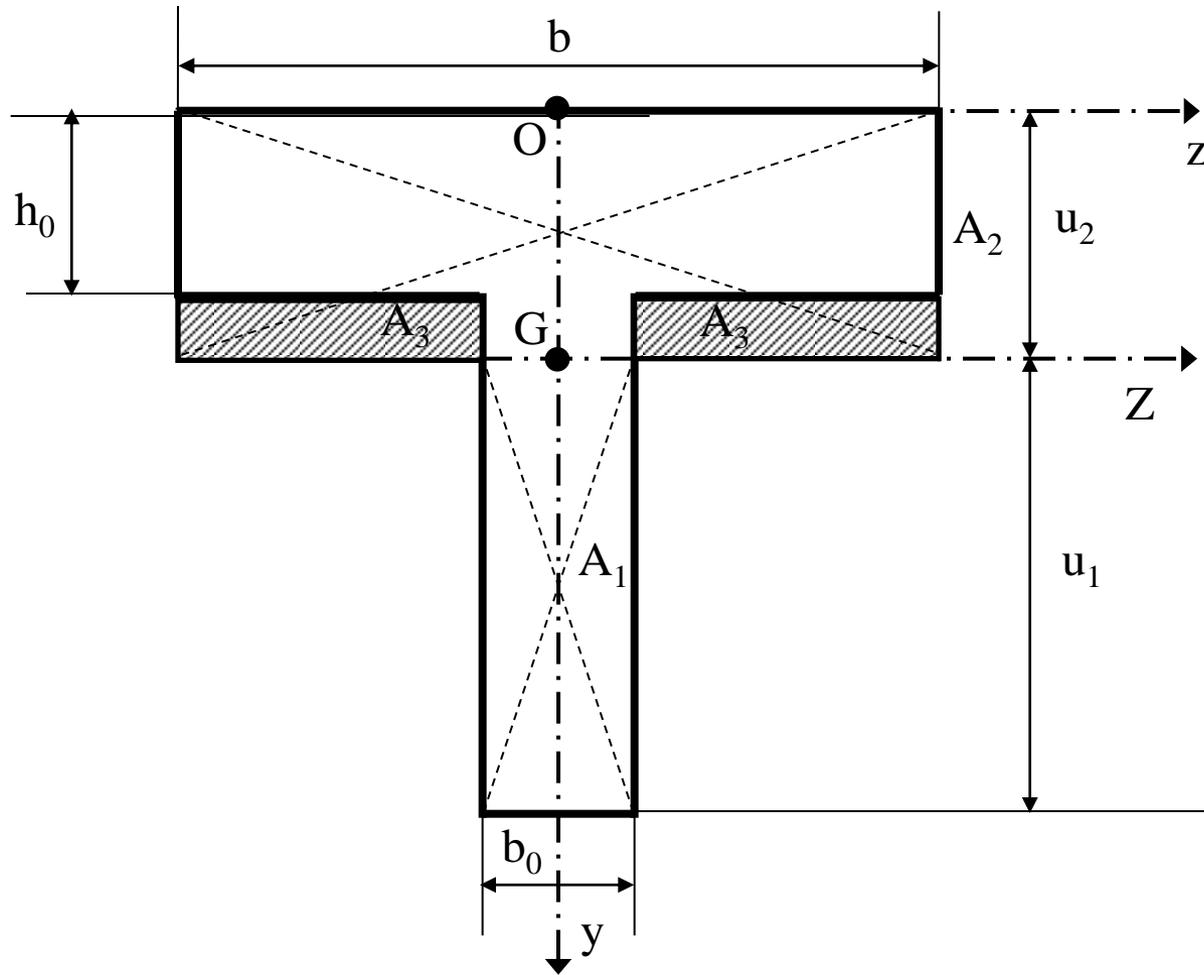
$$\begin{array}{lll}
 A_1 = b_0 \cdot h & y_1 = \frac{h}{2} & M_{S1}/OZ = \frac{b_0 \cdot h^2}{2} \\
 A_2 = \frac{(b - b_0)}{2} \cdot h_0 & y_2 = \frac{h_0}{2} & M_{S2}/OZ = \frac{(b - b_0) \cdot h_0^2}{4} \\
 A_3 = \frac{(b - b_0)}{2} \cdot h_0 & y_3 = \frac{h_0}{2} & M_{S3}/OZ = \frac{(b - b_0) \cdot h_0^2}{4}
 \end{array}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \qquad M_S/OZ = M_{S1}/OZ + M_{S2}/OZ + M_{S3}/OZ$$

$$M_S/OZ = \frac{b_0 \cdot h^2 + (b - b_0) \cdot h_0^2}{2}$$

$$y_G = \frac{b_0 \cdot h^2 + (b - b_0) \cdot h_0^2}{2A} = u_2$$

2) Calcul de I_{Gz} en fonction de u_1 et u_2



$$A_1 = b_0 \cdot u_1$$

$$I_1 = \frac{b_0 \cdot u_1^3}{3}$$

$$A_2 = b \cdot u_2$$

$$I_2 = \frac{b \cdot u_2^3}{3}$$

$$A_3 = (b - b_0) \cdot (u_2 - h_0)$$

$$I_3 = (b - b_0) \cdot \frac{(u_2 - h_0)^3}{3}$$

$$I_{GZ} = \frac{b_0 \cdot u_1^3}{3} + \frac{b \cdot u_2^3}{3} - (b - b_0) \cdot \frac{(u_2 - h_0)^3}{3}$$

Exercice 4 :

Dans le cas d'une section en T, calculer la position y_G du centre de gravité et le moment d'inertie I_{GZ} .

On donne :

$$b_0 = 20 \text{ cm} ; b = 80 \text{ cm} ; h_0 = 18 \text{ cm} ; h = 78 \text{ cm}.$$

Exercice 5 :

Dans chaque cas, déterminer :

- 1) La position y_G , en utilisant le moment statique.
- 2) I_{Oz} ou I_{GZ} , par utilisation du théorème de Huyghens.

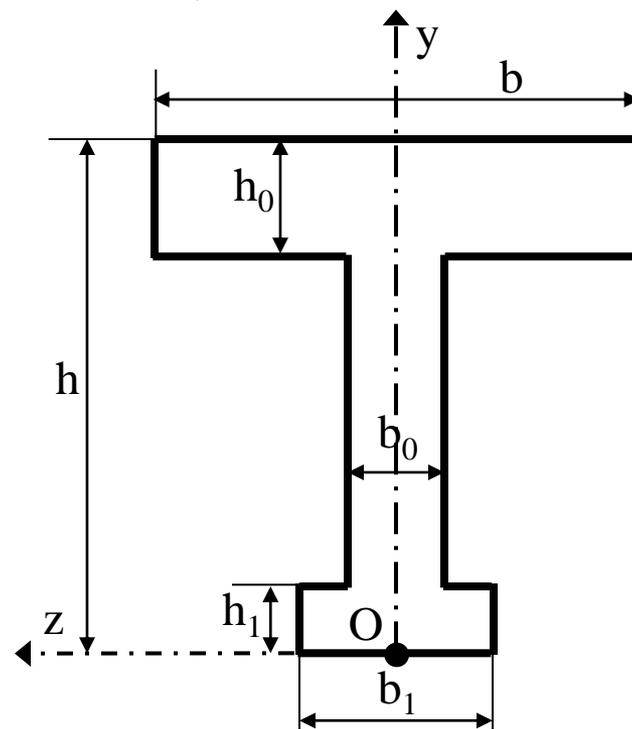
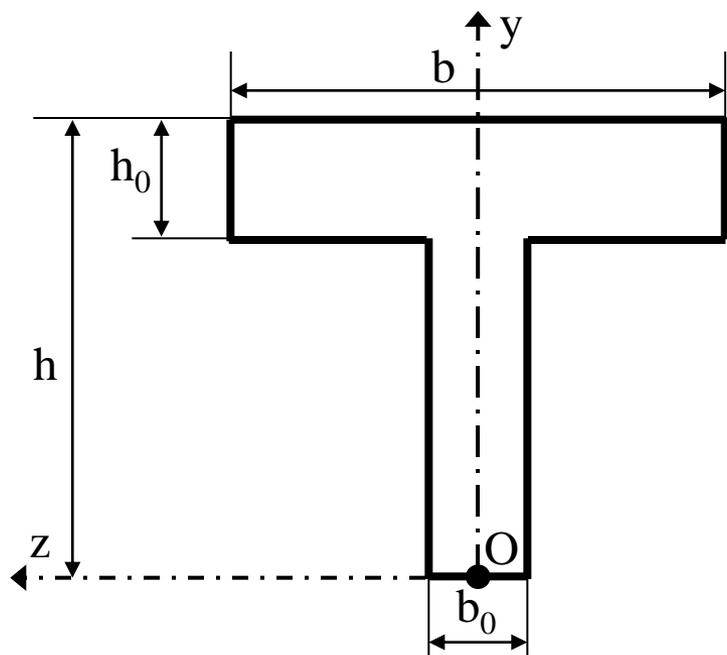
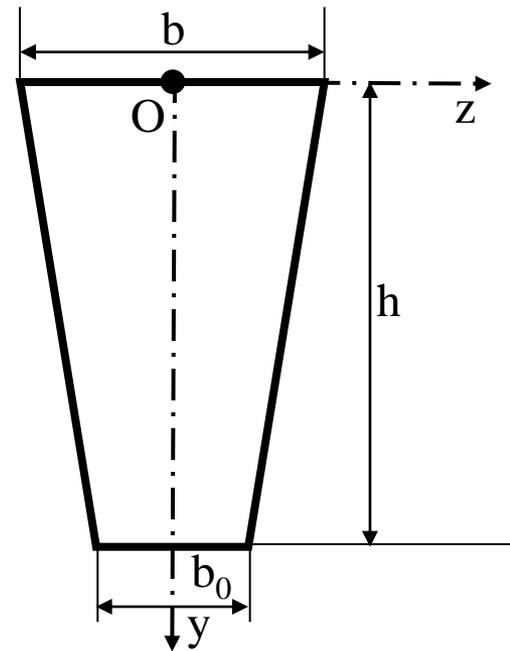
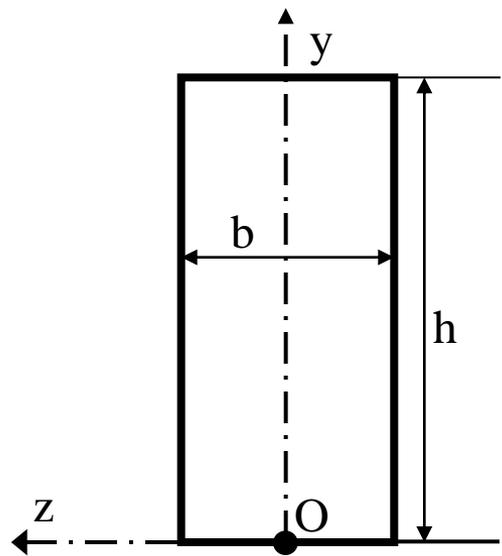
On donne :

Rectangle : $b = 15\text{cm}$; $h = 45\text{cm}$.

Trapèze : $b = 30\text{ cm}$; $b_0 = 20\text{ cm}$; $h = 45\text{ cm}$.

«Té» : $b = 50\text{ cm}$; $b_0 = 20\text{ cm}$; $h = 45\text{ cm}$; $h_0 = 12\text{ cm}$.

«I» : $b = 65\text{ cm}$; $b_0 = 15\text{ cm}$; $b_1 = 22\text{ cm}$; $h = 45\text{ cm}$; $h_0 = 10\text{ cm}$; $h_1 = 15\text{ cm}$.



Chapitre IV

LES COMPOSANTS DU BETON ARME

I Caractérisation du béton

1) Définition

C'est un mélange de :

-  Liant hydraulique (ciment)
-  granulats (sable , gravier)
-  eau
-  adjuvants : c'est des produits chimiques qu'on ajoute au mélange pour améliorer une qualité.

2) Qualités recherchées pour le béton

- Résistance mécanique élevée (20-200 MPa).
- Imperméabilité à l'eau et absence de réaction chimique (milieu basique) avec l'acier.
- Bonne mise en œuvre (facile à couler).
- Bonne tenue dans le temps.

3) Remarques

Ces résultats seront obtenus, en jouant sur les paramètres suivants :

- ➔ La qualité ciment, granulats.
- ➔ Le dosage (quantité).
- ➔ Un bon mélange (homogénéité).

4) Masse volumique

- ➔ La masse volumique béton à granulats courants (normal) : 2000 à 2600 kg/m³
- ➔ La masse volumique béton à granulats légers : 800 à 2000 kg/m³
- ➔ La masse volumique béton à granulats lourds : supérieur à 2600 kg/m³
- ➔ La masse volumique du béton armé → 2500 kg/m³

5) Déformations indépendantes des charges

a- Déformation thermique

le coefficient de dilatation du béton varie de 7.10^{-6} à 12.10^{-6} , le coefficient de dilatation de l'acier est de 11.10^{-6} , d'où le béton armé 10^{-5} .



$$\Delta L = \pm \alpha L \Delta T$$

Coefficient de dilatation

Longueur de la poutre

Différence de température

b- Retrait hygrométrique

le béton après sa confection (fabrication) contient un excès d'eau, si le durcissement se fait à l'air libre l'eau va s'évaporer. Cette évaporation s'accompagne automatiquement par une diminution du volume. Cette diminution s'appelle le retrait.

Estimation du retrait :

Retrait	Situation
$1,5 \cdot 10^{-4}$	Dans les climats très humide
$2 \cdot 10^{-4}$	Climat humide
$3 \cdot 10^{-4}$	Climat tempéré sec
$4 \cdot 10^{-4}$	Climat chaud
$5 \cdot 10^{-4}$	Climat très sec ou désertique

c- Facteurs qui influencent le retrait

le retrait augmente avec :

-  la quantité du ciment
-  addition des adjuvants : plus d'eau qui réagit.
-  la sécheresse de l'air

d- Remarque

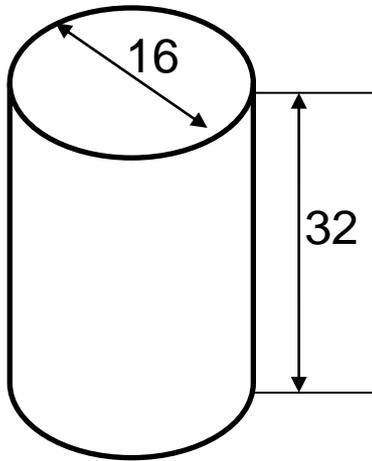
Pour les constructions courantes, les effets dû aux variations de température et au retrait seront négligés, si on prévoit des joints de dilatation tout les 20 à 30 mètre.

Les joints de dilatation sont de 1 à 2 cm.

6) Déformation due à la charge

a- Résistance à la compression

Essai de compression

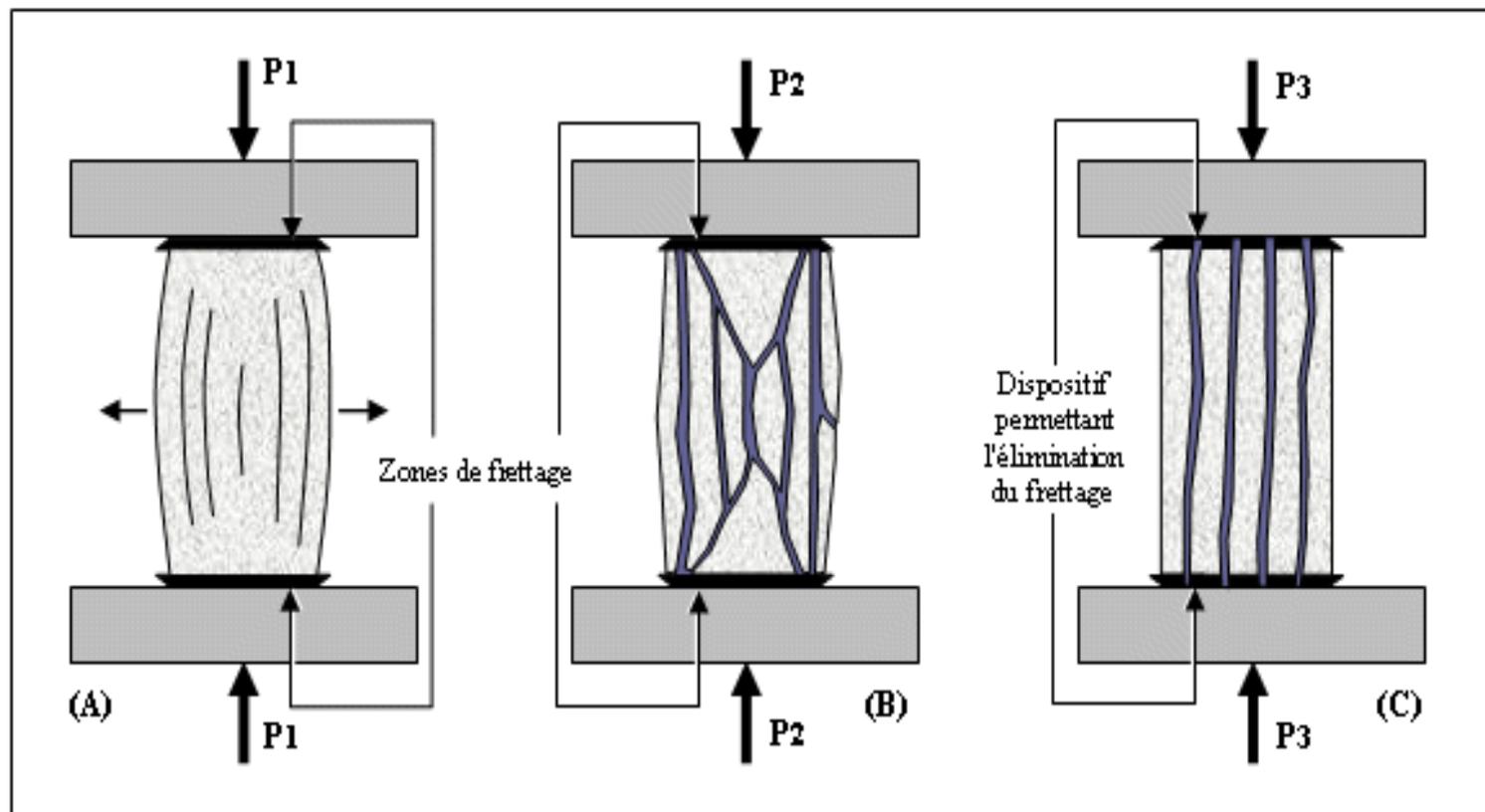


Éprouvette 16 cm x 32 cm



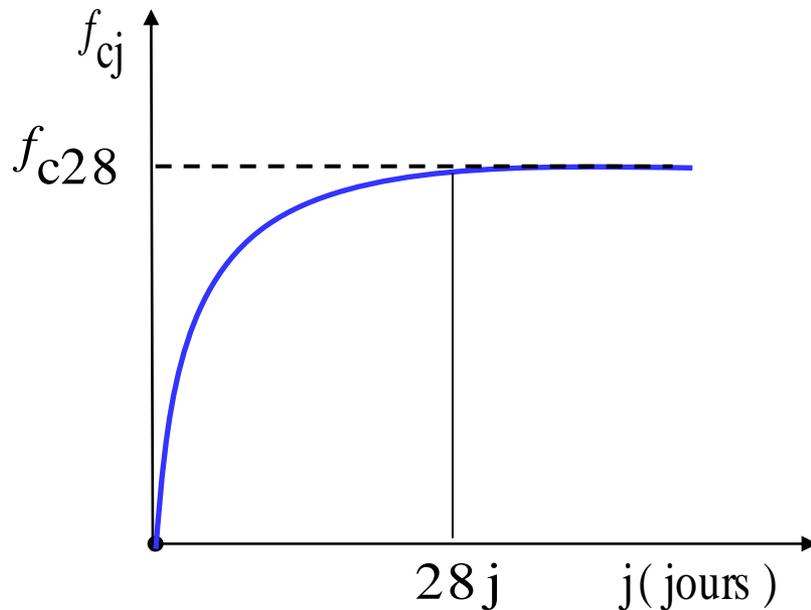
$$\sigma = \frac{4 F_r}{\pi d^2}$$

Mode de rupture des éprouvettes cylindriques en compression



Définition de la résistance caractéristique à la compression

Elle est définie par une valeur de la résistance à la compression du béton à l'âge de 28 jours par essai sur éprouvettes cylindriques 16 cm x 32 cm.



f_{c28} est appelée résistance caractéristique du béton

Ordre de grandeur de la résistance caractéristique à la compression

Les résistances mécaniques en compression obtenues classiquement sur éprouvettes cylindriques normalisées, sont de l'ordre de :

BFC : bétonnage fabriqué sur chantier : 25 à 35 MPa, peut parfois atteindre 50 MPa

BPE : béton prêt à l'emploi, bétonnage soigné en usine (préfabrication) : 40 à 60 MPa ;

BHP : béton hautes performances : jusqu'à 200 MPa ;

BUHP : béton ultra hautes performances, en laboratoire : 500 MPa.

$$20 \text{ MPa} \leq f_{c28} \leq 200 \text{ MPa}$$

Évolution avec l'âge du béton

La résistance à la compression varie dans le temps.

$$f_{c28} \leq 40 \text{ MPa}$$

$$j < 60 \Rightarrow f_{cj} = \frac{j}{4,76 + 0,83j} f_{c28}$$

$$j \geq 60 \Rightarrow f_{cj} = 1,1 \cdot f_{c28}$$

$$40 \text{ MPa} < f_{c28} \leq 60 \text{ MPa}$$

$$j \leq 60 \Rightarrow f_{cj} = \frac{j}{1,4 + 0,95j} f_{c28}$$

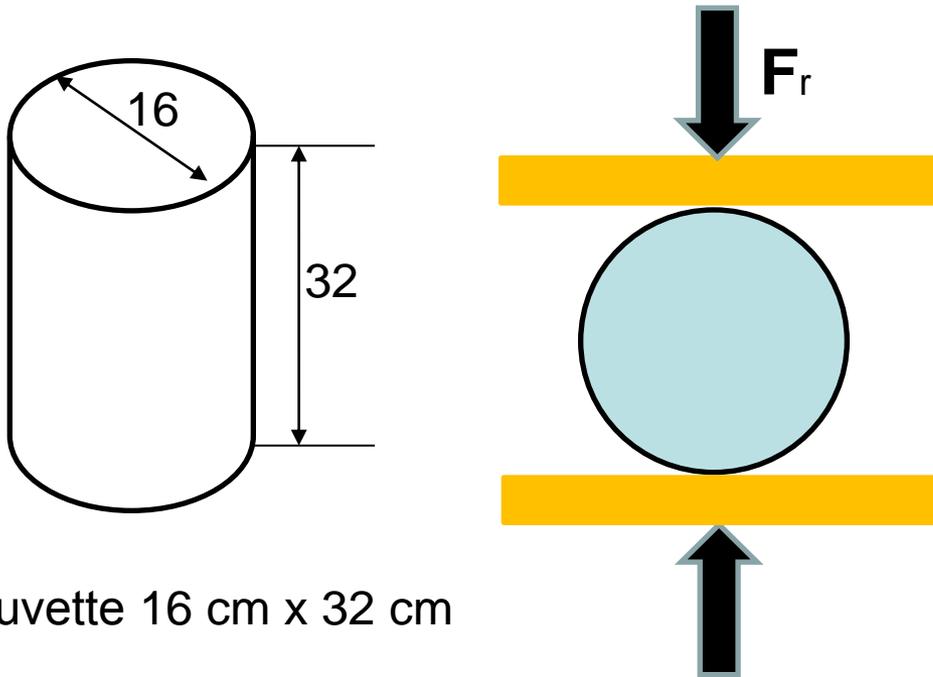
$$j > 60 \Rightarrow f_{cj} = f_{c28}$$

f_{cj} résistance à la compression à j jours

f_{c28} résistance à la compression à 28 jours

b- Résistance à la traction

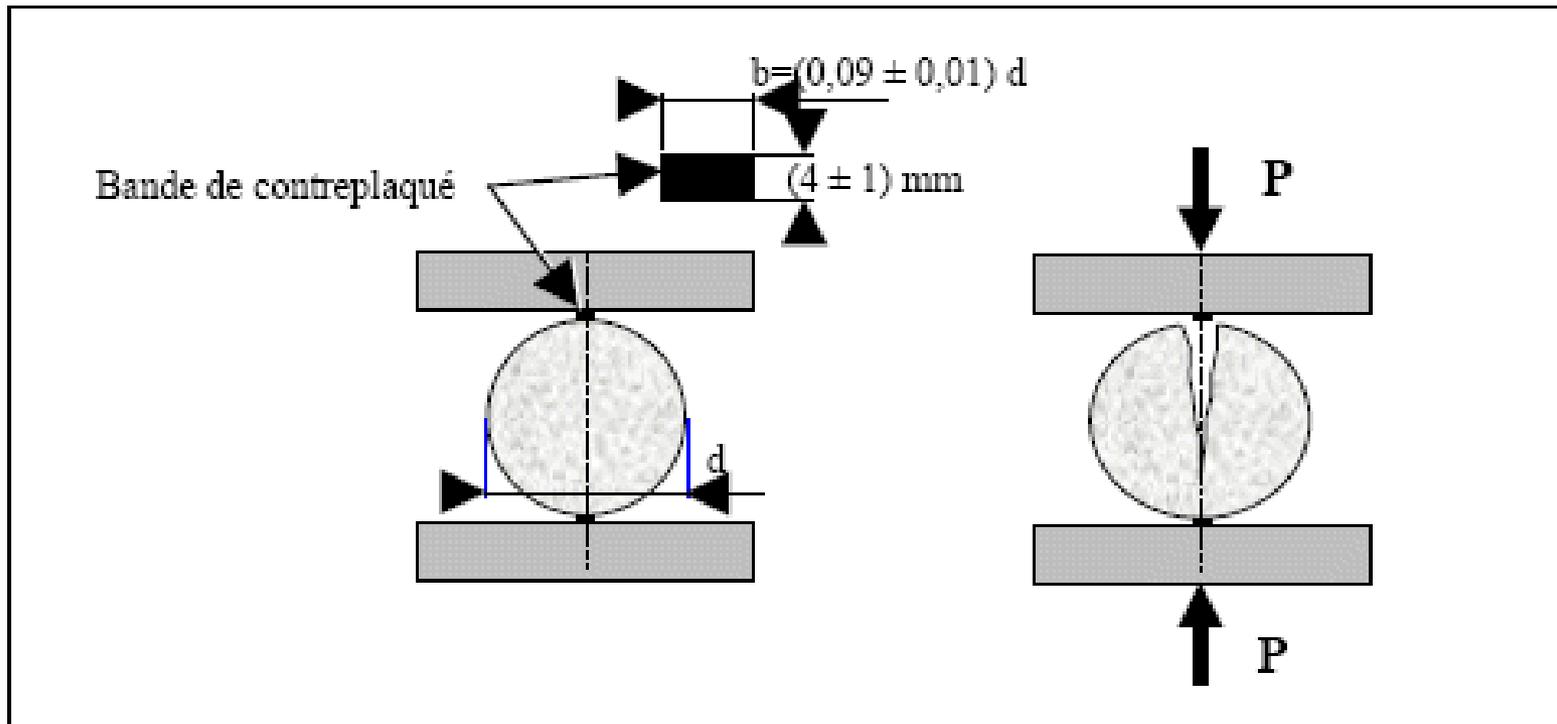
Traction par fendage



Éprouvette 16 cm x 32 cm

$$\sigma = \frac{2 F_r}{\pi d L}$$

Dispositif pour l'essai de rupture par fendage



Résistance caractéristique à la traction

Elle est conventionnellement définie à partir de la résistance à la compression du béton à j jours par la relation :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{cj}$$

$$f_{c28} \leq 60 \text{ MPa}$$

$$f_{tj} = 0,275 \cdot f_{cj}^{2/3}$$

$$60 < f_{c28} \leq 80 \text{ MPa}$$

7) Déformation longitudinale

Un élément de béton comprimé admet dès l'application de la charge une déformation instantanée. Mais au cours du temps, cette déformation va continuer à croître du fait du retrait et du fluage (déformation dans le temps, sous charge constante) et sera même trois fois plus importante que la déformation instantanée.

a- Module de déformation instantané

Le module de déformation instantané (noté E_{ij}), pour une durée d'application des charges < 24 h.

$$E_{ij} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_{cj}}$$

$$20 \text{ GPa} \leq E_{i28} \leq 50 \text{ GPa}$$

b- Module de déformation différé

Le module de déformation différée (noté E_{vj}), pour une durée d'application des charges > 24 h.

$$E_{vj} = 3700 \cdot \sqrt[3]{f_{cj}}$$

c- Remarques

La valeur de ces modules intervient dans le calcul des flèches et les effets dus au retrait et au fluage du béton.

$$E_{vj} = \frac{E_{ij}}{3}$$

8) Déformation transversale

Elle a pour origine la déformation longitudinale. Elle se traduit par le coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{\text{déformation transversale}}{\text{déformation longitudinale}}$$

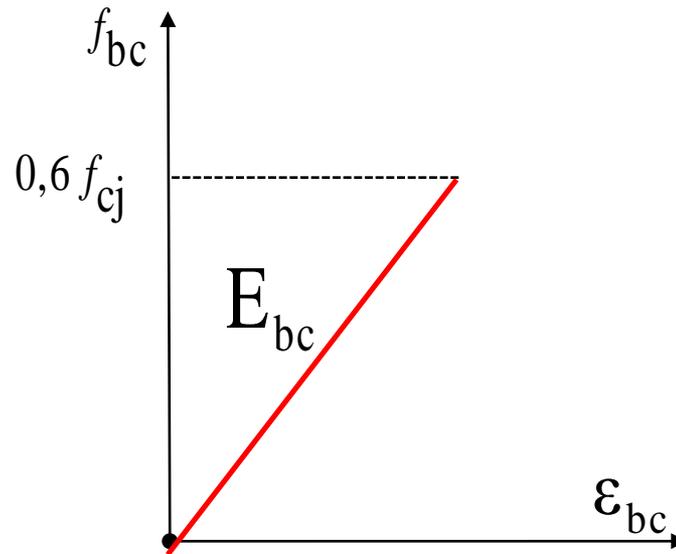
Le coefficient de Poisson est pris égal à :

$\nu = 0,20$ E.L.S. (section non fissurée)

$\nu = 0$ E.L.U.

9) Diagramme contrainte déformation

a- Calcul à l'ELS



$$f_{bc} = E_{bc} \cdot \epsilon_{bc} \text{ et } f_{bc} \leq 0,6 f_{cj}$$

b- Calcul à l'ELU

La résistance en compression pour le calcul à l'ELU est donné par :

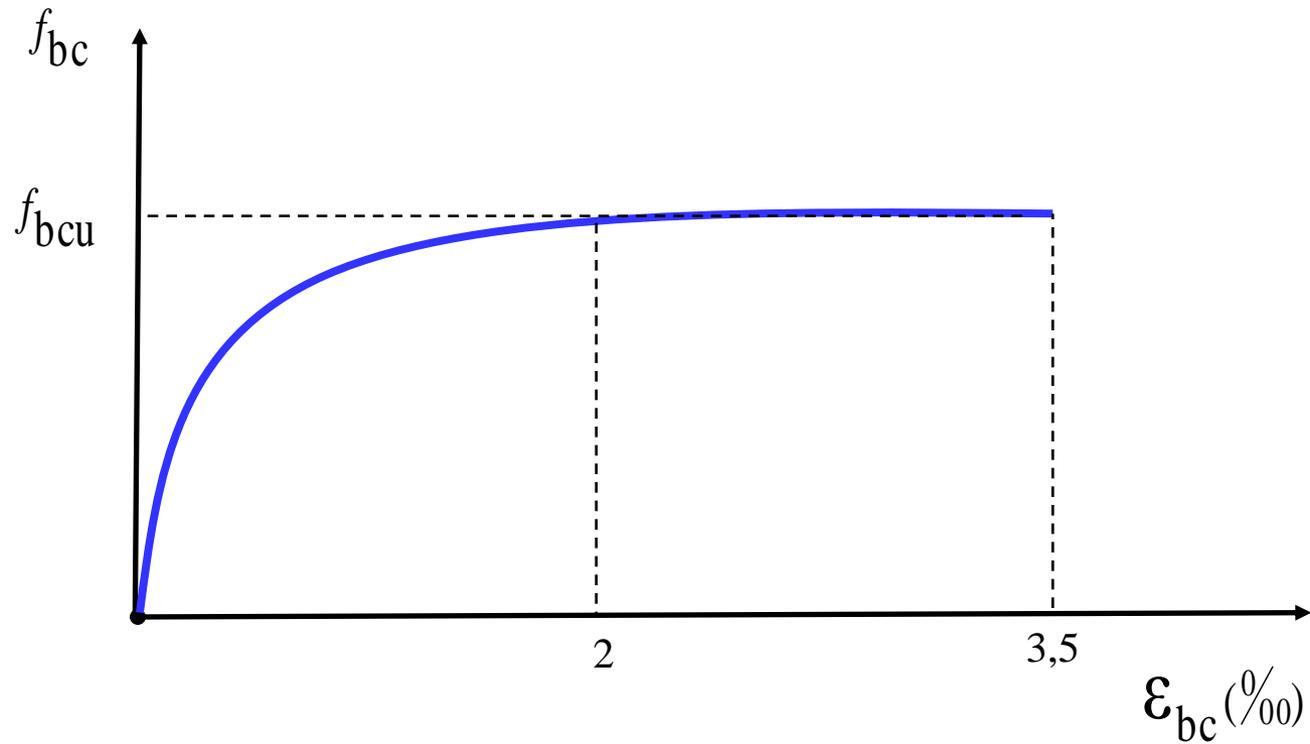
$$f_{bcu} = \frac{0,85 f_{cj}}{\theta \gamma_b}$$

$$\theta \begin{cases} 1 \text{ pour les charges appliquées plus de 24h} \\ 0,9 \text{ entre } 1\text{h} \leq \text{durée} \leq 24\text{h} \\ 0,85 \text{ si la durée} < 1\text{h} \end{cases}$$

$$\gamma_b \begin{cases} \text{E.L.U. normal } 1,5 \\ \text{E.L.U. accidentel } 1,15 \end{cases}$$

Euro code 2

Diagramme parabole rectangle



$$f_{bcu} = \frac{0,85 f_{cj}}{\theta \gamma_b}$$

$$f_{bcu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\gamma_b}$$

Exercice 6 :

Contrôler dans le tableau ci-dessous les contraintes de traction du béton et les modules de déformation instantanée du béton.

f_{c28} en MPa	18	25	30
f_{t28} en MPa	1,68	2,1	2,4
E_{i28} en MPa	28828	32164	34180

Exercice 7 :

Calculer la résistance approximative du béton en compression à 4, 10 et 21 jours sachant qu'il doit atteindre à l'âge de 28 jours $f_{c28} = 30$ MPa.

Exercice 8 :

- 1) Calculer la contrainte dû au retrait dans le cas d'une poutre B.A. de section 15 cm x 50 cm, sachant que :
 - ses extrémités sont liés à des massifs bétonnés,
 - le climat est humide,
 - $f_{c28} = 30$ MPa,
- 2) Quel est l'effet du retrait (fissuration du béton ou non).

II L'acier

1) Définition

C'est l'alliage fer et carbone. On distingue des aciers doux, des aciers mi-durs et des aciers durs.

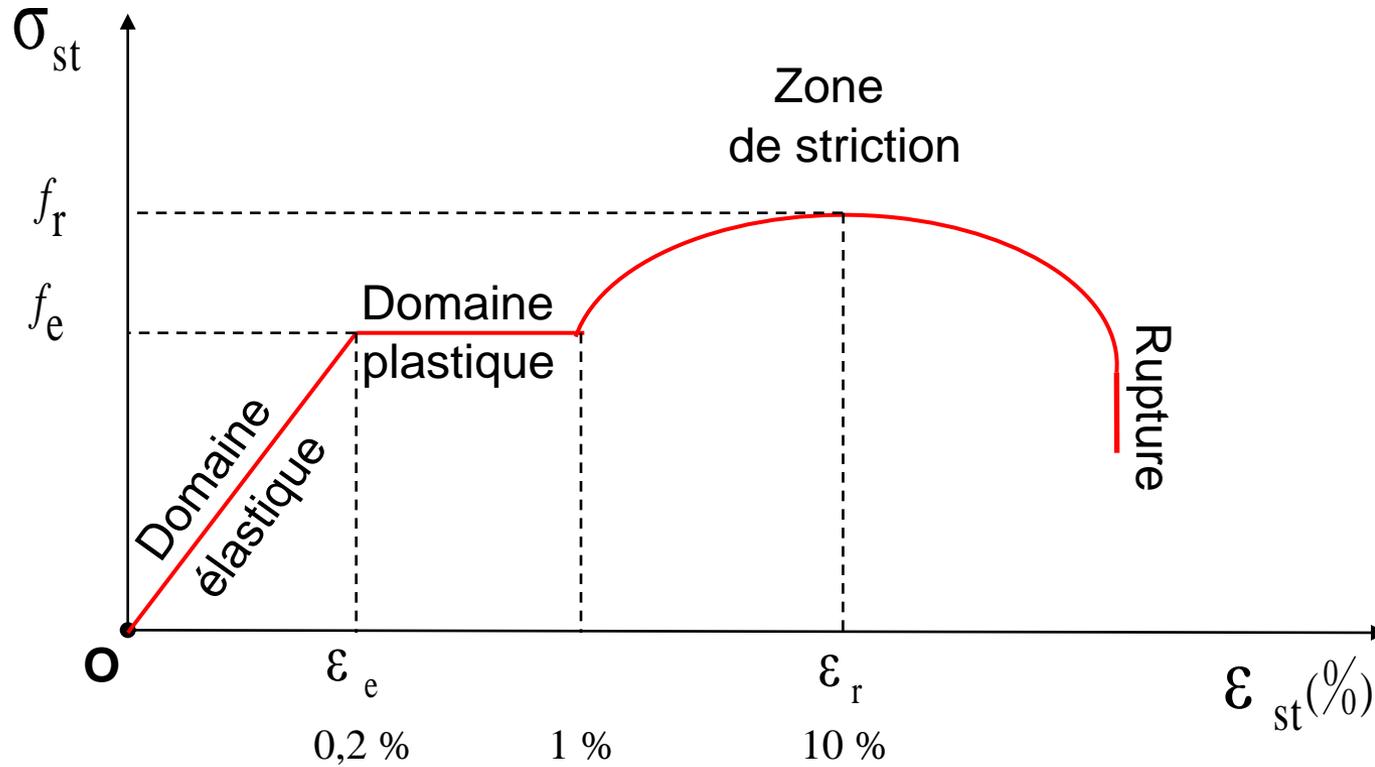
➡ Acier doux → % carbone 0,15 - 0,25 %

➡ Acier mi dur et dur → % carbone 0,25 - 0,45 %

2) Remarque

Le caractère mécanique, qui sert de base aux justifications dans le cadre des états limites, est la limite d'élasticité garantie (symbole f_e).

3) Essai de traction



Dans le domaine élastique, l'expression de la contrainte en fonction de l'allongement sera :

$$\sigma_{st} = E_s \cdot \varepsilon$$

$E_s = 210 \text{ GPa}$: module de Young

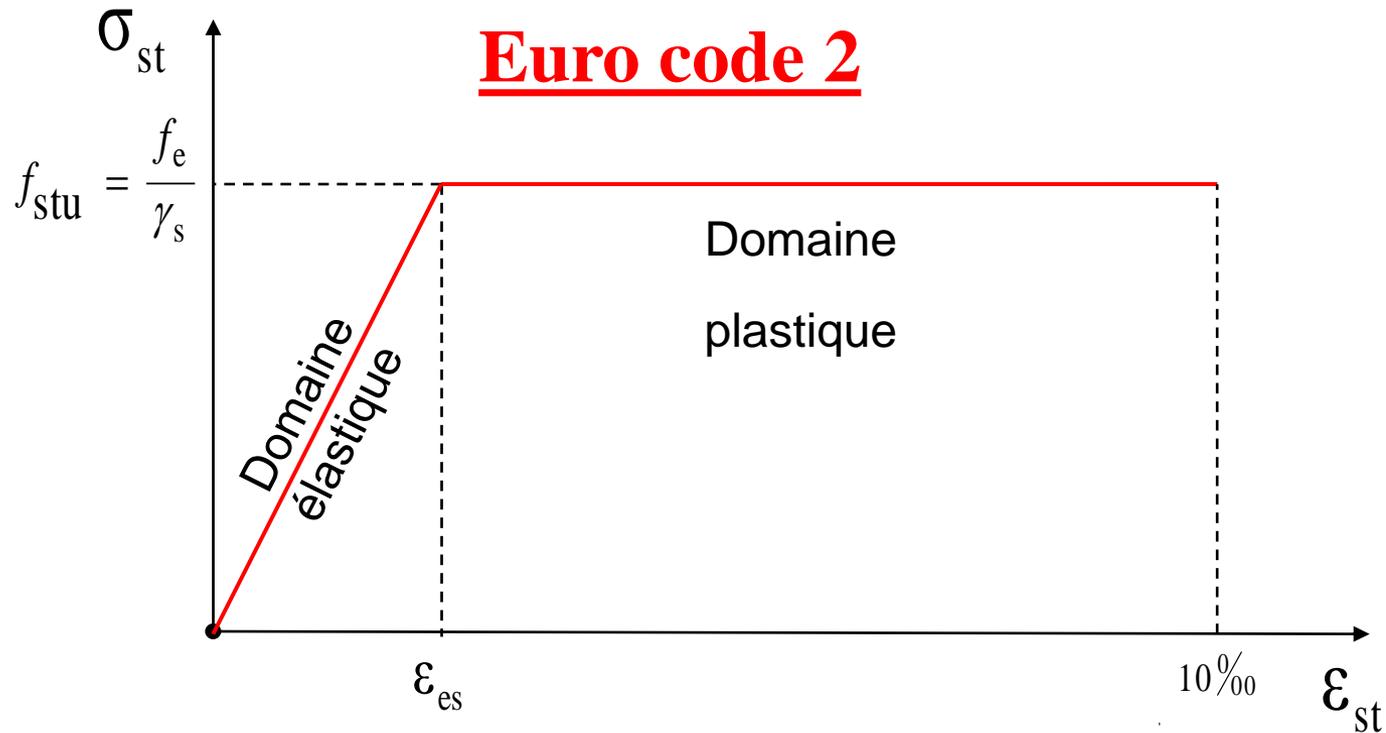
ε : la déformation.

La contrainte correspondante à la limite de proportionnalité entre contrainte et déformation est appelée limite élastique ou limite d'élasticité, elle est notée par f_e .

Dans la zone de striction, la contrainte atteint un maximum ; on l'appelle contrainte de rupture et elle sera notée par f_r .

Dans les parties élastique et plastique, le diagramme correspondant à la compression est symétrique à celui de la traction par rapport à l'origine.

4) Diagramme réglementaire de calcul à l'ELU



A l'ELU normal $\gamma_s = 1,15$ et à l'ELU accidentel $\gamma_s = 1$.
L'eurocode2 limite d'allongement des aciers à la valeur de 10 ‰.

5) Calcul à l'ELS : contraintes admissibles

En état limite de service, les vérifications à effectuer pour les aciers portent sur l'état limite d'ouverture des fissures. L'appréciation du degré de nocivité de l'ouverture des fissures dépend de l'environnement (agressif ou non), de la nature de la structure, de l'utilisation de l'ouvrage, de la limite élastique des aciers utilisés et de l'expérience sur des ouvrages analogues. Il appartient au maître d'œuvre de juger de ce degré de nocivité.

La condition concerne la contrainte
de traction des armatures

a- Fissuration peu préjudiciable

C'est le cas d'ouvrages situés en milieu peu agressif. L' eurocode2 précise qu'il s'agit d'éléments situés dans des locaux clos et couverts, non soumis à des condensations.

Dans ce cas aucune vérification particulière n'est demandée sur les aciers si ce n'est qu'il conviendra dans la mesure du possible:

- de n'utiliser les gros diamètres que dans les pièces suffisamment épaisses,
- d'éviter les très petits diamètres dans les pièces exposées aux intempéries,
- de prévoir le plus grand nombre de barres compatibles avec une mise en place correcte du béton.

limitation à f_e (aucune vérification)

b - Fissuration préjudiciable

La fissuration est considérée comme préjudiciable lorsque les éléments en cause sont exposés aux intempéries, à des condensations, ou peuvent être alternativement noyés et immergés en eau douce.

$$\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{2}{3} f_e ; 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right)$$

η : Coefficient de fissuration qui dépend du type d'acier.

f_e : limite d'élasticité des aciers utilisés (MPa).

f_{tj} = résistance caractéristique en traction du béton (MPa).

c - Fissuration très préjudiciable

La fissuration est considérée comme très préjudiciable lorsque les éléments en mis en œuvre sont exposés à un milieu agressif (eau de mer, atmosphère marine telle que embruns et brouillards salins, eau très pure, gaz ou sol particulièrement corrosifs) ou bien doivent assurer une étanchéité.

$$\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{1}{2} f_e ; 90 \sqrt{\eta f_{tj}} \right)$$

η : Coefficient de fissuration qui dépend du type d'acier.

f_e : limite d'élasticité des aciers utilisés (MPa).

f_{tj} = résistance caractéristique en traction du béton (MPa).

Coefficient de
fissuration η

1,0 pour les RL (Φ) et les TSL
1,3 pour les HA et les TSHA $< 6\text{mm}$
1,6 pour les HA et les TSHA $\geq 6\text{mm}$

6) Classification des aciers pour béton armé



Acier rond lisse.



Acier haute adhérence.



Treillis soudés.

a- Acier rond lisse : **symbole RL**

Ce sont des aciers doux, laminés à chaud et de surface lisse, ne présentant aucune aspérités.

Les nuances utilisées sont les Fe E 215 et Fe E 235.

Acier rond lisse « RL »

Nuance	f_e (MPa)	ϵ_{es} (10^{-3})		f_r (MPa)
		$\gamma_s = 1$	$\gamma_s = 1,15$	
Fe E215	215	1,075	0,935	≥ 330
Fe E235	235	1,175	1,02	≥ 410

b- Armature à haute adhérence : symbole HA

Ils sont obtenus par laminage à chaud d'un acier naturellement dur, soit dont les caractéristiques mécaniques sont dues à une composition chimique appropriée.

Ces armatures ont leur surface marquée par des crénelures (nervures) de formes diverses suivant les marques commerciales, de façon à assurer une meilleure adhérence avec le béton. Ces aciers existent dans les nuances Fe E 400 et Fe E 500.

Acier haute adhérence « HA »

Nuance	f_e (MPa)	ϵ_{es} (10^{-3})		f_r (MPa)
		$\gamma_s = 1$	$\gamma_s = 1,15$	
Fe E400	400	2	1,74	≥ 480
Fe E500	500	2,5	2,175	≥ 550

c- Treillis soudés : **symbole TS**

Si les autres types d'acier se présentent en barres, ces derniers sont soit en rouleaux, soit en panneaux et de dimensions normalisées. Leur largeur standard est de 2,40m. La longueur des rouleaux est de 50m et celle des panneaux est de 3,60m; 4,80m ou 6m.

Les treillis soudés sont constitués par des fils se croisant perpendiculairement et soudés électriquement à leurs croisements. On distingue les treillis soudés à fils tréfilés lisses dits TSL des treillis soudés à fils à haute adhérence dits TSHA.

l'espacement maxi des aciers ne doit en aucun cas dépasser $2h$ (h= épaisseur du dallage)

Types aciers	Désignation	Limite Élas. f_e (MPa)	Ré. à la rupt. f_r (MPa)	Allongt à la Rup.(%)	Coef. de scellem. Ψ_s	Coef. de Fissur. η	Diamèt. Couran. (mm)
RL	Fe E 215	215	≥ 330	22	1	1	6-8-10-12
	Fe E 235	235	≥ 410	22			
HA	Fe E 400	400	≥ 480	14	1,5	1,6	6-8-10-12 14-16-20- 25-32-40
	Fe E 500	500	≥ 550	12			
TSL		500	550	8	1	1	3,5 à 9mm
TSHA		500	550	8	1,5	$\Phi < 6\text{mm}$ 1,3 $\Phi \geq 6\text{mm}$ 1,6	3,5 à 12mm sur commande 14-16mm

6) Caractéristiques des barres pour béton armé

Φ (mm)	Nombre de barres									Masse (kg/m)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
5	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,37	1,57	1,77	0,154
6	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	0,222
8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	0,395
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	0,617
12	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18	0,888
14	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,32	13,85	1,208
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10	1,578
20	3,14	6,28	4,92	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27	2,466
25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	3,853
32	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30	64,34	72,38	6,313
40	12,54	25,13	37,70	50,27	62,83	75,40	87,96	100,53	113,10	9,865

Exercice 9 :

- 1) Déterminer l'allongement unitaire correspondant à une contrainte de 348 MPa exercé sur un acier Fe E 400.
- 2) Pour les aciers HA Fe E 400 et Fe E 500, comparer les rapports résistance à la rupture et limite élastique. Quel est l'acier qui offre le plus de sécurité à l'utilisateur?.
- 3) Calculer pour un acier à haute adhérence, de limite élastique garantie $f_e = 400$ MPa le rapport entre son allongement à la rupture et celui correspondant à sa limite élastique théorique.

Chapitre V

ASSOCIATION BETON-ACIER

I Généralités

L'association béton /acier est efficace pour les raisons suivantes :

-  Le béton résiste aux essais à la compression.
-  L 'acier résiste aux essais à la traction.
-  L 'acier adhère au béton, se qui permet la transmission des efforts d'un matériaux à l'autre .
-  Il n'y a pas de réaction chimique entre l'acier et le béton et en plus le béton (milieu basique) protège l'acier de la corrosion .
-  Le coefficient de dilatation des deux matériaux est pratiquement le même.

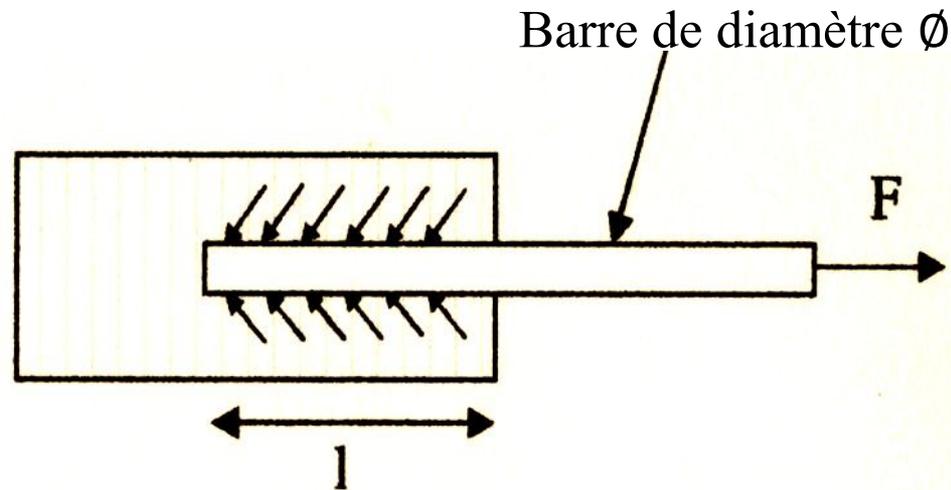
II L'adhérence

1) Définition

L'adhérence désigne l'action des forces de liaisons qui s'opposent au glissement des barres suivant l'axe par rapport au béton qui l'entoure. Ces forces de liaisons sont mesurées par la contrainte d'adhérence qui est définie comme étant le rapport entre la variation par unité de longueur de l'effort axial équilibré par la barre et le périmètre de cette barre.

2) Contrainte d'adhérence

Soit une barre rectiligne scellée dans un bloc de béton. Appliquons à cette barre un effort de traction F et étudions l'équilibre statique.

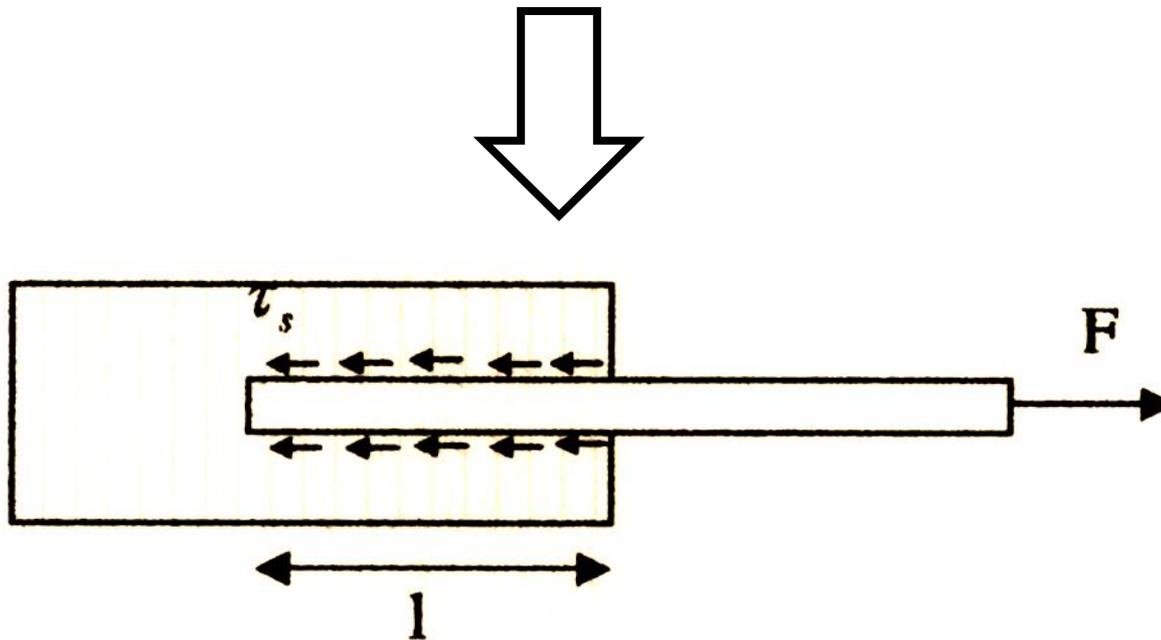


La barre est donc soumise :

➔ à l'effort de traction F ,

➔ à la contrainte d'adhérence τ_s .

La contrainte d'adhérence correspond aux efforts du béton incliné à 45° . La contrainte est constante sur toute la longueur l de la barre et est répartie tout autour de celle-ci, sur une surface égale à $\pi \Phi l$ (Φ est le diamètre de la barre).



Le principe d'équilibre nous permet de dire que la contrainte d'adhérence s'oppose à l'effort de traction dans la barre donc :

$$F = \tau_s \pi \Phi l$$

Ce qui nous donne :

$$\tau_s = \frac{F}{\pi \Phi l}$$

3) Remarque

Dans les constructions du béton armé les efforts sont appliqués au béton et non pas aux aciers, ceux-ci seront sollicités grâce aux liaisons avec le béton. La transmission des efforts a lieu le long de la surface latérale des barres grâce au phénomène d'adhérence.

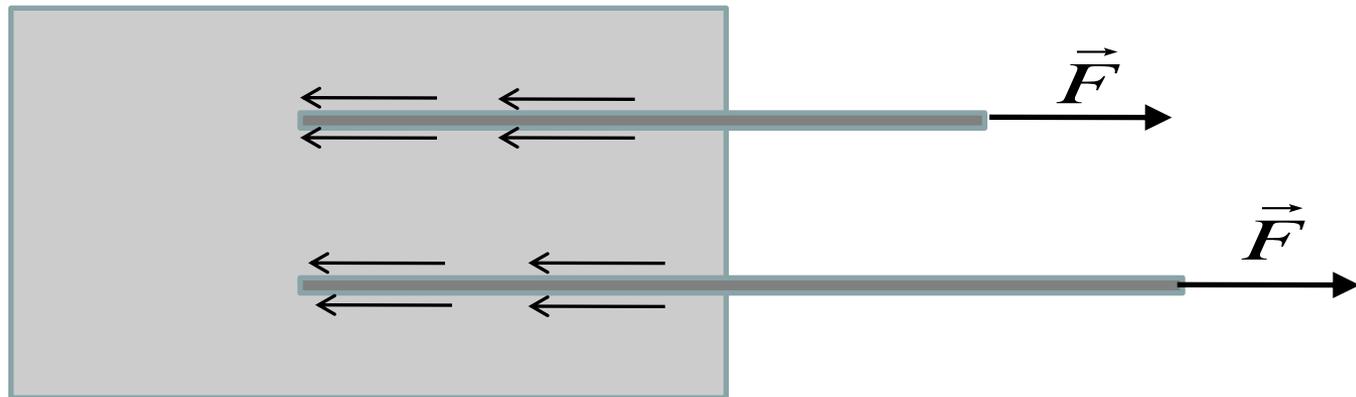
4) Rôles de l'adhérence

a - Transfert des efforts

L'adhérence entre le béton et l'acier permet le transfert des efforts entre eux.

b - Ancrages des barres

Appelé aussi scellement, si la barre est trop courte, elle risque de s'arracher du béton sous l'effet de l'effort de traction. La barre doit être suffisamment longue pour être convenablement ancrée (scellée) et pour reprendre tout les efforts de traction.



Une barre est dite "ancrée" lorsque l'effort F de traction exercé sur cette barre est entièrement équilibré par l'adhérence entre le béton et l'acier dans la zone d'ancrage.

c - Répartitions des fissures

L'adhérence permet de répartir les fissures tout en évitant la formation de grandes fissures concentrées.

5) Facteurs influençant l'adhérence

a - L'état de surface des barres

Les surfaces rugueuses augmentent le frottement entre le béton et l'acier et par conséquent augmente l'adhérence.

La résistance de barres au glissement est caractérisée par deux coefficients : η et ψ_s .

η Coefficient d'adhérence ou de fissuration $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ pour RL} \\ 1,6 \text{ pour HA} \end{array} \right.$

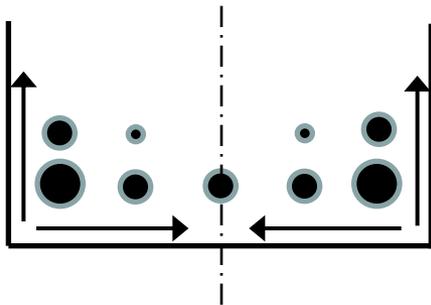
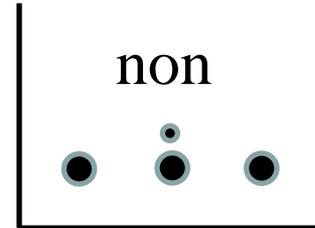
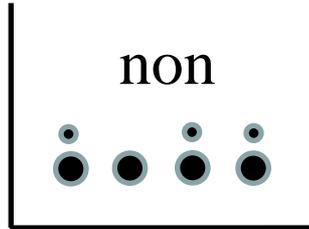
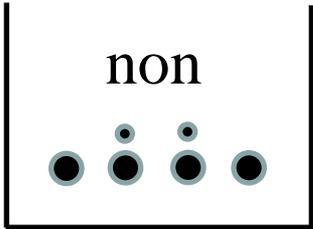
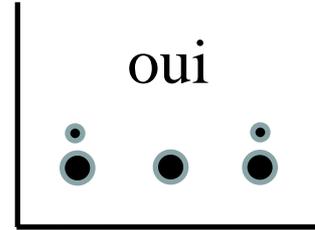
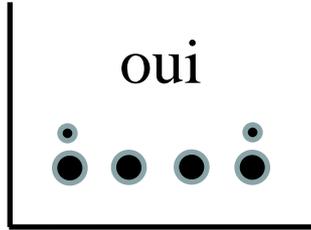
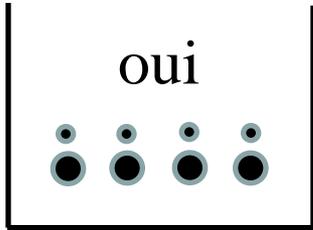
ψ_s Coefficient de scellement (ancrage) $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ pour RL} \\ 1,5 \text{ pour HA} \end{array} \right.$

b - Forme des barres

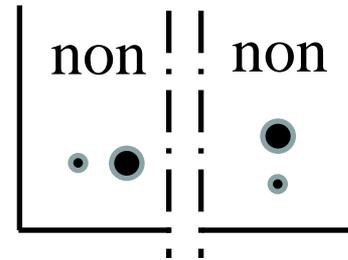
l'adhérence circulaire (rond) est supérieure à celle des barre ayant une autre forme.

c - Groupement des barres

L'objectif est d'assurer une meilleure répartition des fissures tout en étant petite.



Dans le sens des flèches, les diamètres ne doivent pas augmenter.



d - La résistance du béton

L'adhérence augmente avec l'augmentation de la résistance à la compression du béton.

e - Compression transversale

Dans une pièce comprimée, l'adhérence va augmenter par la contrainte créée (le serrage).

III Ancrage des barres

1) Définition

La longueur d'ancrage sera la longueur nécessaire pour équilibrer l'effort axial exercé sur la barre.

2) Contrainte d'adhérence

Une valeur limite pour la contrainte d'adhérence est fixée par l'eurocode2. Cette contrainte intègre à la fois les caractéristiques de l'acier, avec le coefficient de scellement ψ_s , et celles du béton, avec sa résistance à la traction f_{tj} .

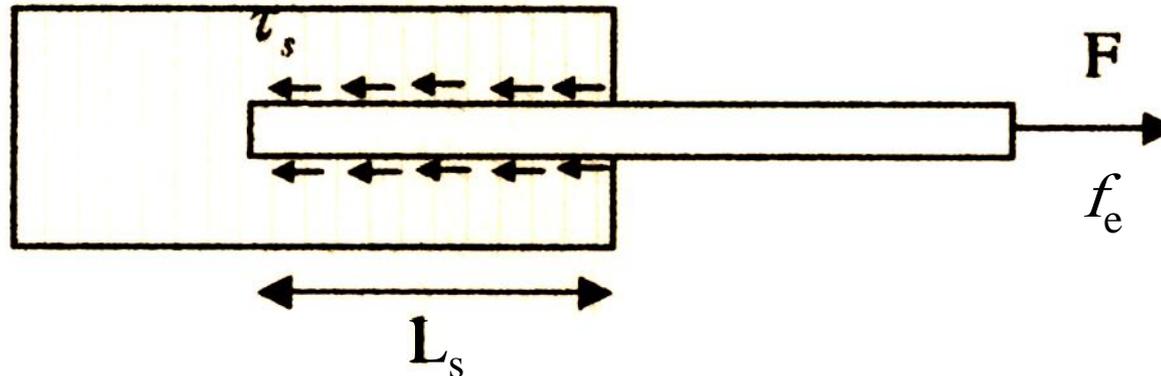
Sur la longueur d'ancrage la contrainte d'adhérence sera supposé constante est égale à sa valeur limite ultime qui est la suivante:

$$\tau_s = 0,6 \psi_s^2 f_{tj}$$

3) Ancrage rectiligne en traction

a – Cas d'une barre isolée tendue

La longueur de scellement droit L_s sera la longueur nécessaire pour une barre rectiligne de diamètre Φ soumise à une contrainte égale à sa limite élastique f_e soit convenablement ancrée (ancrage total).



Il y a équilibre entre la force due à la contrainte d'adhérence et l'effort F de traction provoquant dans cette barre une contrainte égale à la limite élastique f_e de l'acier.

Nous aurons donc :

$$F = f_e S = \frac{f_e \pi \varnothing^2}{4}$$

$$F = \tau_s \pi \varnothing L_s$$

Ce qui donne :

$$L_s = \frac{\varnothing}{4} \frac{f_e}{\tau_s}$$

b - Remarque

A défaut de calcul précis, l'eurocode2 permet d'adopter les valeurs forfaitaires suivantes :

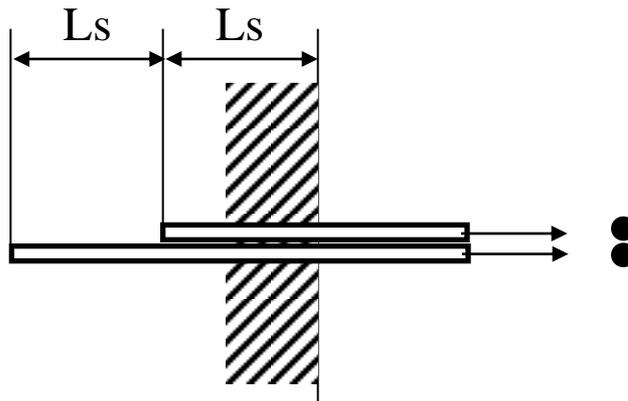
$L_s = 40\Phi$ pour les aciers HA Fe E 400

$L_s = 50\Phi$ pour les aciers HA Fe E 500

pour les aciers RL Fe E 215 et Fe E 235

c – Cas d'un paquet de barres

Paquet de deux barres



Paquet de trois barres

A partir de l'ancrage, nous avons :

$1,5L_s$ pour le paquet de trois barres

L_s pour le paquet de deux barres

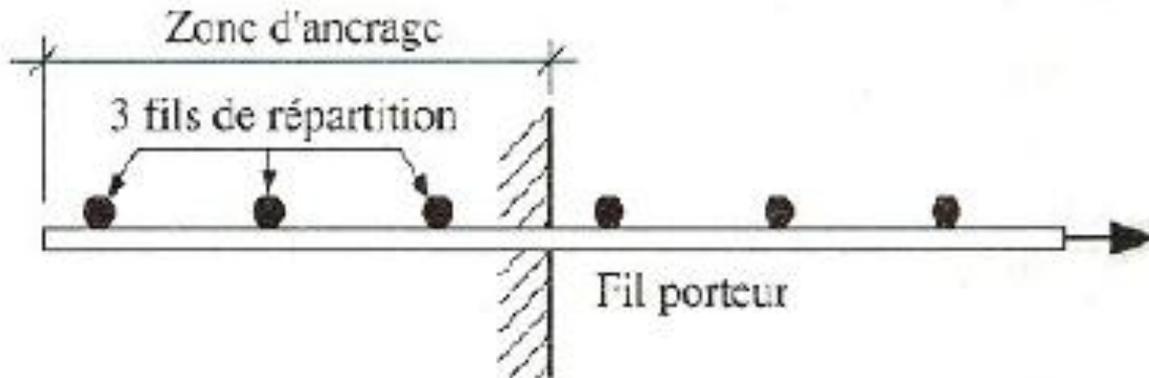
L_s pour une barre

$$L = 1,5L_s + L_s + L_s$$

321



c – Treillis soudé TSL et TSHA



4) Ancrage par courbure des barres tendues

Calcul des longueurs

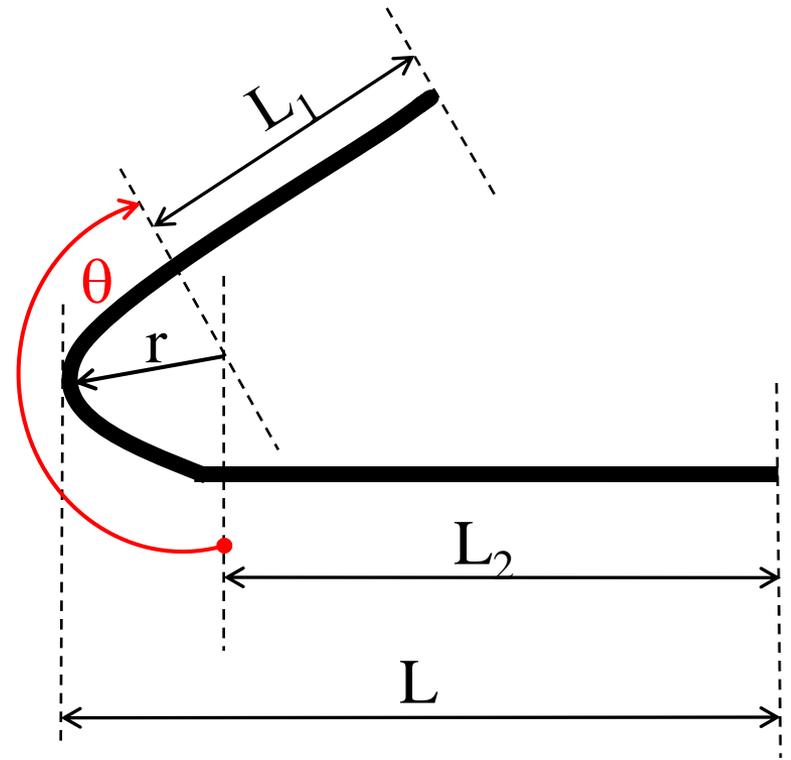
sans enrobage :

$$L = L_2 + r + \frac{\Phi}{2}$$

avec enrobage :

$$L = L_2 + r + \frac{\Phi}{2} + c$$

où c est l'épaisseur de l'enrobage



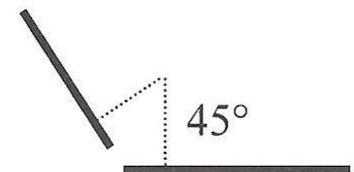
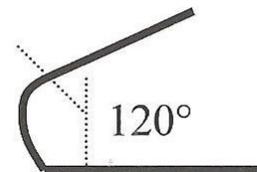
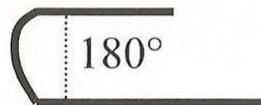
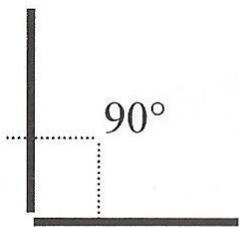
Rayons de courbure minimaux

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{RL} & r \geq 3\Phi \\ \text{HA} & r \geq 5,5\Phi \end{array} \right.$$

$$L_2 = L_s - \alpha L_1 - \beta r$$

L_s : longueur équivalente de scellement droit.

Θ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α	1,23	1,37	1,52	1,87	2,31	2,57	2,85	3,51
β	0,58	0,92	1,30	2,19	3,28	3,92	4,62	6,28



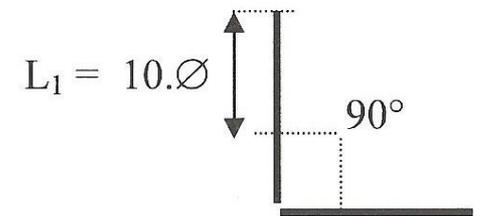
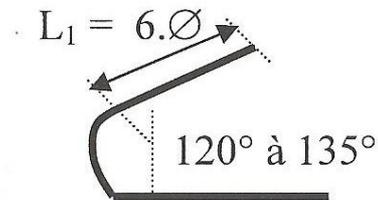
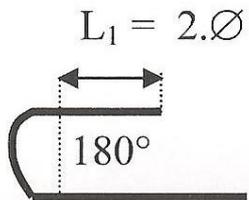
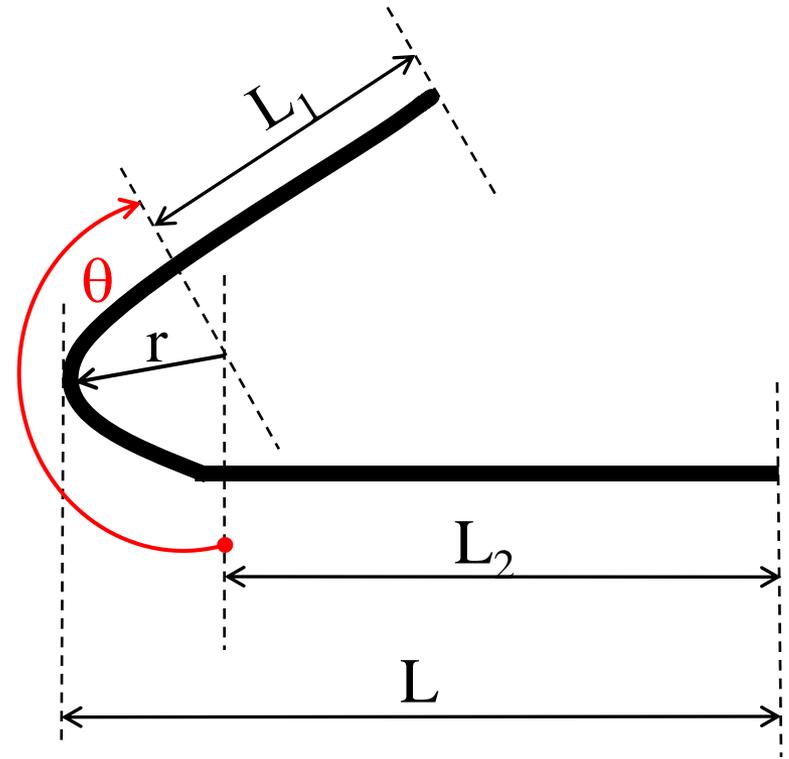
sans enrobage :

$$L = L_2 + r + \frac{\Phi}{2}$$

avec enrobage :

$$L = L_2 + r + \frac{\Phi}{2} + c$$

où c est l'épaisseur de l'enrobage



5) Ancrage en compression

L'ancrage d'une barre comprimée courbée (ancrage courbe) est interdit.

Pour une barre rectiligne l'ancrage en compression sera calculé comme suit :

$$L_{sc} = \frac{\Phi}{4} \frac{\sigma_{sc}}{\tau_s}$$

Φ : diamètre des barres.

σ_{sc} : la contrainte à la compression de l'acier.

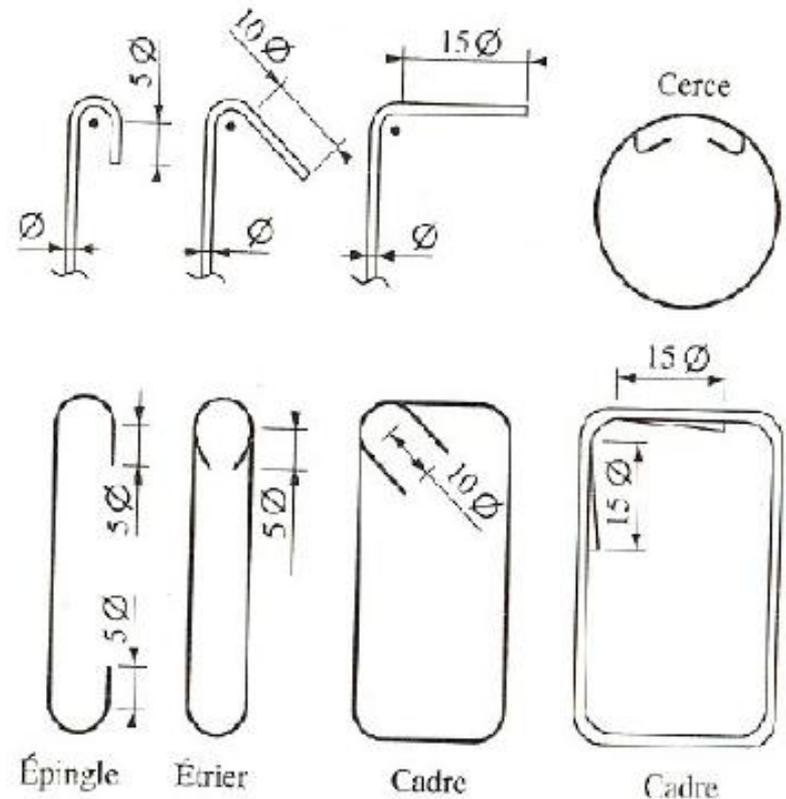
τ_s : la contrainte d'adhérence.

6) Ancrage des cadres, étriers, épingles

Rayons de courbure minimaux $r \geq 2.\Phi$

Les ancrages des extrémités sont assurées par courbure suivant le rayon minimale. Les parties courbes sont prolongés par des parties rectilignes de longueurs égale à :

- 5Φ pour un arc de 180° ;
- 10Φ pour un arc de 135° ;
- 15Φ pour un arc de 90° .



Exercice 10 :

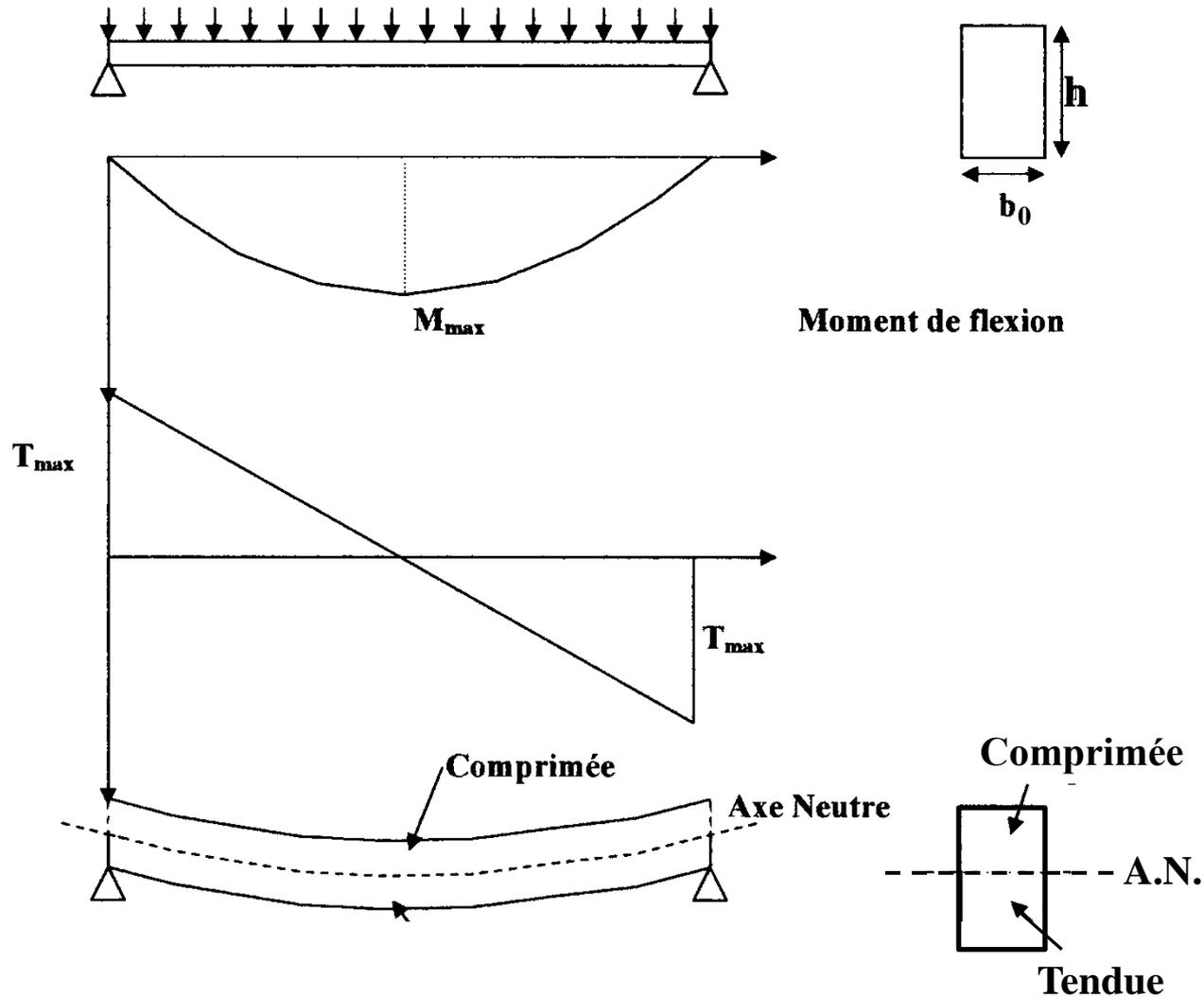
Déterminez la longueur équivalente de scellement droit pour une barre tendue d'un acier HA 20 de nuance Fe E 500. La barre appartient à une poutre intérieure prenant appui sur un poteau de rive. On donne : enrobage mini 3 cm ; crochet à 120° ; $L_1 = 8\Phi$; section du poteau 25cm x 25cm.

Exercice 11 :

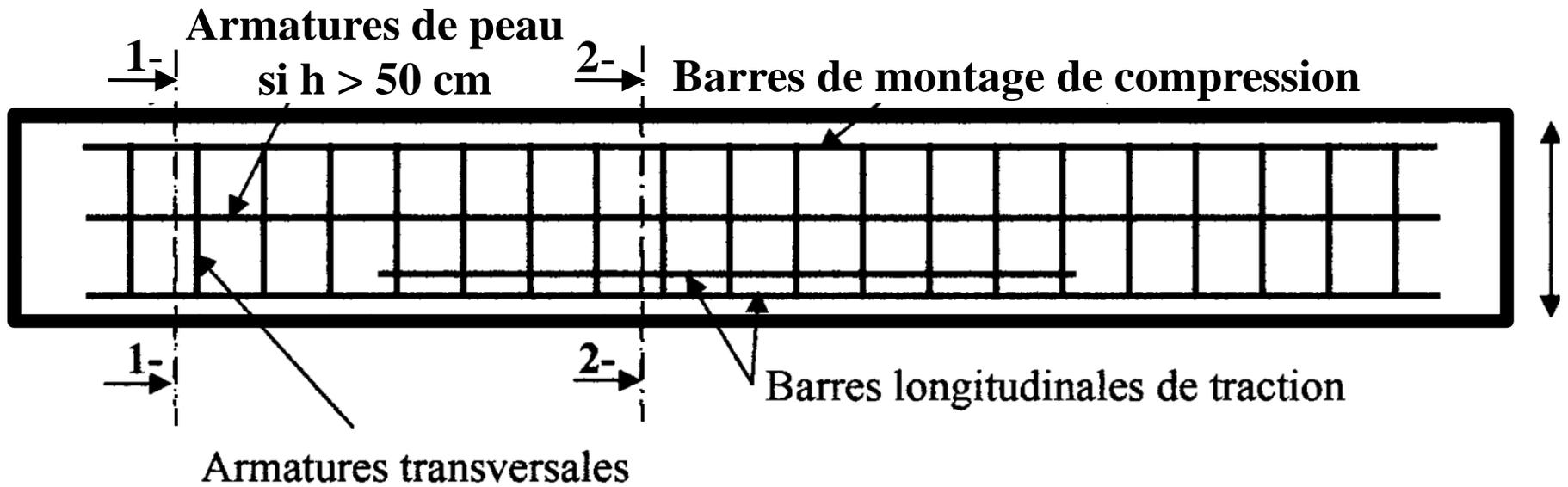
Calculer la longueur L_1 nécessaire pour assurer l'ancrage totale d'une barre HA 16 d'une poutre reposant à chaque extrémité sur un voile BA. On donne : $f_{c28} = 30$ MPa ; $f_e = 500$ MPa ; $\psi_s = 1,5$; enrobage mini 2,5 cm ; crochet à 135° ; épaisseur du voile 18cm.

IV Dispositions constructives

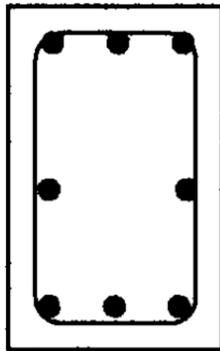
1) Introduction



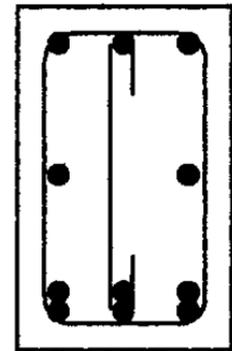
2) Ferrillages de la poutre



Coupe 1-1



Coupe 2-2



On distingue deux types d'armatures :

 Les armatures longitudinales

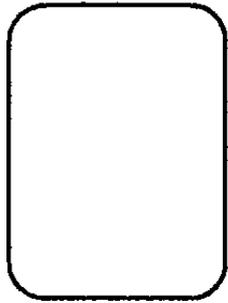
 Les armatures transversales

a – Les armatures longitudinales

On utilise généralement des barres de haute adhérence avec des diamètres supérieurs ou égales à 12 mm. Elles seront disposées dans la partie tendue de la poutre pour reprendre les efforts de traction (armatures principales). Dans la partie comprimée les barres de montage qui peuvent éventuellement reprendre une partie des efforts de compression lorsque le béton ne suffit pas. Pour les armatures de traction, il peut y avoir plusieurs nappes dans la partie où le moment est maximum.

b – Les armatures transversales

Elles sont appelées armatures de couture puisqu'elles coudent les fissures. Elles ont un diamètre inférieur à 10 mm. Il existe trois sorte d'armatures transversales.



cadre



étrier

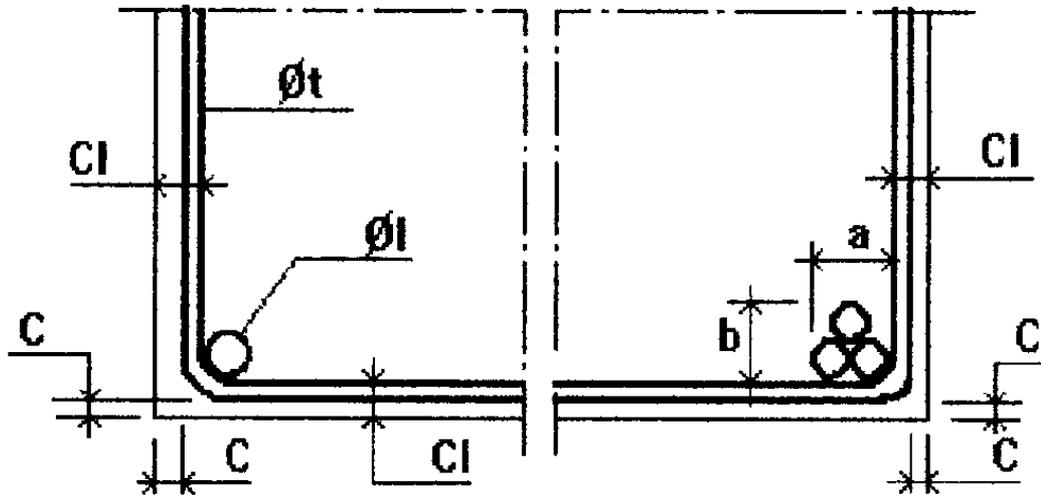


crochet

- Les armatures transversales sont disposées le long de la poutre, elles sont très rapprochées au niveau des appuis parce que l'effort tranchant est maximum.
- Les armatures transversales sont attachées aux barres longitudinales en maintenant leurs écartements.

3) Dispositions

a – Enrobages des barres



C enrobage
Cl enrobage des barres
longitudinales
a largeur du paquet de barres
b hauteur du paquet de barres

Φ_l est le diamètre des armatures longitudinales et Φ_t le diamètre des armatures transversales.

Suivant le cas et pour assurer une bonne protection des armatures contre la corrosion, il faut que l'enrobage C soit au minimum de 5cm, 3cm ou 1cm.

5cm : pour les ouvrages à la mer ou exposés aux embruns, aux brouillards salins, ainsi qu'à des atmosphères très agressives (cas des fissurations très préjudiciable).

Cet enrobage peut être ramené à 3cm si les armatures ou le béton sont protégés.

3cm : pour les parois coffrées ou non qui sont soumises (ou susceptibles de l'être) à des actions agressives, ou à des intempéries, à des condensations, ou encore, eu égard à la destination des ouvrages, au contact d'un liquide (cas des fissurations préjudiciable).

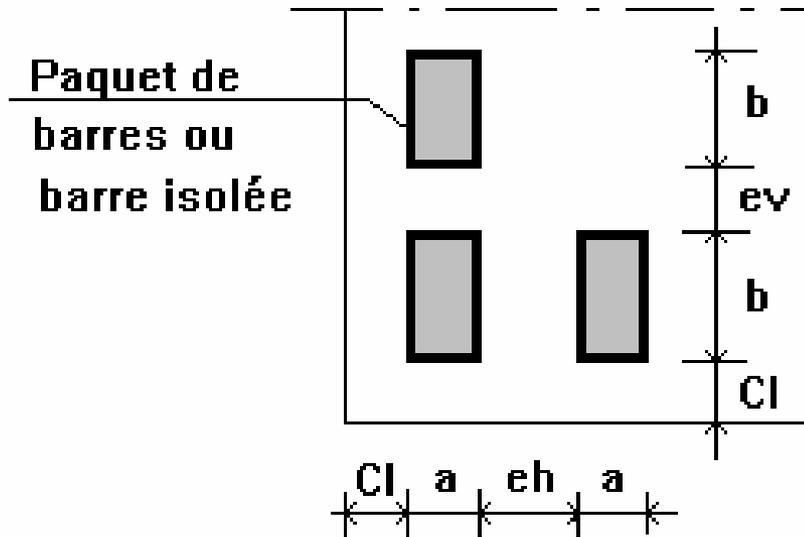
Cette valeur peut être ramenée à 2cm si $f_{c28} > 40$ MPa.

1cm : pour des parois qui seraient situées dans des locaux couverts et clos et non exposées aux condensations (cas des fissurations peu préjudiciable).

b – Bétonnage correct (eurocode2)

L'enrobage des barres Cl doit être :

- ➔ au moins égal à leur diamètre si elles sont isolées,
- ➔ égal à la largeur a du paquet si elles sont groupées.



De plus, elles doivent vérifier les espacements suivants :

$$Cl \geq \max(\text{enrobage} ; a ; Cg) ; eh \geq \max(a ; 1,5Cg) ; ev \geq \max(a ; Cg).$$

Cg = dimension du plus gros granulat utilisé.

c – Diamètre maximum (eurocode2)

Pour les plaques, les dalles, les coques et les hourdis, les mailles ne doivent pas être trop grandes (vérification du béton au poinçonnement) et le diamètre maxi des armatures doit vérifier :

$$\Phi_{\text{maxi}} \leq e/10$$

e = épaisseur de l'élément.

Pour les poutres, les armatures transversales Φ_t doivent vérifier :

$$\Phi_t = \inf (\Phi_l ; h/35 ; b_0/10)$$

Φ_l = diamètre des armatures longitudinales

h = hauteur de la poutre

b_0 = largeur de la poutre

d – Condition de rentré du béton dans le moule (eurocode2)

Durant sa mise en place, le béton doit passer à travers les mailles qui sont obtenus avec le ferrailage. Ces mailles sont caractérisées par un rayon r ($r = \text{la surface/le périmètre}$), de la plus petite maille qui existe.

$r \geq C_g/1,4$: gravier roulé et $r \geq C_g/1,2$ gravier concassé.

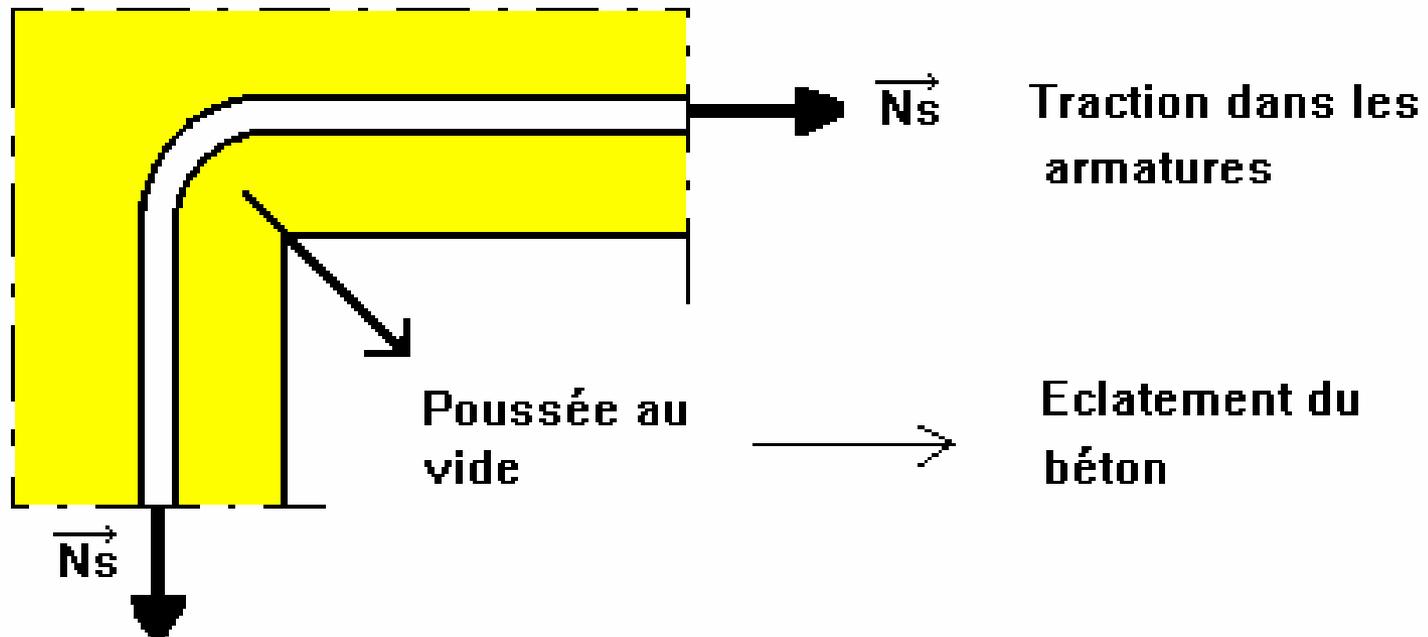
La difficulté opposée au remplissage d'un moule augmente à mesure que :

1. La dimension maximale du grain augmente (C_g).
2. Le pourcentage des graviers est élevé.
3. Si les graviers sont anguleux.
4. La consistance du béton est plus ferme.
5. Les moyens de vibration n'existent pas.

e – Poussée au vide

Présentation du problème

Toute armature courbe et tendue, exerce sur le béton une poussée dans le plan de courbure et du côté de la concavité. Si l'armature est comprimée, la poussée est exercée du côté de la convexité.



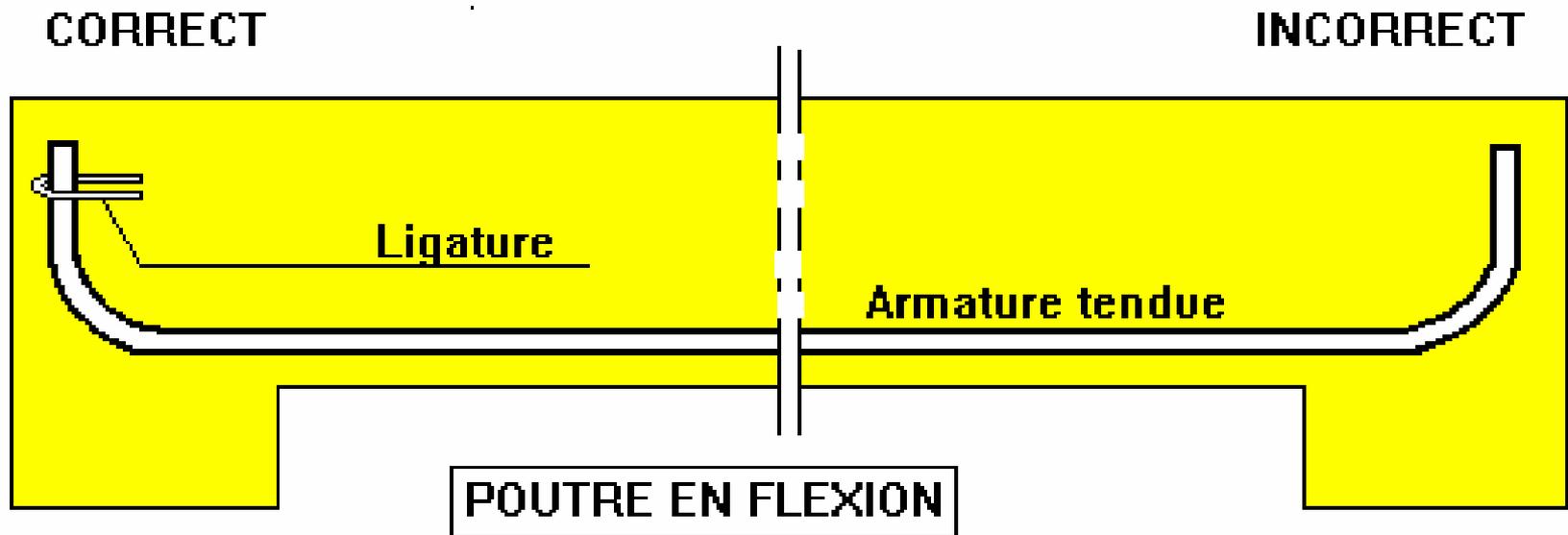
Constats

Si la poussée est orientée vers une face externe, il y a risque d'éclatement du parement. Il faut donc, pour éviter les poussées au vide, choisir un tracé judicieux des armatures. Par exemple, les poussées doivent être, dans les courbures, orientées vers la masse du béton.

Lorsque, par contre, des raisons constructives nous poussent à prévoir des poussées orientées vers le parement, il faut alors obligatoirement prévoir des ligatures ancrées dans la masse de l'élément (eurocode2).

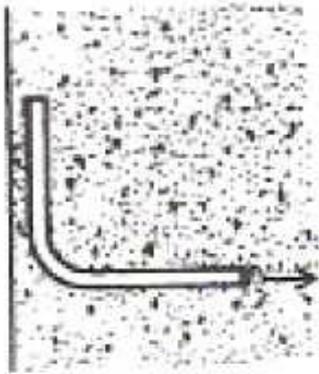
Exemple :

Problème particulier des ancrages avec retour d'équerre.

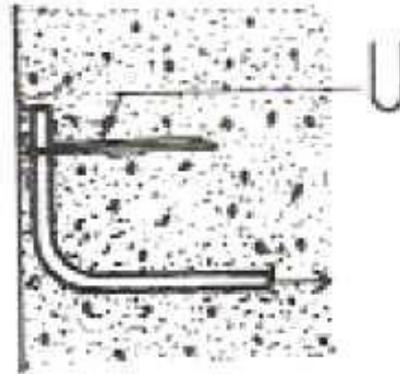


Solutions

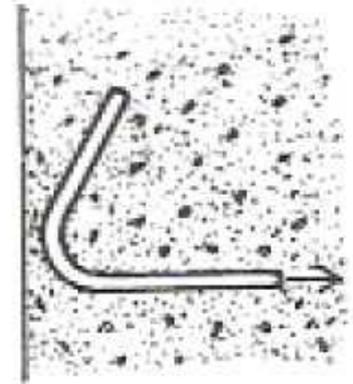
Il convient soit de disposer une ligature ancrée dans la masse du béton, soit mieux, d'incliner le retour de l'ancrage vers la masse du béton pour obtenir alors un crochet (eurocode2).



incorrect



correct



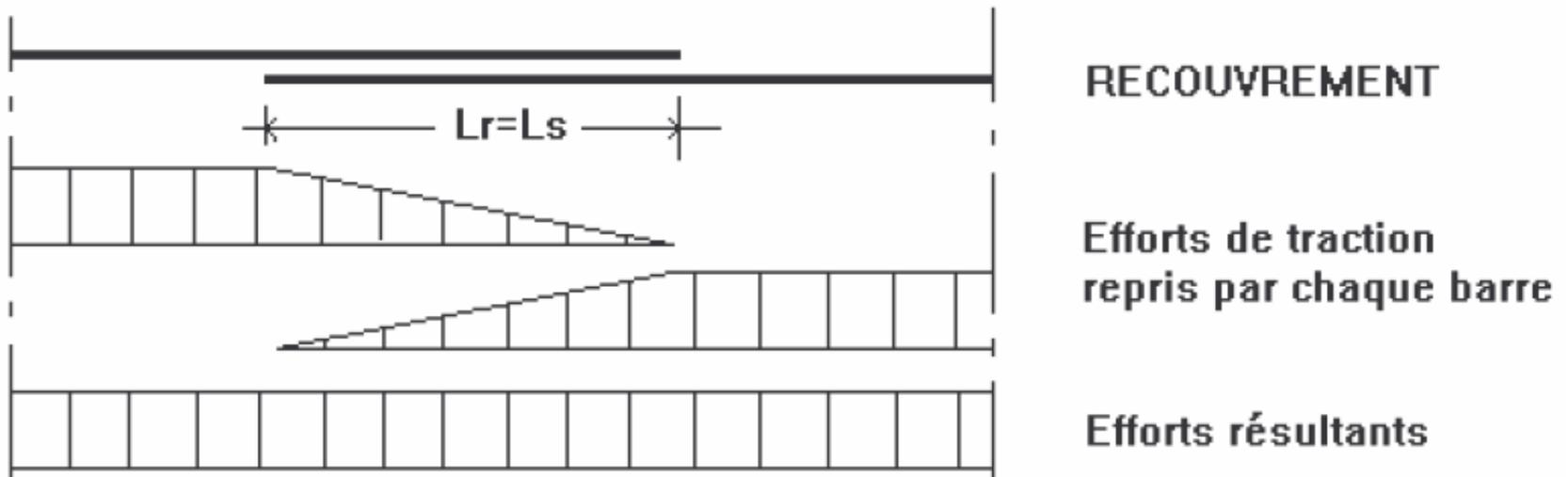
correct

4) Recouvrement

a – Principe et objectif

Les armatures trouvées dans le commerce ayant une longueur limitée, il est parfois nécessaire pour certains éléments de plus grande longueur, d'utiliser plusieurs barres. Pour établir la continuité entre les barres, nous effectuerons un recouvrement, c'est à dire que nous ferons chevaucher les barres sur une longueur L_r , dite longueur de recouvrement.

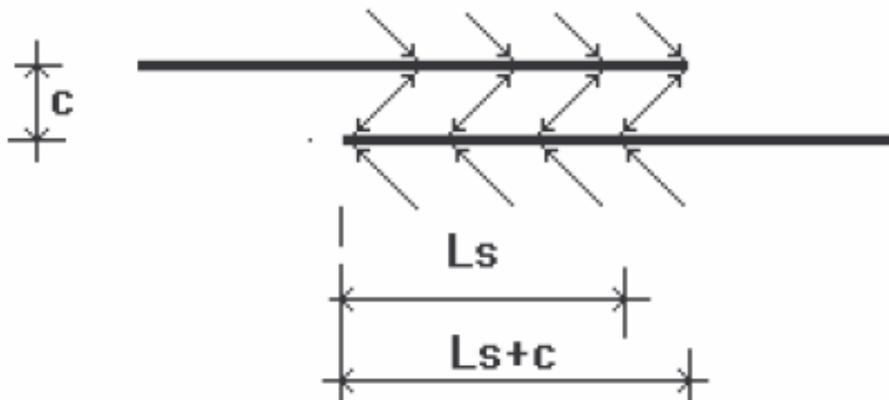
Cette longueur sera donc la longueur nécessaire pour assurer la transmission des efforts qui sollicitent l'armature. Il faut assurer la continuité mécanique au niveau du recouvrement en mobilisant l'adhérence et le frottement du béton sur l'armature.



b – Barres tendues rectilignes

Simple recouvrement des extrémités de barres

Les efforts sont transmis d'une barre à l'autre par le jeu de l'adhérence du béton.



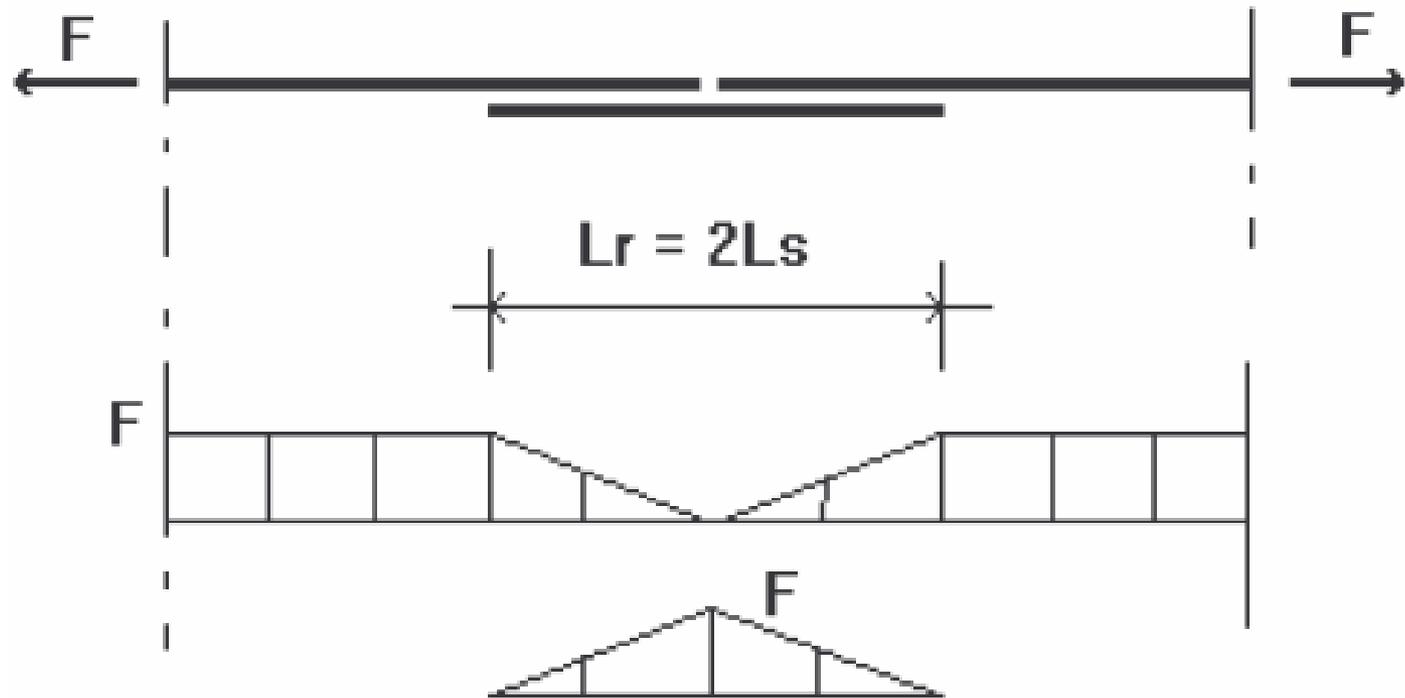
$$c \leq 5\emptyset \quad L_r = L_s$$

$$c > 5\emptyset \quad L_r = L_s + C$$

c est la distance entre les axes des deux barres.

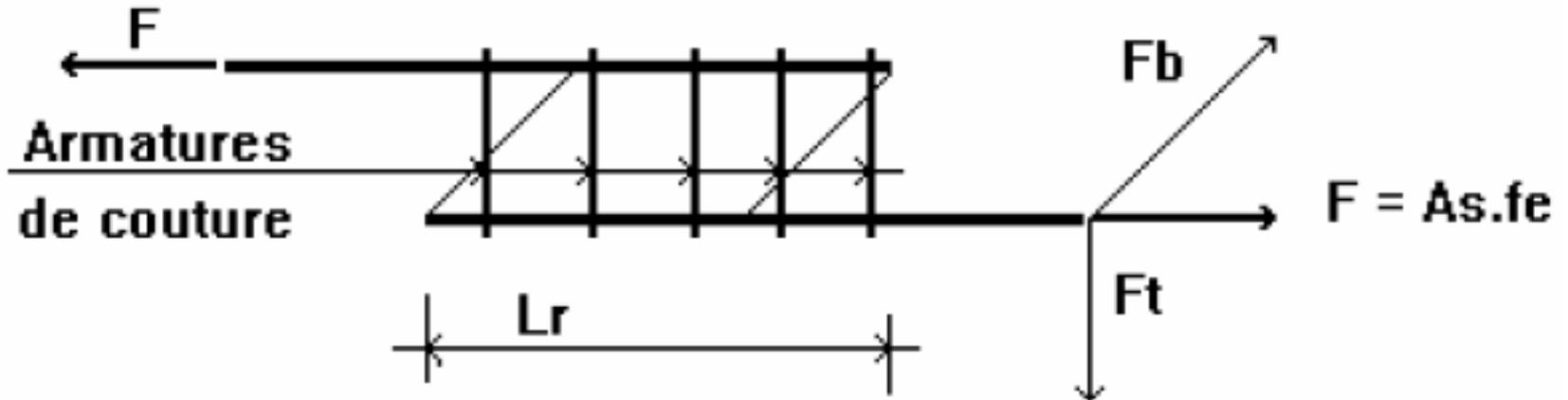
Recouvrement par couvre joint

Les deux barres sont dans le même alignement. La transmission est assurée par une troisième barre de même diamètre.



Armatures de couture des recouvrements

La transmission des efforts se fait toujours par des bielles inclinées à 45° sur l'axe de l'armature.



Les armatures de couture auront des petits diamètres de manière à assurer une bonne répartition de ces armatures sur la jonction.

Armatures de couture des recouvrements

Nous pouvons décomposer l'effort de traction : $F = A_s \times f_e$ en un composante oblique F_b équilibrée par les bielles de béton et une composante verticale F_t équilibrée par ces armatures de couture. Le calcul qui suit minimise les sections des brins.

Nous aurons : $\Sigma A_t \times f_{et} \leq A_s \times f_e$

Pour une bonne sécurité, le calcul des sections des brins se fait avec l'inégalité suivante : $\Sigma A_t \times f_{et} \geq A_s \times f_e$

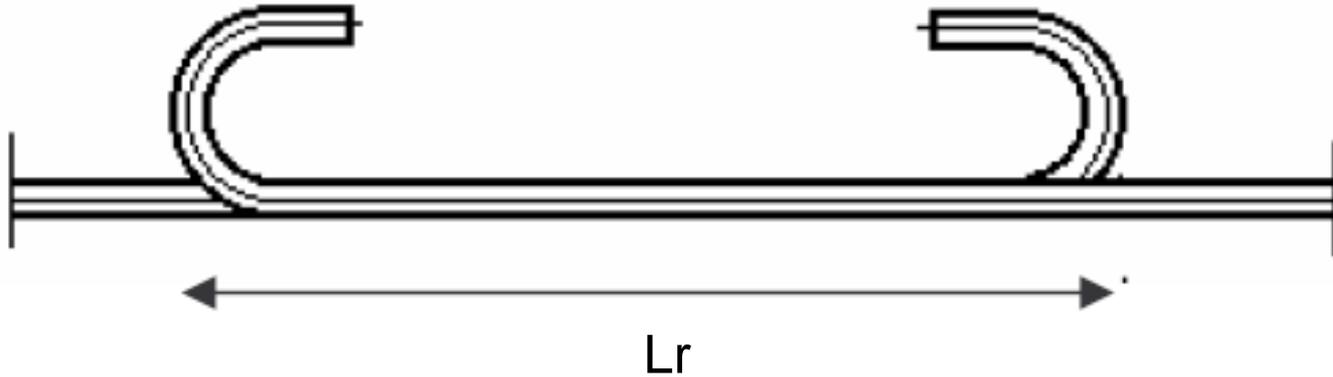
$\Sigma A_t \times f_{et}$: effort de traction dans les armatures de couture égal et opposé à la composante F_t .

f_{et} : limite élastique des aciers utilisés comme armatures de couture.

A_t : section totale des brins d'une nappe d'armatures de couture.

A_s : section des armatures à recouvrir et f_e leur limite élastique.

c – Barres tendues avec crochets normaux aux extrémités



si $c \leq 5\phi$

$$L_r = L_a$$

si $c > 5\phi$

$$L_r = L_a + c$$

avec : $L_a = 0,6L_s$ pour les aciers RL

$L_a = 0,4L_s$ pour les aciers HA

d – Jonctions de barres comprimées

La longueur de recouvrement peut être prise égale à :

$$L_r = 0,6L_s$$

Les valeurs forfaitaires deviennent alors pour les aciers hautes adhérence ($\psi_s = 1,5$).

Fe E 400 : $L_r = 34\Phi$

Fe E 500 : $L_r = 30\Phi$

Les jonctions peuvent se faire par aboutement de barres au contact en utilisant des « manchons ».

Exercice 12 :

Pour assurer la continuité des barres dans une poutre, on prévoit une jonction par simple recouvrement sans crochet de deux barres.

Calculer :

- 1) La longueur de recouvrement.
- 2) La section et la disposition des aciers de coutures.

On donne :

- nappe inférieure constituée de 4HA16 (Fe E 500).
- diamètre des cadres prévus : 6mm (Fe E 400).

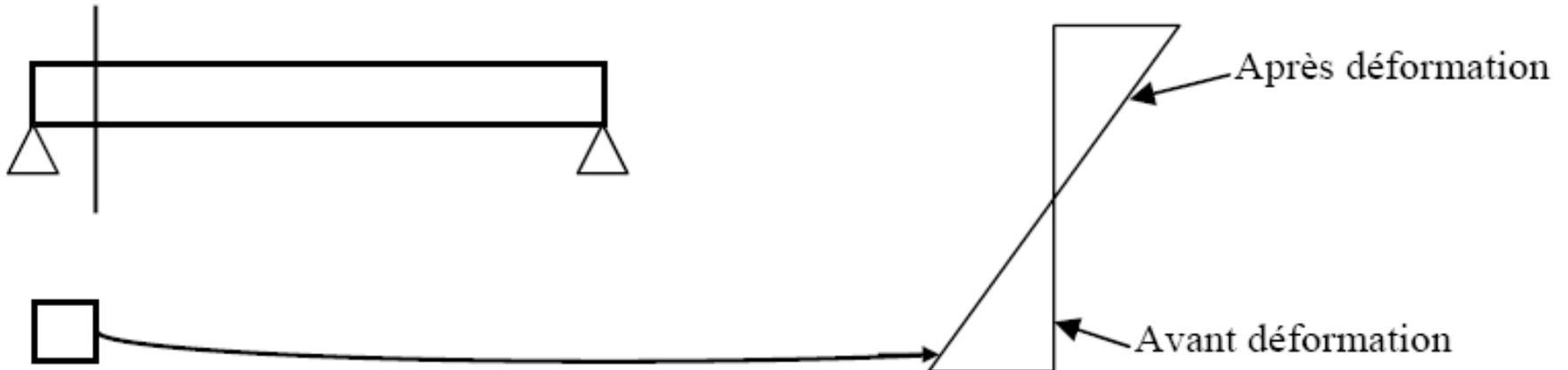
Chapitre VI

LES HYPOTHESES DE CALCUL REGLE DES TROIS PIVOTS

I Hypothèses à l'ELU

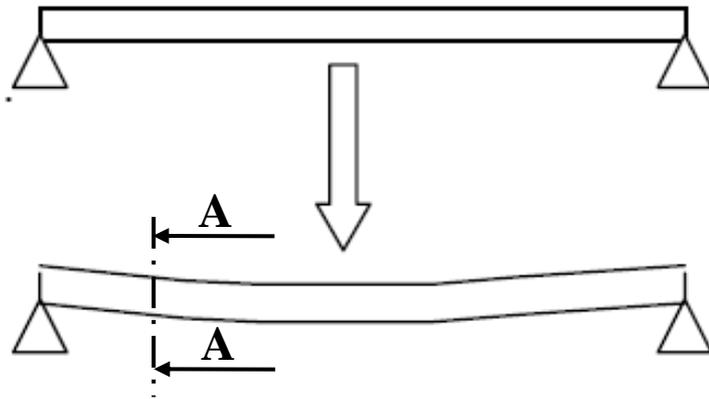
1) Hypothèse 1

Toute section plane avant déformation reste plane après déformation. Hypothèse de Navier

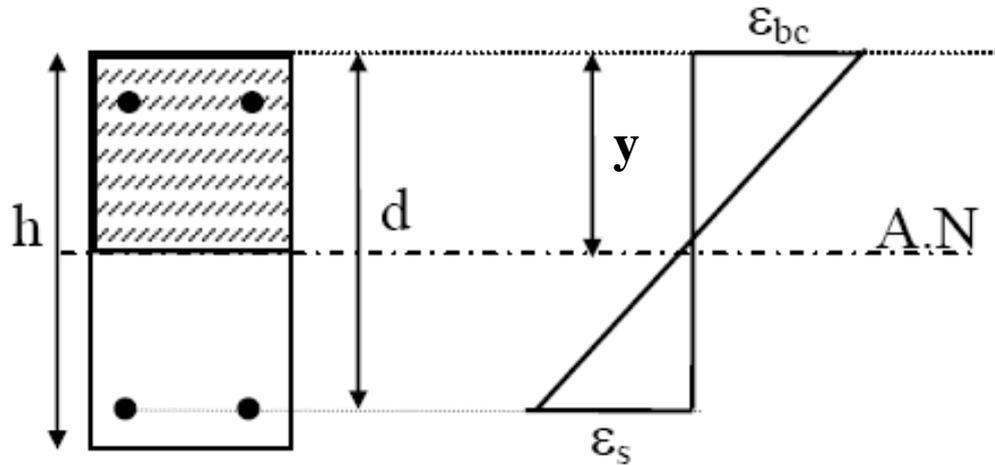


2) Hypothèse 2

Il n'y a pas de glissement relatif entre le béton et l'acier. La déformation des deux matériaux est la même. Les déformations des fibres sont proportionnelles à leurs distances par rapport à l'axe neutre.



Coupe A-A :



$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s}$$

$$\Rightarrow \epsilon_s = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \epsilon_{bc}$$

$$\text{ou } \epsilon_{bc} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \epsilon_s$$

Coupe A-A :

NOTATION :

- ϵ_{bc} : la déformation du béton à la compression.
- ϵ_s : la déformation de l'acier tendue.
- y : la distance de l'axe neutre à la fibre comprimée.
- d : la distance de la fibre la plus comprimée au centre de gravité des armatures tendues.

3) Hypothèse 3

La résistance du béton tendu est négligée ou la résistance à la traction du béton non prise en compte dans les calculs.

4) Hypothèse 4

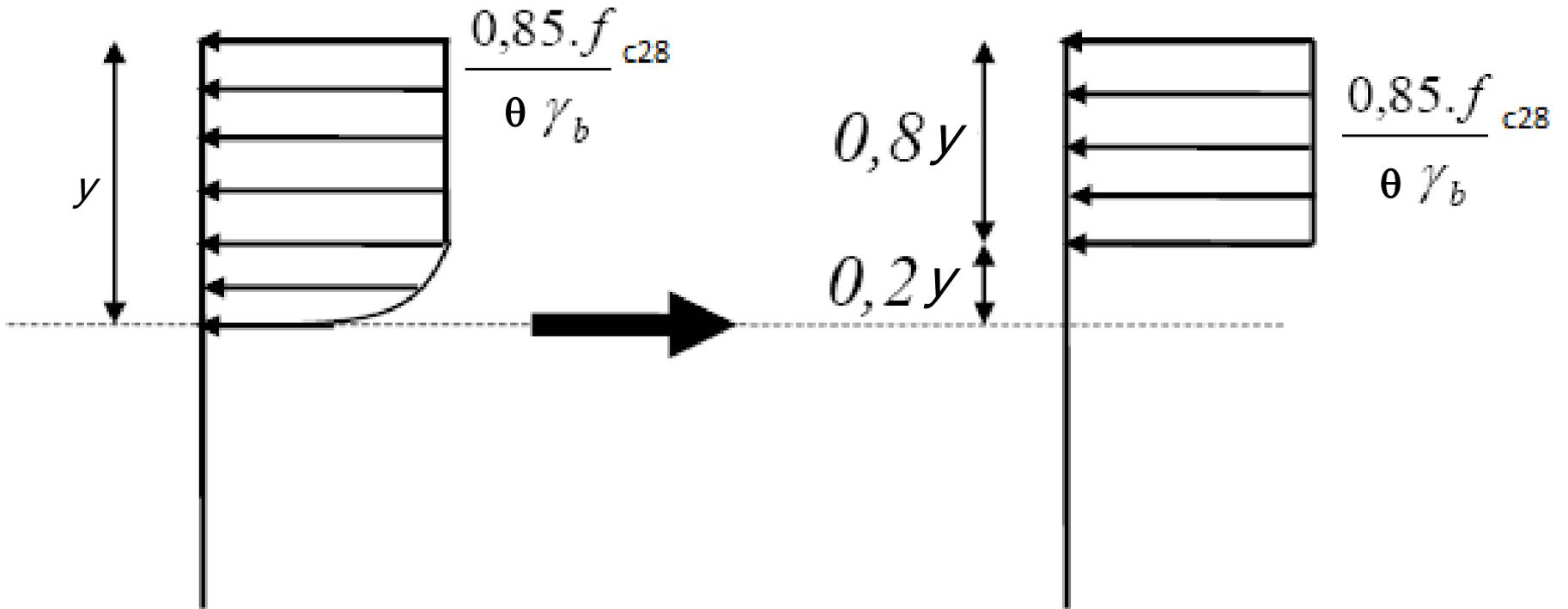
On suppose concentré en leur centre de gravité la section d'un groupe de plusieurs barres tendues ou comprimées, si l'erreur commise sur les déformations unitaires ne dépassent pas 15%.

5) Hypothèse 5

Le diagramme contrainte déformation du béton pouvant être utilisé dans tout les cas sera le diagramme parabole rectangle. Lorsque la section n'est pas entièrement comprimée, On peut utiliser le diagramme rectangulaire simplifié définit comme suit :

- Sur une distance de $0,2y$ à partir de l'axe neutre, la contrainte sera considérée comme nulle.
- Sur la distance qui reste soit $0,8y$, elle sera égale à :

$$\frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b}$$



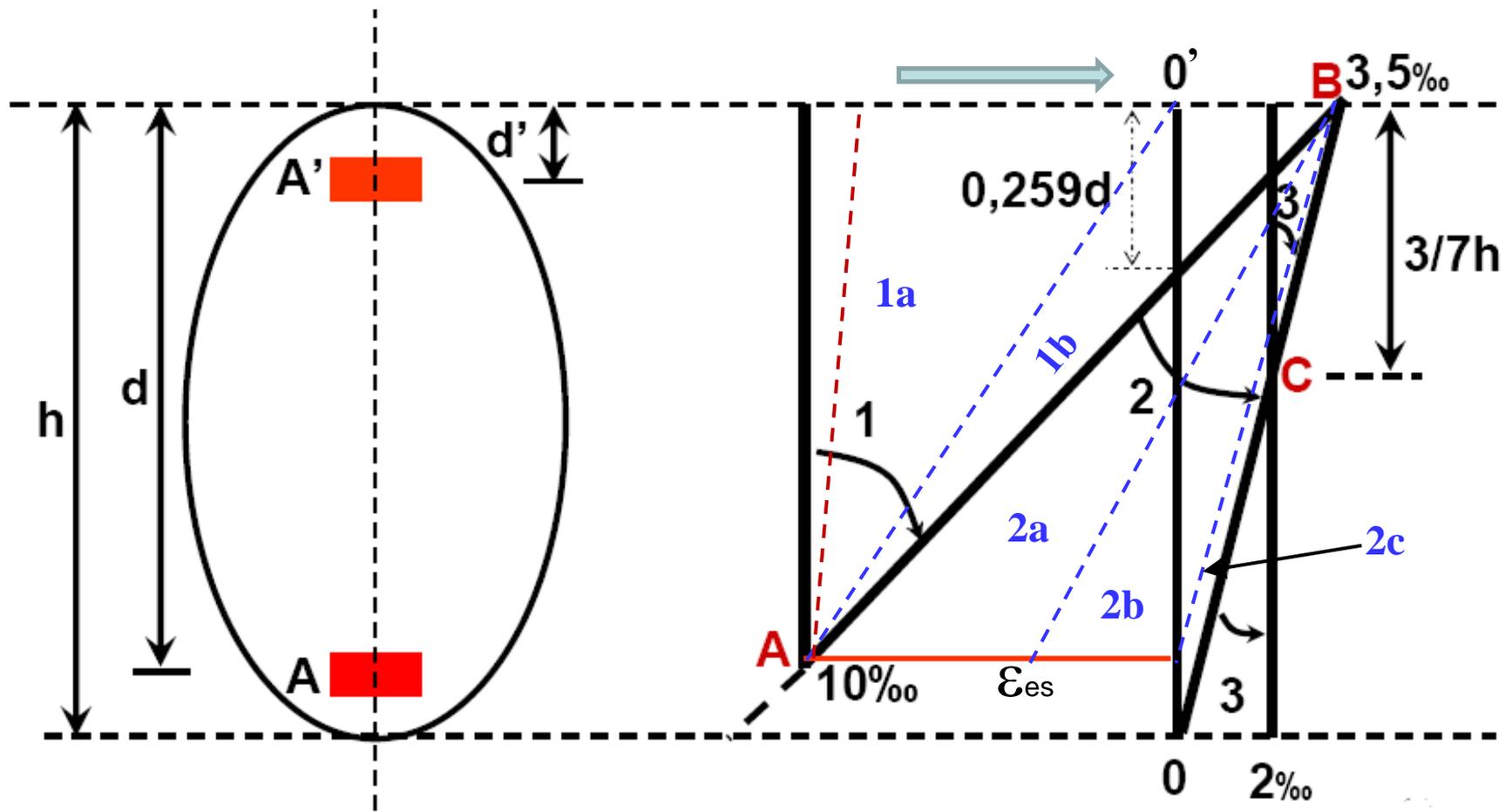
θ { 1 pour les charges appliquées plus de 24h
 0,9 entre $1h \leq \text{durée} \leq 24h$
 0,85 si la durée $< 1h$

γ_b { E.L.U. normal 1,5
 E.L.U. accidentel 1,15

6) Hypothèse 6

Règle des trois pivots :

- Une section de béton soumise à des sollicitations normales se déforme suivant l'hypothèse de Navier.
- Les positions limites que peut prendre la droite de déformation sont déterminés à partir des diagrammes contrainte déformation du béton et de l'acier. Le raccourcissement unitaire du béton est limité de 3,5 ‰ en compression et l'allongement unitaire des aciers sera limité à 10 ‰.
- La déformation d'une section à l'état limite ultime de résistance est représenté par une droite passant par l'un des pivots «**A**», «**B** », ou «**C**», à l'intérieure ou à la frontière des domaines repérés (1), (2), (3) sur la figure qui suit.



OO' : section avant déformation

Ce diagramme sera divisé en 3 domaines :

Le domaine (1) : les diagrammes passent par le pivot A qui correspond à un allongement maximum de 10‰, les armatures tendues supposées concentré en leur centre de gravité.

On distingue deux sous domaines :

le sous domaine 1a : le béton est toujours tendue et ne participe pas à la résistance de la section. Nous avons une traction simple ou une flexion composée avec une section entièrement tendue.

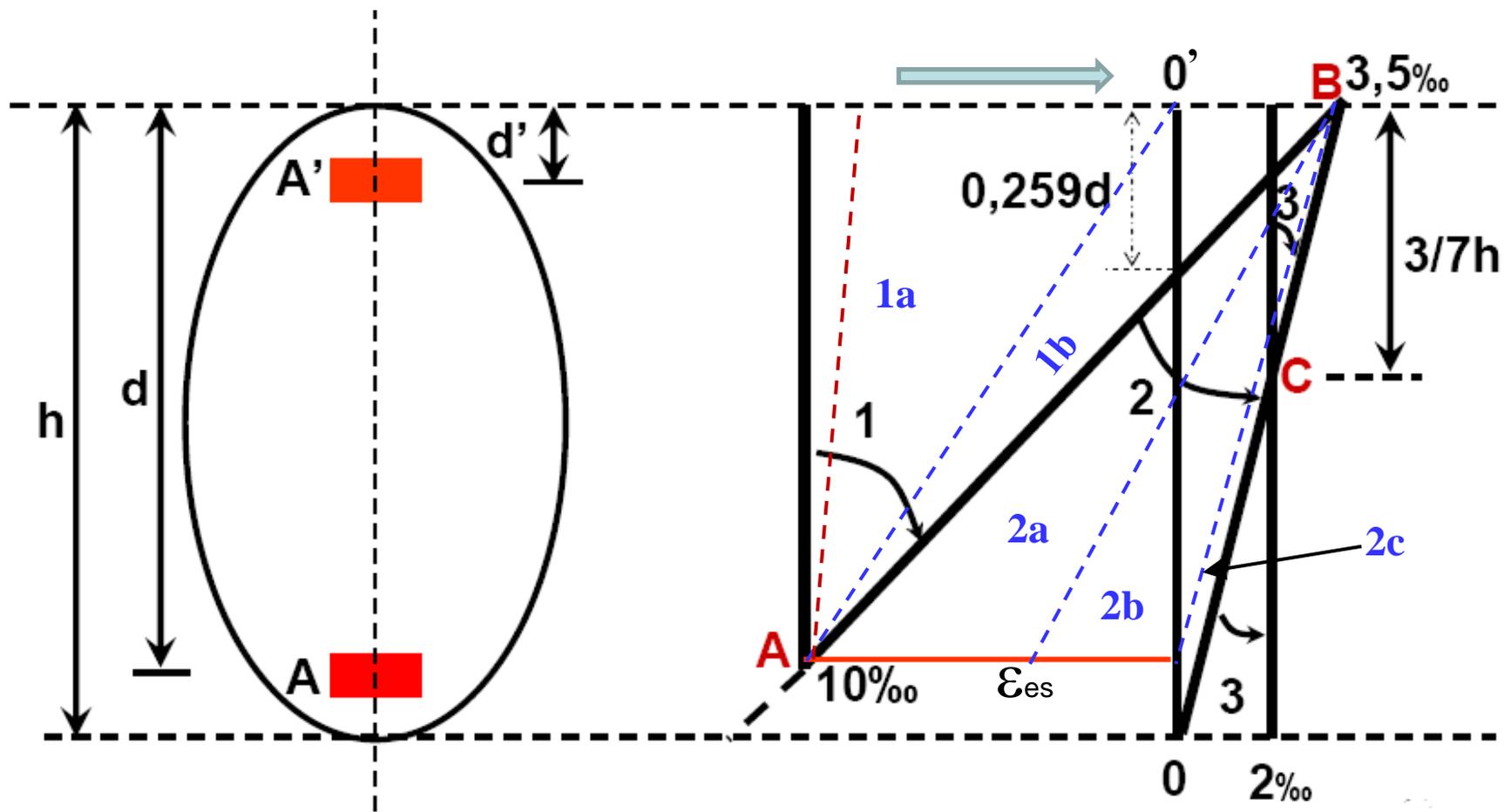
le sous domaine 1b : le béton est partiellement comprimé. Nous avons une flexion simple ou composée avec une section partiellement comprimée.

Le domaine (1) sera décrit par la condition suivante :

$$0 < \alpha = \frac{y}{d} \leq \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{st}} = \frac{3,5}{3,5 + 10} = 0,259$$

$$0 < \alpha \leq 0,259 \text{ et } y = \alpha d$$

$$0 < y \leq 0,259 d$$



Le domaine (2) : les diagrammes passent par le pivot B correspondant à un raccourcissement de la fibre la plus comprimée de 3,5‰.

On distingue trois sous domaines :

le sous domaine 2a : l'allongement des armatures est supérieure à l'allongement élastique (ϵ_{es}), donc les armatures sont plastifiées. Nous avons une flexion simple ou une flexion composée.

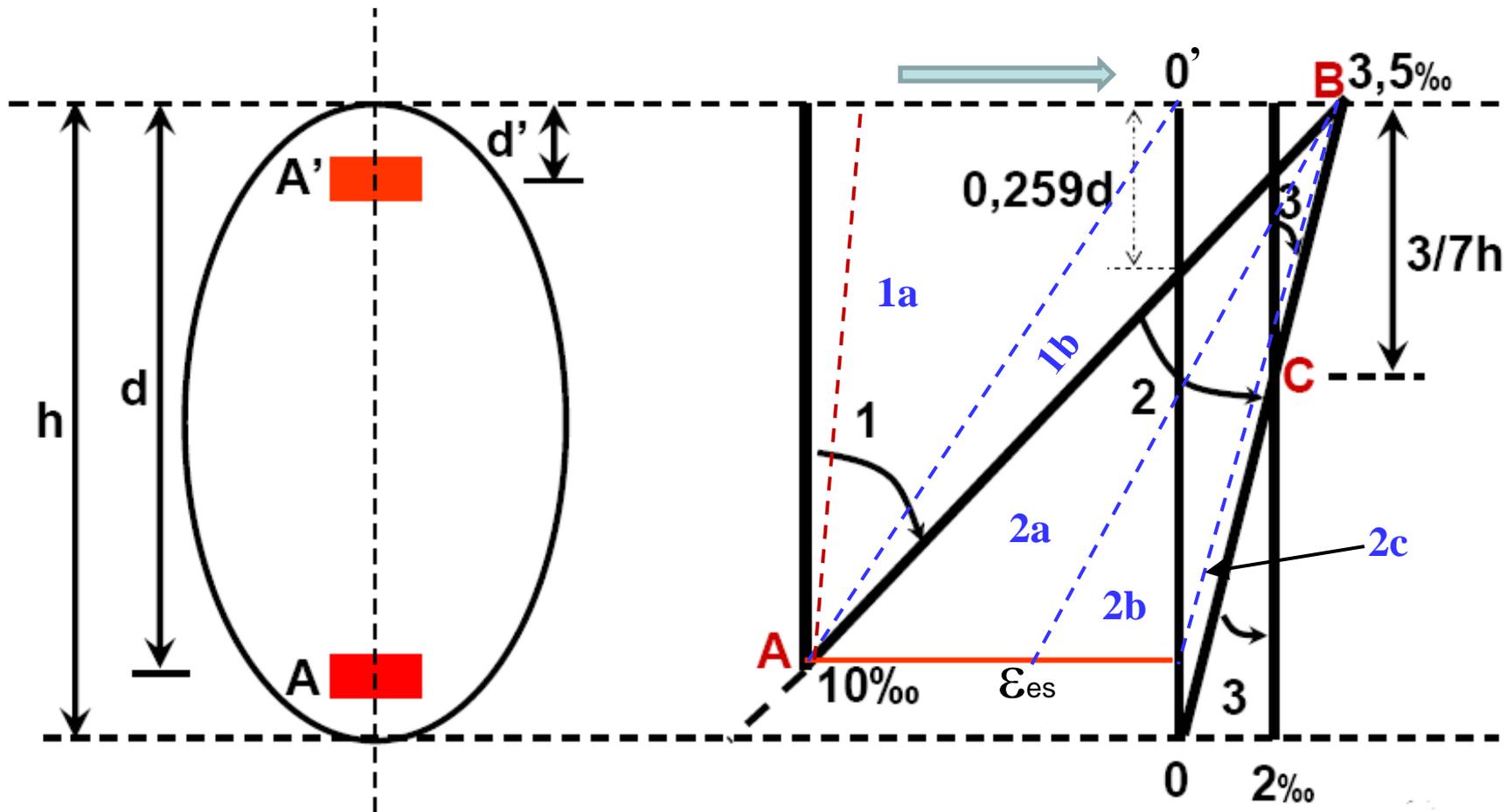
le sous domaine 2b : L'allongement des armatures tendues est inférieure à l'allongement élastique (ϵ_{es}) et la contrainte dans l'acier sera inférieure à f_e/γ_s . Nous avons une flexion composée avec une section partiellement ou entièrement comprimée.

le sous domaine 2c : les armatures seront comprimées.

Le domaine (2) sera décrit par la condition suivante :

$$0,259 < \alpha \leq \frac{h}{d} \text{ et } y = \alpha d$$

$$0,259d < y \leq h$$



Le domaine (3) : les diagrammes passent par le pivot qui correspond à un raccourcissement de 2‰ de la fibre du béton située à $3h/7$ de la fibre supérieure. La section est entièrement comprimée. Nous avons une flexion composée ou une compression simple.

Le domaine (3) sera décrit par la condition suivante :

$$\alpha \leq \frac{h}{d} \quad \text{ou} \quad y \leq h$$

II Hypothèses à l'ELS : Durabilité de la structure

1) Hypothèse 1

les sections droites planes avant déformation restent planes après déformation et Il n'y a pas de glissement relatif entre le béton et l'acier.

2) Hypothèse 2

La résistance à la traction du béton tendu est négligée.

3) Hypothèse 3

Le béton et l'acier seront considérés comme des matériaux linéaires élastiques, donc on leur applique la loi de HOOKE :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \text{ et } \sigma_b = E_b \cdot \varepsilon_b$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_b \implies \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_s}{E_s} \text{ ou } \frac{\sigma_s}{\sigma_b} = \frac{E_s}{E_b}$$

On pose $\frac{E_s}{E_b} = n$ *n : coefficient d'équivalence.*

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{F/S_s}{F/S_b} = \frac{S_b}{S_s} \Rightarrow S_b = nS_s$$

$$E_s \approx 200000 \text{ MPa}$$

$$E_b \approx 3700 \sqrt[3]{f_{cj}} \text{ MPa}$$

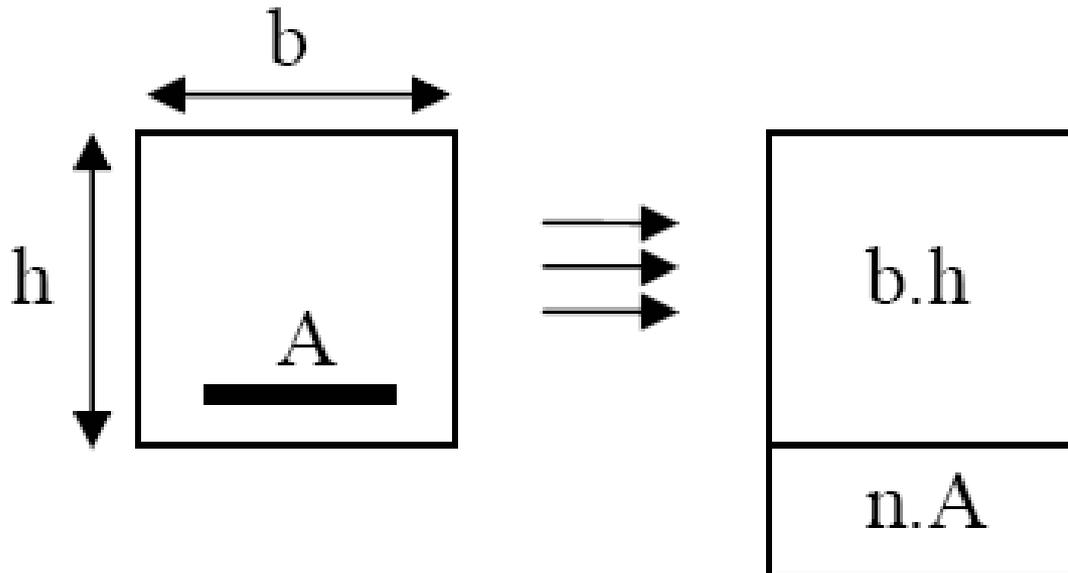
ou

$$E_b \approx 11000 \sqrt[3]{f_{cj}} \text{ MPa}$$

Euro code 2 : $n = 15$

Homogénéisation de la section :

pour pouvoir appliquer au béton armé qui est un matériau hétérogène les règles de la R.D.M. pour les corps homogènes, Il sera nécessaire d'homogénéiser la section de béton armé. Une section d'acier travaille n fois plus qu'une même section de béton. Donc *une section d'acier $\Leftrightarrow n$ fois qu'une section de béton*. Pour homogénéiser la section de béton armé, on remplace la section d'acier par n fois sa section de béton.



4) Hypothèse 4

On ne tient pas compte du fluage de béton et du retrait.

5) Hypothèse 5

On suppose concentré en leur centre de gravité un ensemble de plusieurs barres.

6) Remarque

Les aires des aciers ne sont pas déduites, dans les calculs, de l'aire du béton comprimé.

III Application aux sections courantes du BA

1) Principe de calcul

- Le béton tendu est négligé dans le calcul du CDG et de I_G .
- Le moment quadratique des aciers I_A par rapport à l'axe passant par leur propre centre de gravité est également négligé.
- La section d'acier est prise équivalente à une section fictive de béton avec un coefficient d'équivalence n pris égale à 15.
- La hauteur utile de la section (symbole d) est égale à la distance de la fibre la plus comprimé du béton au CDG des aciers tendus.

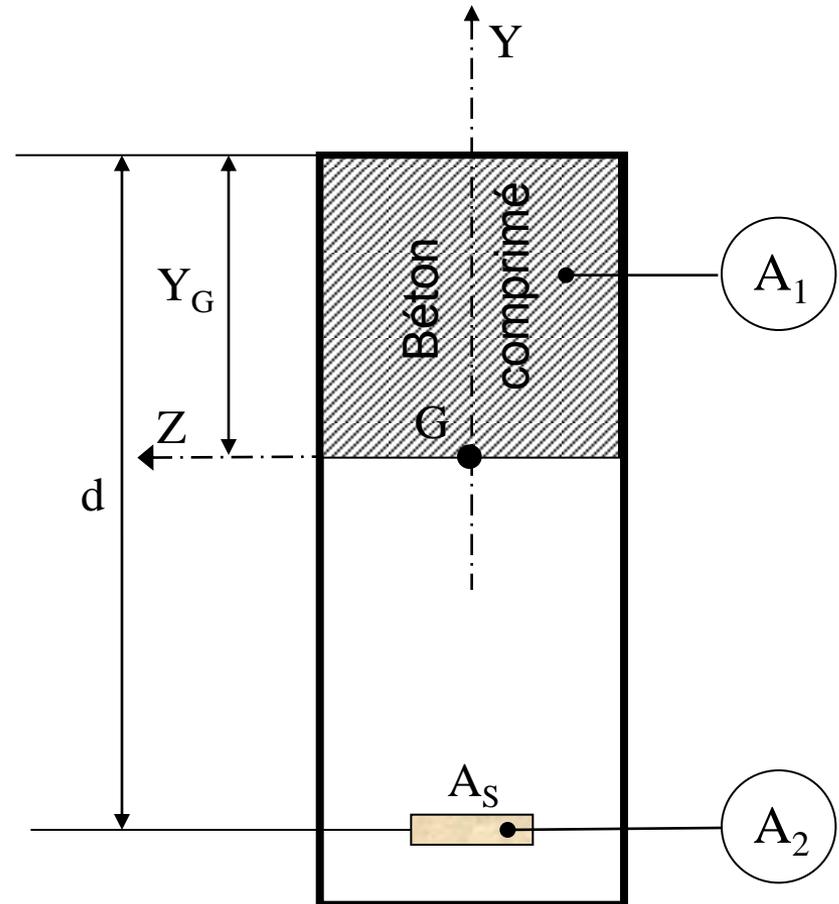
2) Cas d'une section rectangulaire

a - Calcul de I_{GZ}

$$I_{GZ} = \frac{bY_G^3}{3} + n.A_s.(d - Y_G)^2$$

Y_G est la solution de l'équation :

$$\frac{bY^2}{2} - n.A_s.(d - Y) = 0$$



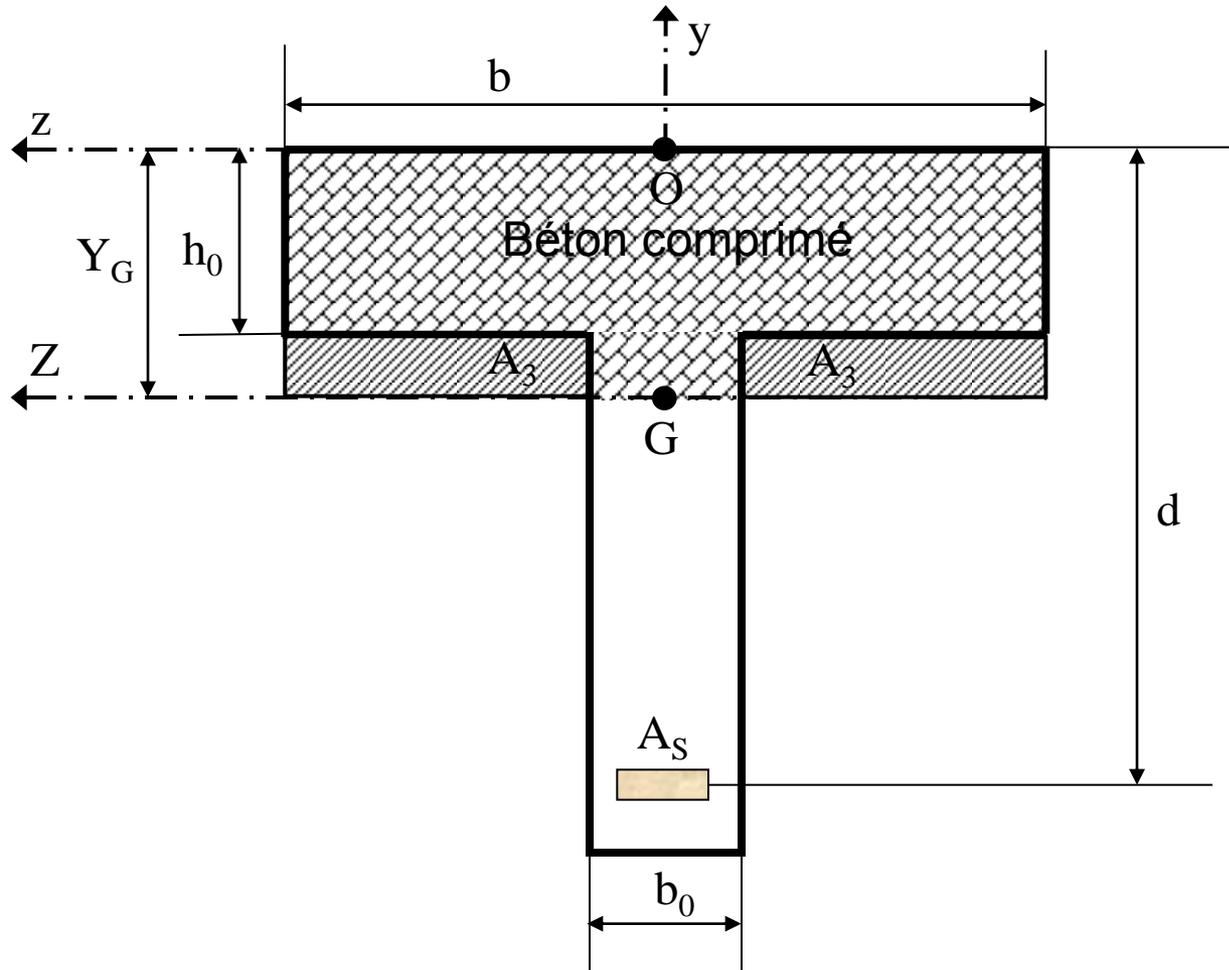
b - Calcul de y_G

$$\begin{array}{lll} A_1 = b.Y & y_1 = \frac{Y}{2} & M_{S1}/Oz = \frac{bY^2}{2} \\ A_2 = n.A_s & y_2 = -(d - Y) & M_{S2}/Oz = -n.A_s.(d - Y) \end{array}$$

$$\sum M_S/GZ = 0 \Rightarrow \frac{bY^2}{2} - n.A_s.(d - Y) = 0$$

3) Cas d'une section en forme de T

Cas ou $Y=Y_G > h_0$.



a - Calcul de y_G

Aire	Distance	Moment statique/Gz
$b.Y$	$\frac{Y}{2}$	$\frac{b.Y^2}{2}$
$(b - b_0).(Y - h_0)$	$\frac{(Y - h_0)}{2}$	$(b - b_0). \frac{(Y - h_0)^2}{2}$
$n.A_s$	$-(d - Y)$	$- n.A_s.(d - Y)$

Y_G est la solution de l'équation :

$$\sum M_s/GZ = 0 \Rightarrow \frac{bY^2}{2} - (b - b_0). \frac{(Y - h_0)^2}{2} - n.A_s.(d - Y) = 0$$

b - Calcul de I_{GZ}

Aire

$$b \cdot Y_G$$

$$(b - b_0) \cdot (Y_G - h_0)$$

$$n \cdot A_s$$

Moment quadratique I_{GZ}

$$\frac{b \cdot Y_G^3}{3}$$

$$(b - b_0) \frac{(Y_G - h_0)^3}{3}$$

$$n \cdot A_s (d - Y_G)^2$$

$$I_{GZ} = \frac{b Y_G^3}{3} - (b - b_0) \cdot \frac{(Y_G - h_0)^3}{3} + n \cdot A_s \cdot (d - Y_G)^2$$

Exercice 13 :

Calculer la position y_G du centre de gravité et le moment d'inertie I_{GZ} , pour les sections BA suivantes :

1) Section rectangulaire :

$$b = 20 \text{ cm} ; d = 60 \text{ cm} ; A_s = 4\text{HA}20.$$

2) Section en T :

$$b_0 = 20 \text{ cm} ; b = 80 \text{ cm} ; h_0 = 12 \text{ cm} ; d = 60 \text{ cm}.$$

$$A_s = 1\text{HA}20 + 8\text{HA}25.$$

IV Hypothèses à l'ELS : Compression du béton

La contrainte de compression du béton est limitée à $0,6 f_{c28}$.

$$\sigma_{bc} \leq 0,6 f_{c28}$$

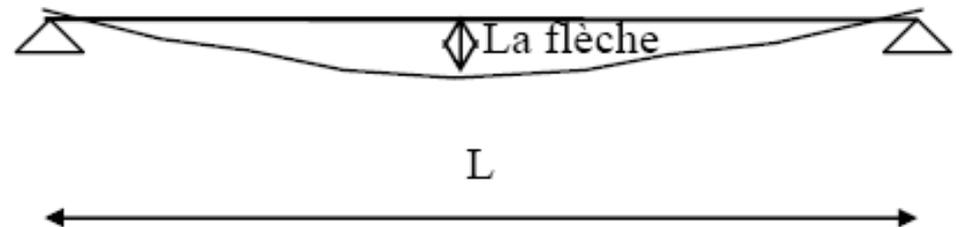
V Hypothèses à l'ELS de déformation:

La flèche d'une poutre ne doit pas dépasser :

$$L/500 \text{ si } L \leq 5\text{m}$$

$$L/1000 + 0,5\text{cm si } L > 5\text{m}$$

L est exprimé en cm.



VI Hypothèses à l'ELS : Ouverture des fissures

1) Fissuration peu préjudiciable

Aucune vérification n'est demandé et la contrainte dans les aciers est limitée à f_e . La fissuration est considérée comme peu préjudiciable, lorsque l'élément à vérifier est situé dans les locaux couverts.

2) Fissuration préjudiciable

la fissuration considérée comme préjudiciable si les éléments sont exposés aux intempéries (pluie, neige, vent, etc...) ou bien en contact avec l'eau. La contrainte de traction dans les armatures tendues sera limitée à la valeur suivante :

$$\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{2}{3} f_e ; 110 \sqrt{\eta f_{t28}} \right)$$

Coefficient de
fissuration η

1,0 pour les RL et les TSL

1,3 pour les HA et les TSHA $\Phi < 6\text{mm}$

1,6 pour les HA et les TSHA $\Phi \geq 6\text{mm}$

3) Fissuration très préjudiciable

La fissuration sera considérée comme très préjudiciable si l'élément est soumis à un milieu agressif. La contrainte de traction des armatures tendues sera limitée par la valeur suivante :

$$\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{1}{2} f_e ; 90 \sqrt{\eta f_{t28}} \right)$$

Coefficient de
fissuration η

1,0 pour les RL et les TSL

1,3 pour les HA et les TSHA $\Phi < 6\text{mm}$

1,6 pour les HA et les TSHA $\Phi \geq 6\text{mm}$

Exercice 14 :

Soit des barres (de nuance FeE400 et de diamètre $\Phi = 6\text{mm}$), utilisées dans une construction se trouvant dans un milieu agressif. Le béton a une résistance de $f_{c28} = 25\text{ MPa}$.
Calculez les contraintes limites à l'ELS?

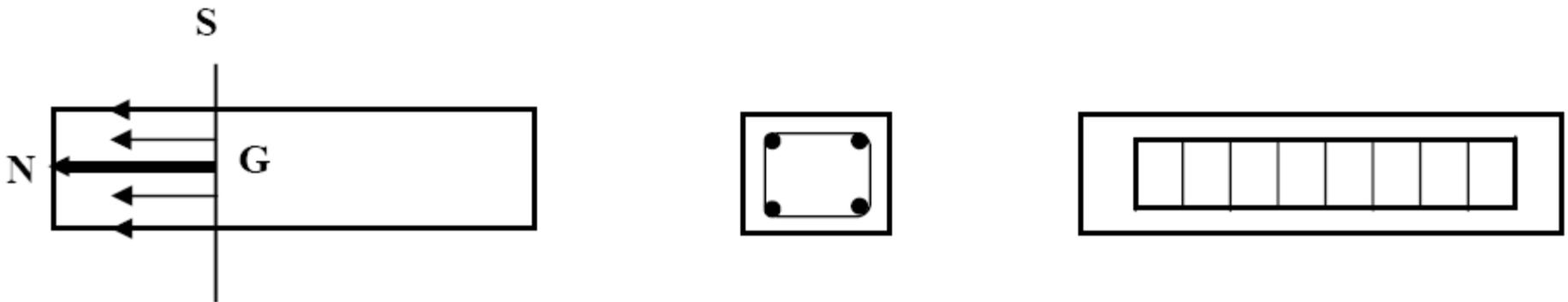
Chapitre VII

LA TRACTION

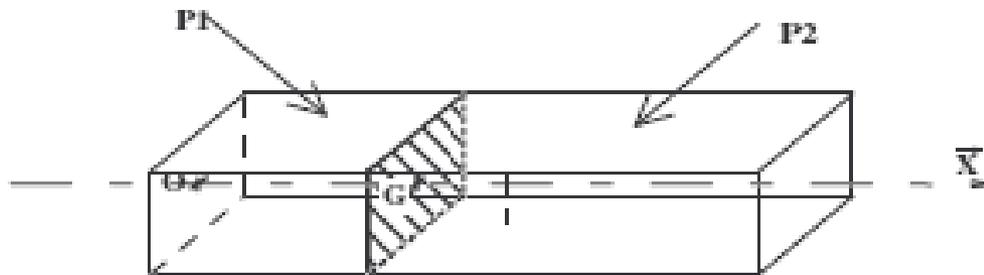
I Définitions et hypothèses

1) Définitions

Une pièce est sollicitée en traction simple si l'ensemble des forces extérieures agissant d'un même côté d'une section se réduit à une force normale volumique perpendiculaire à la surface et appliquée au centre de gravité.

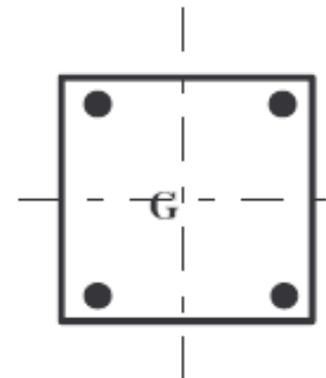
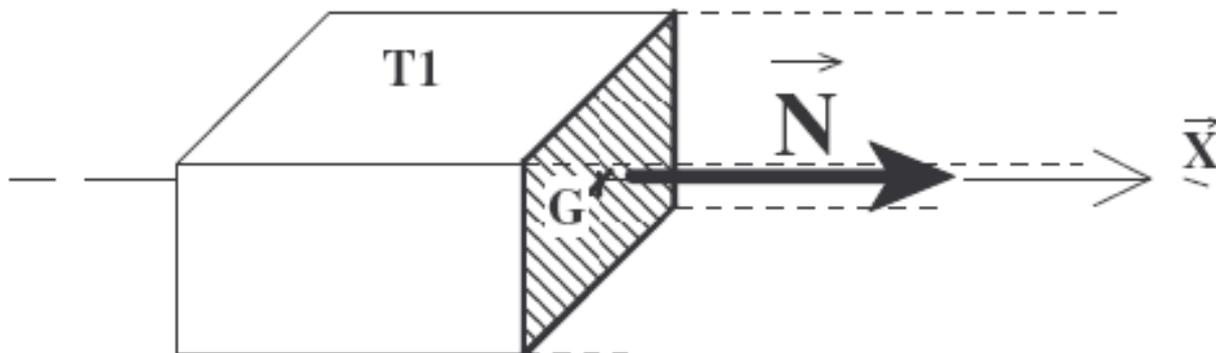


Dans toute section S d'abscisse x, les éléments de réduction du torseur de cohésion (actions de la partie droite sur la partie gauche) sont au centre de gravité de S.



$$\left\{ \begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

N positif



Dans chaque section droite le centre de gravité des armatures longitudinales coïncide avec le centre de gravité du béton et avec le point d'application de la force de traction.

Les pièces soumises à la traction seront appelées **des tirants**.

Il y en a deux sortes :

 Tirants rectilignes

 Tirants circulaires

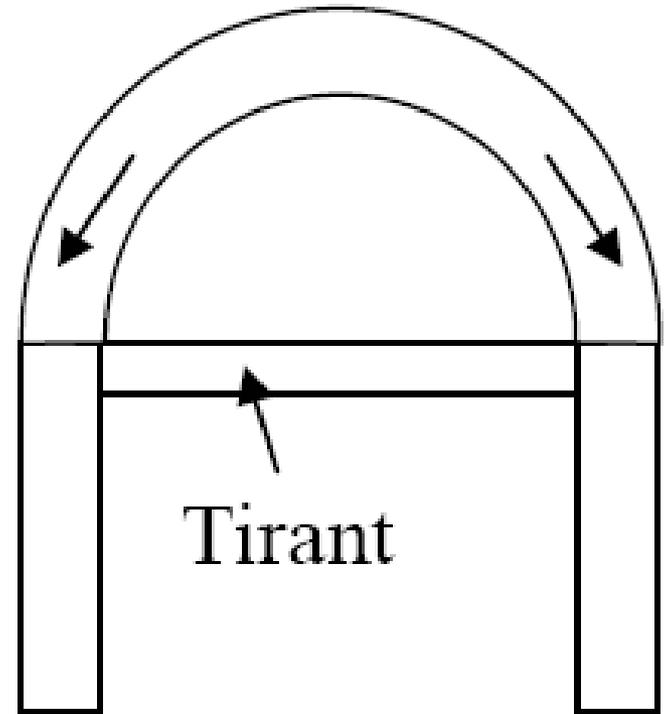
Les tirants servent à équilibrer les poussées horizontales (par exemple les poussées engendrées par un arc), et les actions verticales (par exemple les suspentes).

2) Tirants rectiligne

Ils sont normalement utilisés pour les couvertures voûtées.

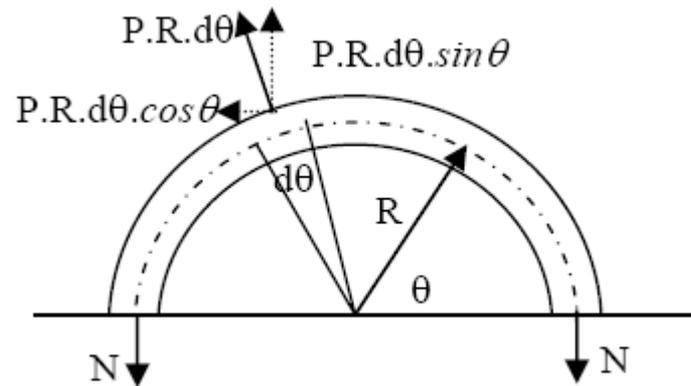
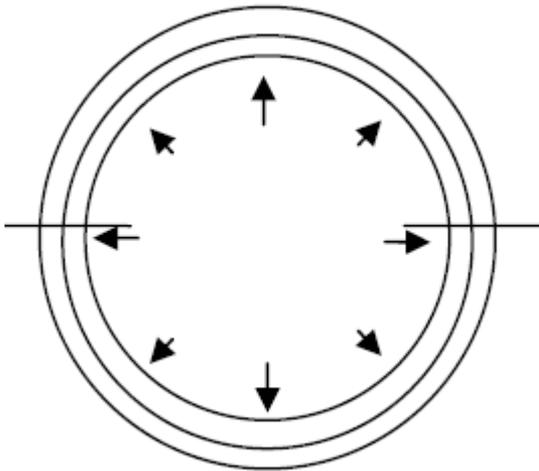
Les armatures longitudinales résistent à l'effort de traction.

Les armatures transversales ne jouent qu'un rôle de montage. La section de béton devra être aussi petite que possible et les barres doivent être réparties uniformément dans la section (il faut respecter la symétrie et choisir un nombre paire).



3) Tirants circulaire

Ils sont normalement utilisés dans les parois de réservoirs circulaires et des silos.



Projection verticale :

$$\int_0^{\pi} P \cdot R \cdot \sin \theta \cdot d\theta - 2 \cdot N = 0$$

$$- P \cdot R \cdot \cos \theta \Big|_0^{\pi} - 2 \cdot N = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot P \cdot R - 2N = 0$$

d'où : $N = P \cdot R$

N est la force par unité de longueur du tirant circulaire.

4) Hypothèses d'études

- ❖ La résistance du béton tendu n'est pas prise en compte.
- ❖ L'effort normale N est uniquement équilibré par les aciers.
- ❖ Même centre de surface (CdG) pour la section de béton et pour la section des armatures.
- ❖ La condition d'équilibre statique doit être satisfaite :
 - À l'ELUR $\rightarrow N_u$
 - A L'ELS $\rightarrow N_{ser}$

5) Contraintes de calcul

a – État limite ultime de résistance ELUR

- ❑ Déformation de l'acier : $\epsilon_s = 10\text{‰} \rightarrow$ pivot A.
- ❑ Contrainte de traction $f_{su} = f_e / \gamma_s$.

b – État limite de service ELS

- ❑ État limite d'ouverture de fissures. La contrainte de traction des aciers σ_{st} est borné suivant les cas de fissuration préjudiciable ou très préjudiciable.
- ❑ La valeur des contraintes de calcul est fonction de la nuance de l'acier et de la résistance du béton à la traction.

II Détermination des sections d'armatures

1) Condition de non fragilité (CNF)

La section tendue ou fléchie est considérée comme non fragile si les armatures travaillants à leur limite élastique peuvent équilibrer les sollicitations provoquant la fissuration du béton dans cette section.

La condition suivante est appelée «Condition de non fragilité» et doit être vérifiée comme suit :

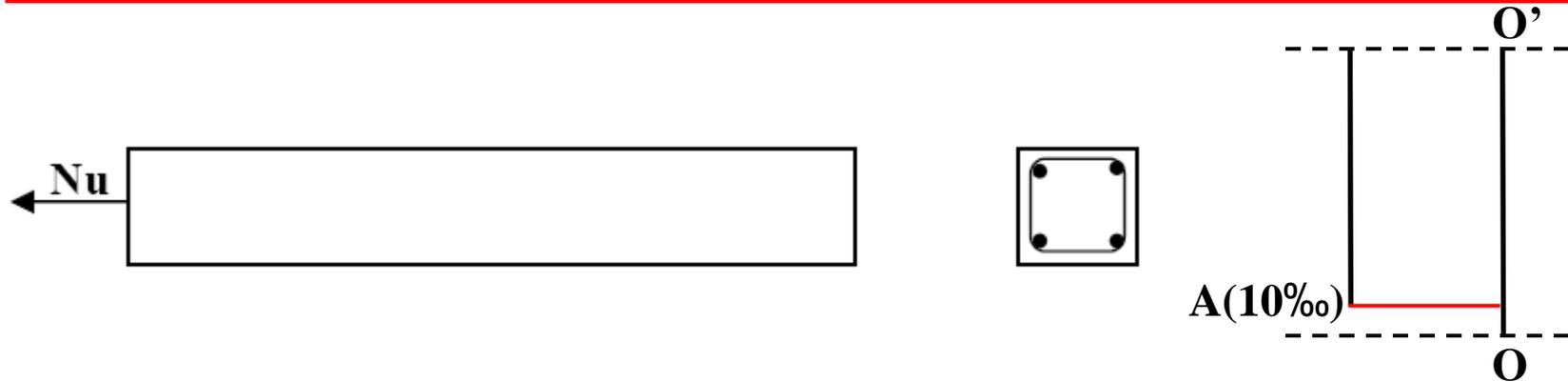
$$A_{sf} \geq B \cdot \frac{f_{t28}}{f_e}$$

A_s : Section des armatures longitudinale
 B : Section du béton.

Remarque : Pour que la pièce ne soit pas fragile, il faut que B vérifie la condition de non fragilité. Si B est imposé, il faut que A_s vérifie la condition de non fragilité.

2) ELU

Étant donné que le béton est négligé, il résulte que les armatures longitudinales doivent équilibrer à eux seuls les efforts appliqués.



N_u : l'effort de traction à l'ELU avec $N_u = 1,35N_G + 1,5N_Q$

D'où
$$A_{su} \geq \frac{N_u}{f_{su} (10‰)}$$

avec
$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

3) ELS

Pour éviter la fissuration du béton en traction, il faut faire une vérification à l'ELS.

N_s : l'effort de traction à l'ELS. avec $N_s = N_G + N_Q$

D'où $A_{s\text{ser}} \geq \frac{N_s}{\sigma_{st}}$ avec σ_{st} : en fonction de la fissuration

4) Conclusion

La section des armatures longitudinales sera la suivante :

$$A_s = \text{Max} (A_{sf} ; A_{su} ; A_{s\text{ser}})$$

III Dispositions constructives

a – Enrobage

Suivant le cas et pour assurer une bonne protection des armatures contre la corrosion, il faut que l'enrobage C soit au minimum de 5cm, 3cm ou 1cm.

b – Aciers longitudinaux

Possibilités de bétonnage correct

$C_l \geq \max(\text{enrobage} ; a ; C_g) ; e_h \geq \max(a ; 1,5C_g) ; e_v \geq \max(a ; C_g).$

C_g = dimension du plus gros granulat utilisé.

Cas de la fissuration préjudiciable

- Aciers longitudinaux tendus : $\Phi \geq 6\text{mm}$.
- Écartement entre barres : $eh \leq 4\Phi$ si $\Phi \geq 20\text{ mm}$.

Cas de la fissuration très préjudiciable

- Aciers longitudinaux tendus : $\Phi \geq 8\text{mm}$.
- Écartement entre barres : $eh \leq 3\Phi$ si $\Phi \geq 20\text{ mm}$.

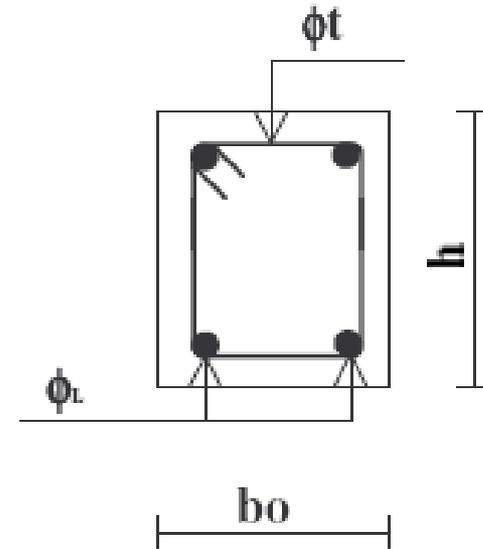
b – Aciers transversaux

Elles n'ont aucun rôle dans la résistance à la traction. Leur diamètre est calculé comme suit :

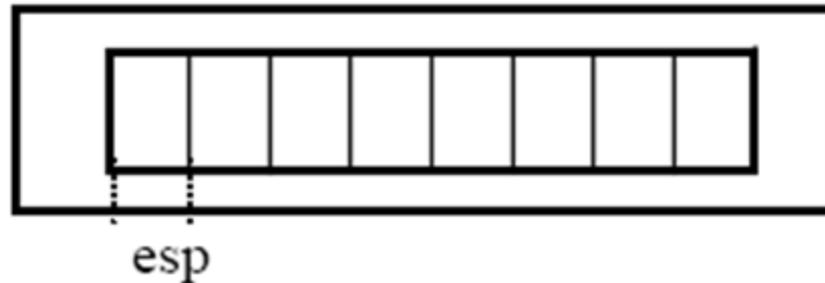
$$\phi_t = \inf (\phi_l ; h/35 ; b_0/10)$$

ou

$$\phi_t \geq 0,3\phi_l \text{ avec } \phi_{t\min} = 6\text{mm}$$



Espacement : $\text{esp} \leq \text{Min} (40 \text{ cm} ; b_0 + 10 \text{ cm} ; h + 10 \text{ cm})$



Exercice 15 :

Déterminer la section d'acier pour un tirant en BA soumis à un effort normale de traction simple, appliqué au centre de gravité de la section.

Données :

$$N_u = 0,22 \text{ MN.}$$

$$N_{\text{ser}} = 0,16 \text{ MN.}$$

Section du tirant 15cm x 15cm.

Acier Fe E 400 ; $\gamma_s = 1,15$; $\eta = 1,6$.

Béton $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$.

Cas de fissuration préjudiciable.

Refaire le même exercice avec un acier Fe E 500.

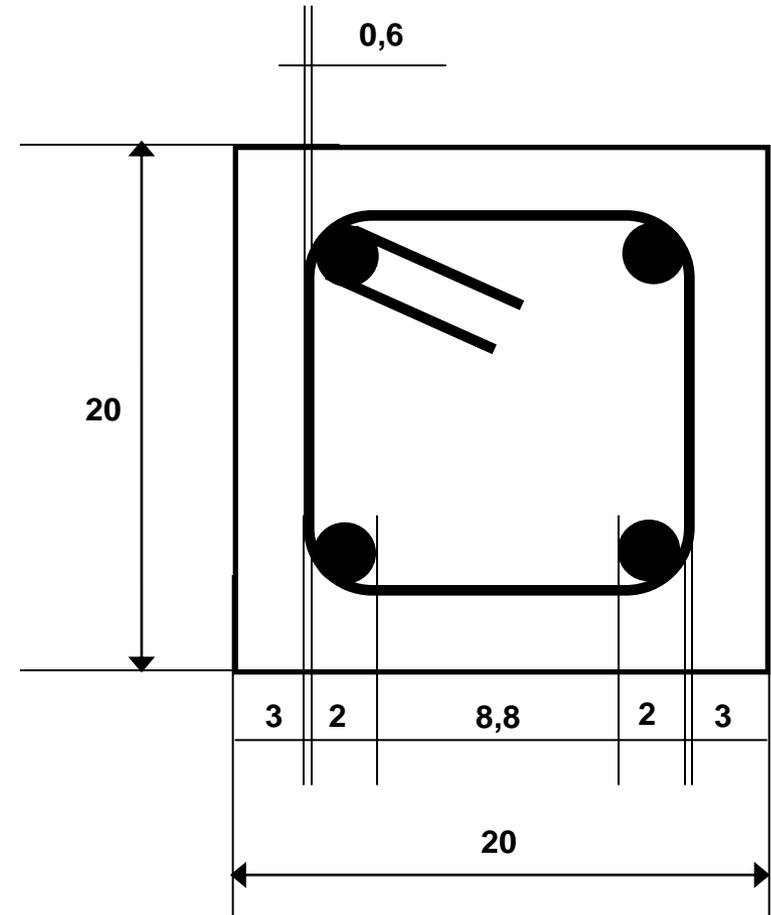
Exercice 16 :

Cas de fissuration préjudiciable.

1) Contrôler les dispositions constructives ci-après d'un tirant de section 20cm x 20cm, armé de 4HA20 Fe E400. Les cadres sont en HA6 et $f_{c28} = 25$ MPa.

Diamètre des granulats utilisés $C_g \leq 20$ mm.

2) Calculer N_u et N_{ser} , respectivement efforts de traction à l'ELU et à l'ELS.

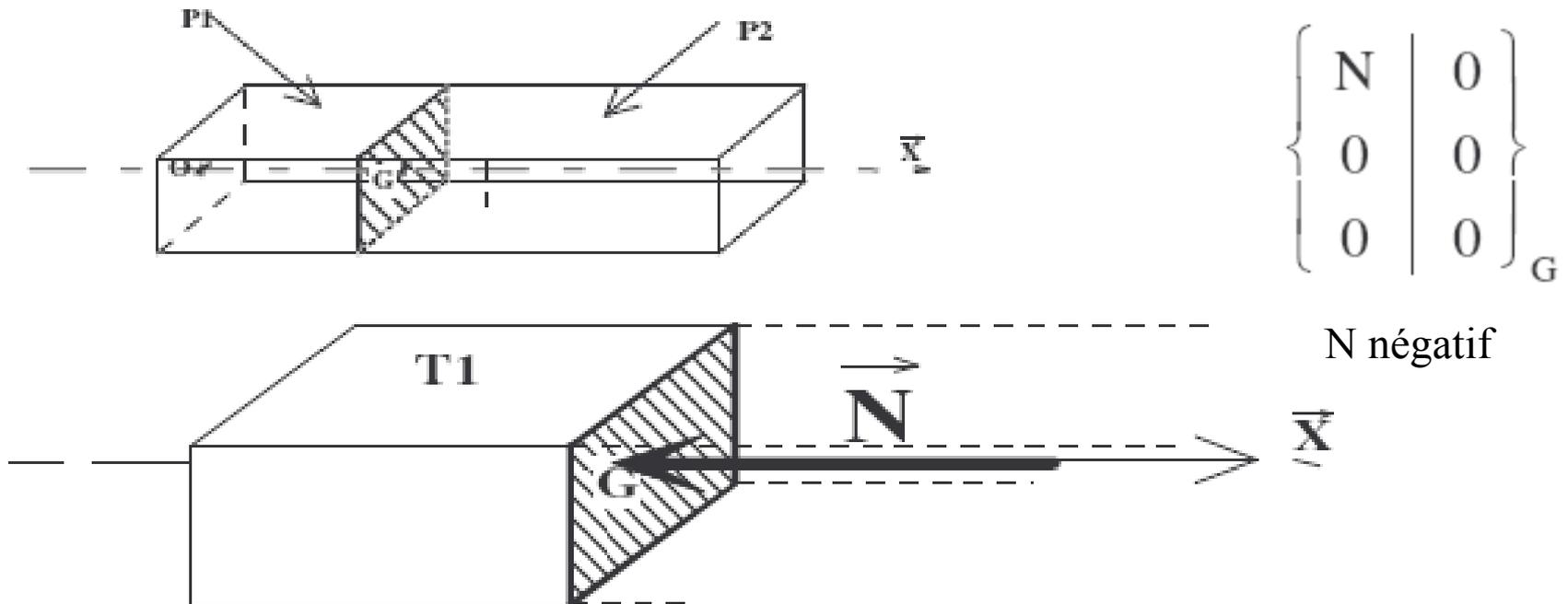


Chapitre VIII

LA COMPRESSION

I Définitions

Dans toute section S d'abscisse x, les éléments de réduction du torseur de cohésion (actions de la partie droite sur la partie gauche) sont au centre de gravité de S.

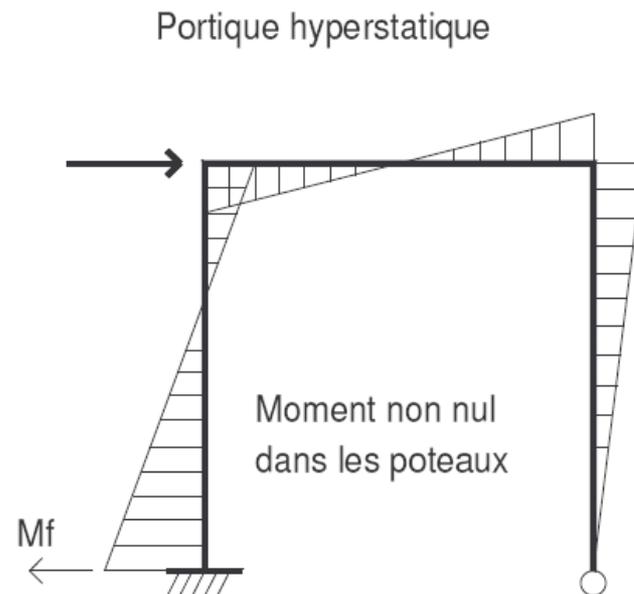
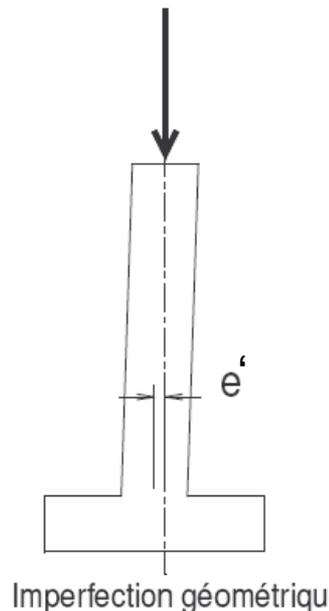
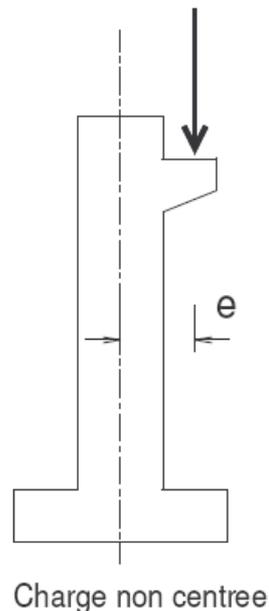


Cette définition suppose que la géométrie de l'élément est parfaite et la sollicitation effectivement centrée.

Réalité vis à vis de L'Eurocode2 :

Dans la réalité, les poteaux sollicités en compression centrée n'existent pas. En effet, en toute rigueur la transmission des efforts poutre poteau ne se fait jamais parfaitement à l'axe du poteau.

De plus, la réalisation du poteau implique des défauts : mauvaise disposition des armatures, défauts localisés (nids de gravier, non rectitude des poteaux...).



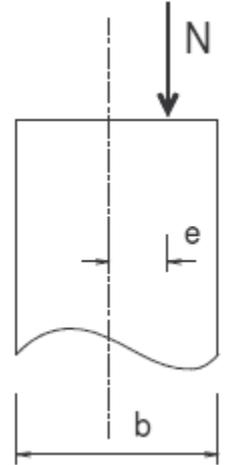
II Hypothèses d'études

1) Compression centrée

On considérera le poteau en compression centrée si :

➡ Le moment en tête de poteau (encastrement des poutres) n'entraîne qu'une faible excentricité telle que :

$$e = \frac{M}{N} < \frac{b}{12}$$



➡ La valeur maxi de l'imperfection de rectitude est :

$$e' = \text{Max} \left(1\text{cm}; \frac{L_f}{500} \right)$$

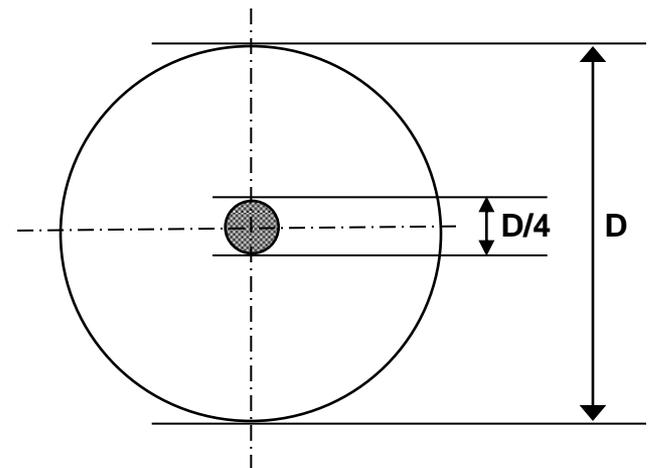
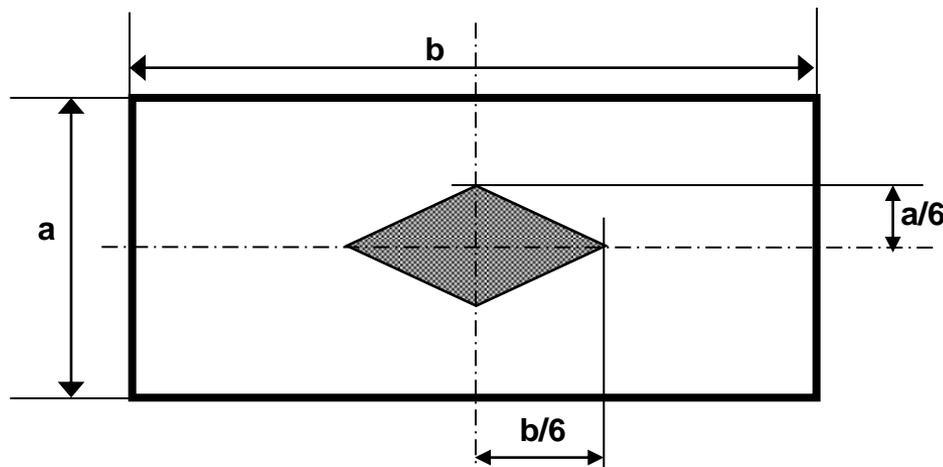
avec L_f longueur de flambement

➡ L'élancement est inférieur à 70 (voir plus loin).

2) Noyau centrale

L'excentrement éventuel de l'effort de compression est limité à la moitié de la dimension du « noyau centrale ».

Sections	Noyau centrale
Rectangulaire (a x b)	Losange de sommet a/6, b/6 sur les axes
Circulaire	Cercle de diamètre D/4



3) Combinaison d'action

Dans les cas courants, l'unique combinaison à considérer à l'état limite ultime est : $1,35G + 1,5Q$

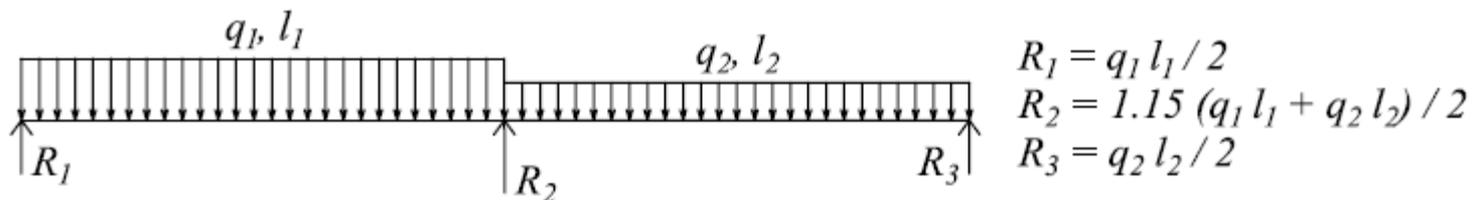
4) Évaluation des charges verticales

La charge ponctuelle transmise sur un poteau par une poutre est déterminée en supposant les éléments de la structure isostatiques (cas des constructions "courantes").

Néanmoins l'eurocode2 admet, dans le cas de poutres à travées solidaires, de majorer la valeur "isostatique" des charges transmises aux poteaux voisins de ceux de rive.

Dans les bâtiments comportant des travées solidaires supportées par des poteaux, il convient de majorer les charges calculées en admettant la discontinuité des travées de :

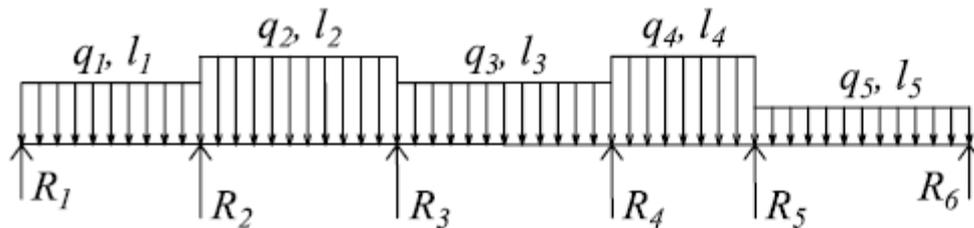
- 15% pour le poteau central d'une poutre à deux travées,
- 10% pour les poteaux intermédiaires voisins des poteaux de rive dans le cas d'une poutre comportant au moins 3 travées.



$$R_1 = q_1 l_1 / 2$$

$$R_2 = 1.15 (q_1 l_1 + q_2 l_2) / 2$$

$$R_3 = q_2 l_2 / 2$$



$$R_1 = q_1 l_1 / 2$$

$$R_2 = 1.10 (q_1 l_1 + q_2 l_2) / 2$$

$$R_3 = (q_2 l_2 + q_3 l_3) / 2$$

$$R_4 = (q_3 l_3 + q_4 l_4) / 2$$

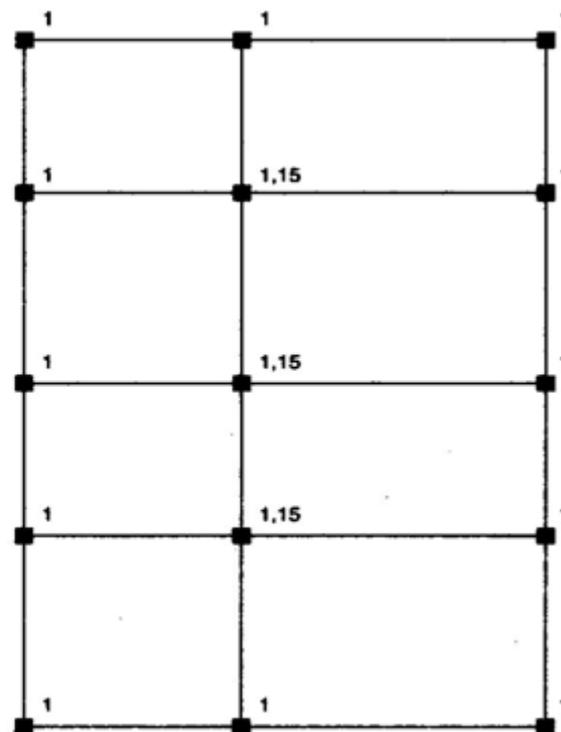
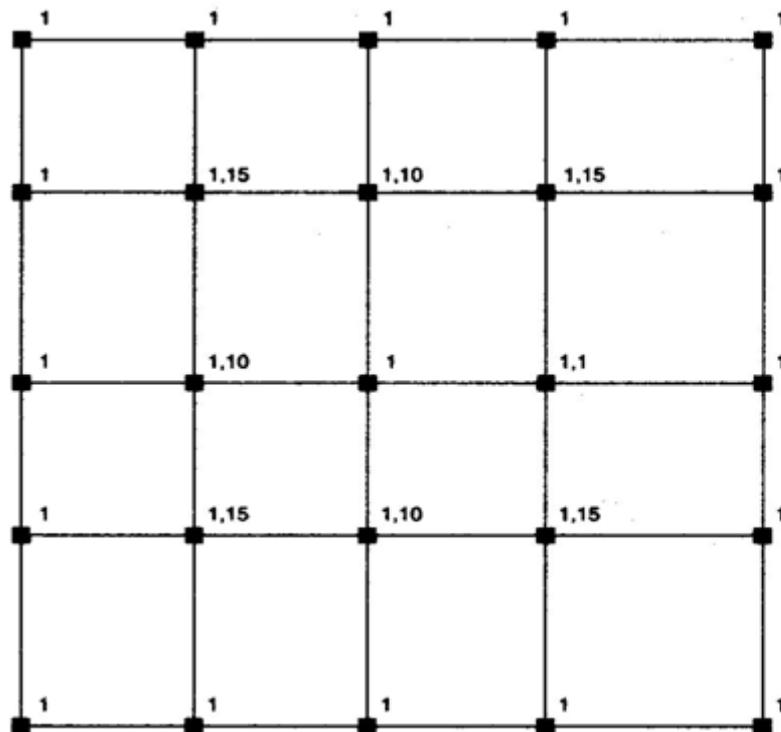
$$R_5 = 1.10 (q_4 l_4 + q_5 l_5) / 2$$

$$R_6 = q_5 l_5 / 2$$

Si le bâtiment comporte des portiques suivant les deux directions, les majorations sont

➤ de 15% si le poteau est plus d'une fois voisin d'un poteau de rive,

➤ de 10% si le poteau est une fois voisin d'un poteau de rive.



5) Remarques

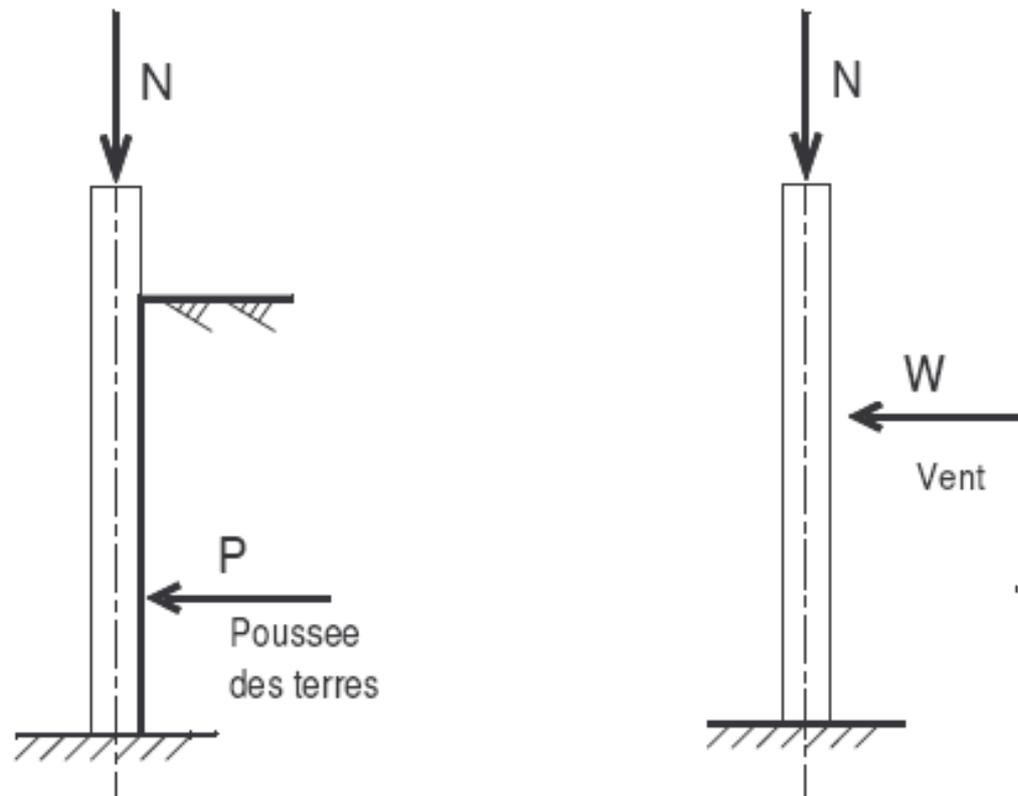
Les éléments de structures BA soumis à une sollicitation de compression simple seront considérés comme des poteaux sous chargement centrée dans la mesure où les conditions précédentes sont remplies.

Ce cas est habituel pour les bâtiments courants.

On admet que les effets des forces horizontales (vent, séisme) sont équilibrés par les contreventements tels que les voiles, les cages d'escaliers. Dans le cas contraire, on fera un calcul en flexion composée ou en stabilité de forme (vérification à l'ELS).

Lorsqu'un poteau est soumis, en plus de l'effort normal centré, à un moment fléchissant, la méthode développée ci-après ne s'applique plus.

On doit alors calculer les sections en flexion composée avec compression à l'ELU.

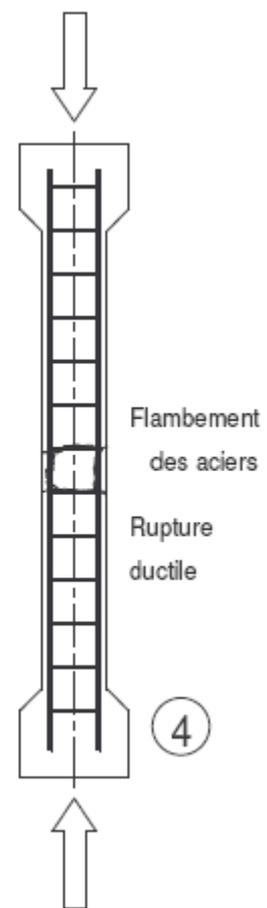
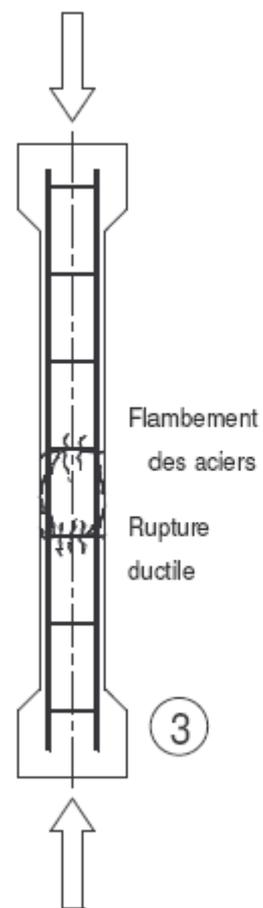
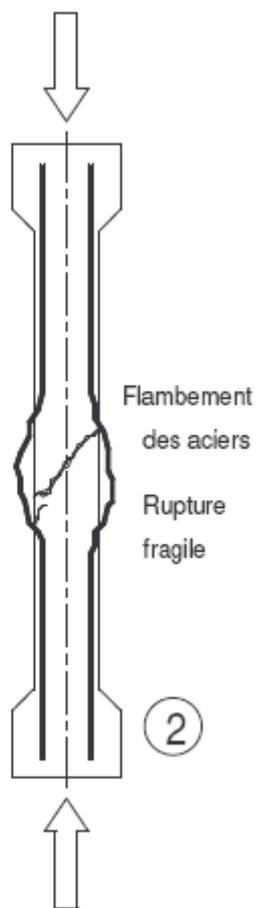
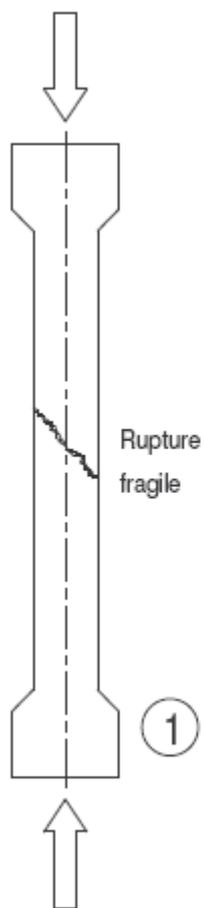


III Étude expérimentale

1) Échantillons d'essais

Considérons les quatre types de poteaux suivants et étudions leur rupture sous chargement de compression centrée croissant. Les poteaux sont définis par :

Poteau n°1	Béton seul
Poteau n°2	Béton et armatures longitudinales
Poteau n°3	Béton, armatures longitudinales et transversales
Poteau n°4	Béton, armatures longitudinales et transversales à espacements réduits



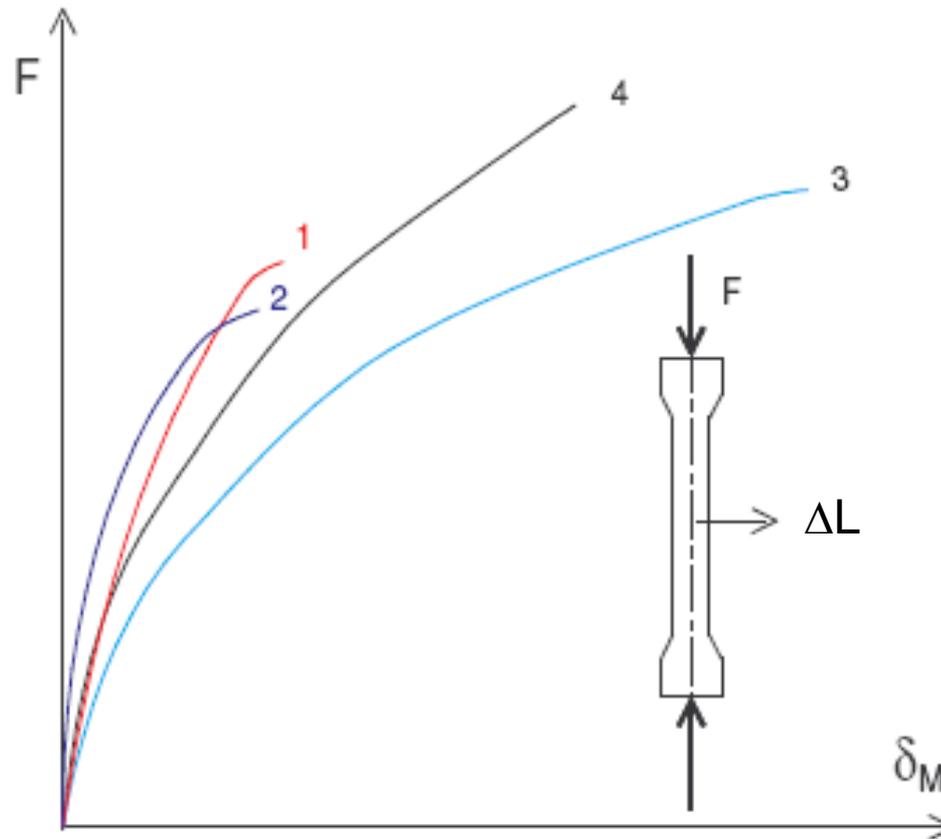
Poteau 1 : rupture brutale, sans prévenir, une fissure se crée et se propage instantanément.

Poteau 2 : un flambement brutal des armatures à la rupture. Le comportement du poteau n'est pas ductile.

Poteau 3 : apparition de fissures au niveau des armatures transversales, puis un effritement du béton aux mêmes endroits. Les cadres se rompent. Une progression continue de l'état de fissuration. Le comportement de ce poteau est ductile.

Poteau 4 : Comportement ductile du poteau. Les armatures transversales sont moins espacées. Les cadres protègent (frettage) plus les armatures longitudinales.

2) Courbes expérimentales



Courbes efforts appliqués en fonction du déplacement horizontal mesuré au milieu du poteau,.

3) Remarques

- ➔ Les charges de ruine sont du même ordre de grandeur.
- ➔ Les armatures longitudinales tendent à réduire la charge limite du poteau.
- ➔ Les comportements 1 et 2 sont presque linéaires.
- ➔ Les comportements 3 et 4 sont non linéaires.
- ➔ La perte de linéarité correspond au début de fissuration du béton.

4) Mode de rupture

La rupture des poteaux a toujours lieu par flambement (voir plus loin). Les raisons en sont les suivantes :

- ➔ Hétérogénéité du béton
- ➔ Défaut de positionnement des armatures
- ➔ Imperfections géométriques du béton
- ➔ Excentrement de la charge

Ces remarques devront intervenir dans les formules de dimensionnement ou de vérification.

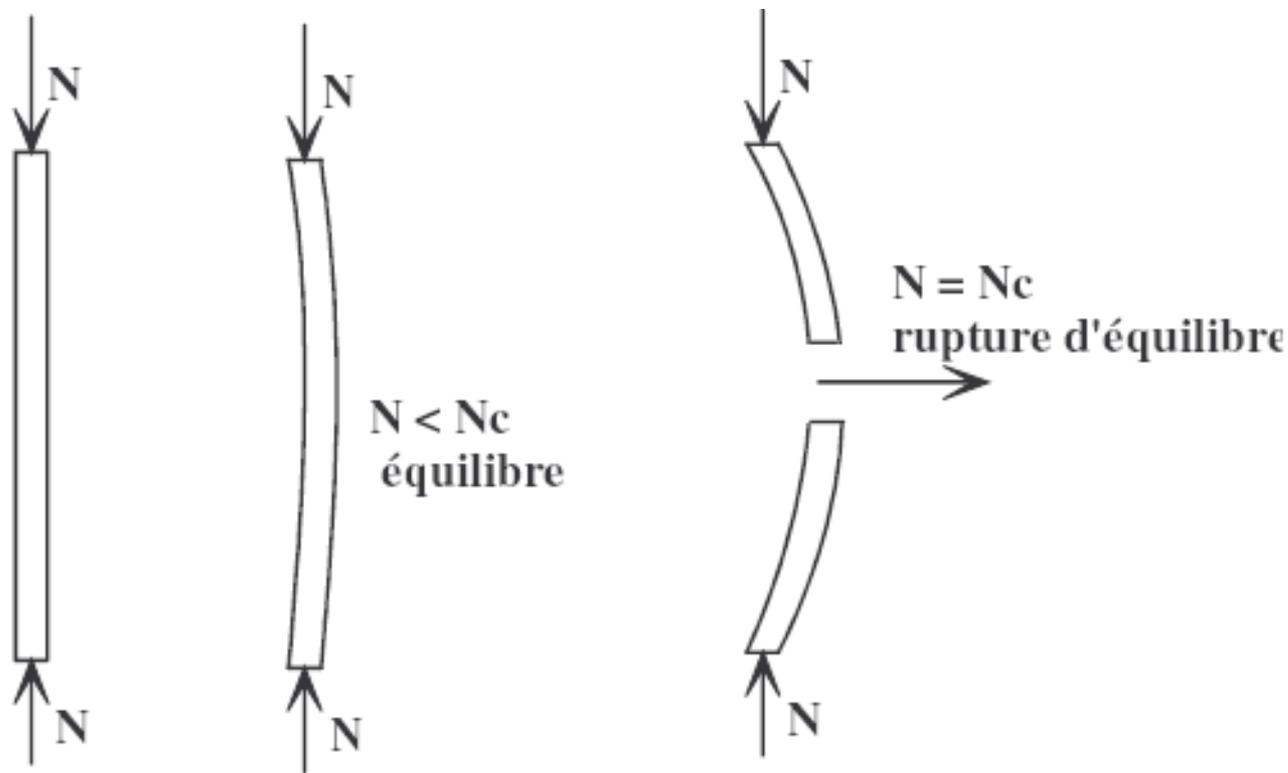
IV Instabilité au flambement

1) Description du phénomène

Le phénomène de flambement ou de flambage est un phénomène d'instabilité de la matière que l'on rencontre sur les éléments sollicités en compression. Il est très dangereux car imprévisible et immédiat.

Considérons une pièce travaillant théoriquement en compression simple. La pièce doit se déformer de façon irréversible lorsque la charge appliquée atteint la limite élastique en compression de l'élément.

Néanmoins, si sa longueur est importante par rapport à ses dimensions transversales, elle peut-être sujette à cette instabilité transversale pour une charge inférieure à la limite élastique en compression. C'est le flambement ou le flambage.



Lorsque l'on atteint une valeur N_c de l'effort normal, il y a rupture de l'équilibre par instabilité entraînant la ruine de l'élément.

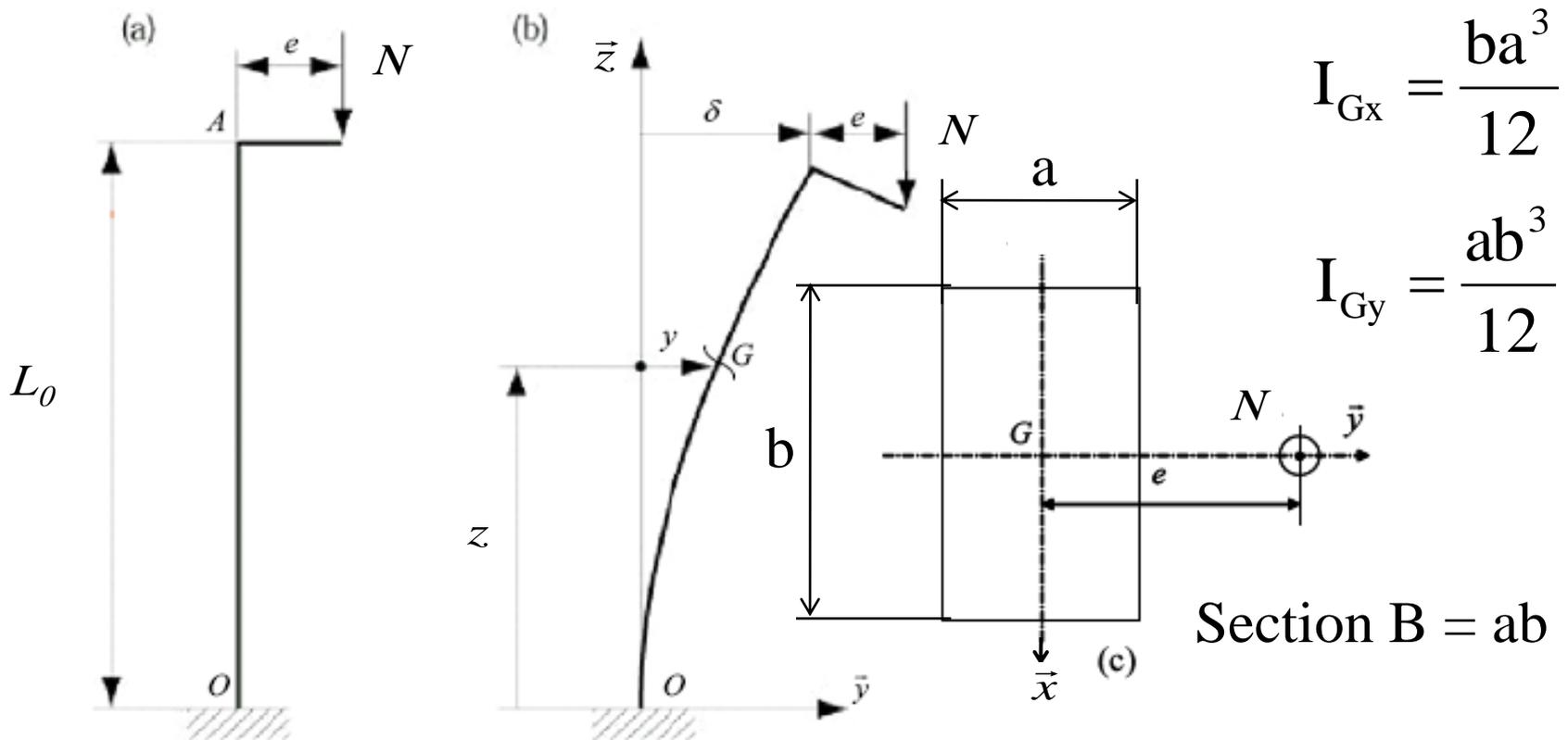
N.B. : La valeur critique (force critique d'Euler) est bien inférieure à la limite élastique de l'élément.

2) Paramètres influant sur le flambement

- Plus le moment d'inertie I est important moins le risque est important,
- Plus la longueur du poteau est petite plus il résiste.
- A contrainte égale, plus le module d'Young E est petit, plus le matériau se déforme, plus le poteau est flexible.

3) Mise en évidence du flambement

Soit la poutre rectiligne de section constante, de moments quadratiques I_{Gx} et I_{Gy} , tels que définis sur la figure (a). Par hypothèse, la poutre est élancée, c'est à dire que sa longueur L_0 est grande devant les dimensions linéaires de sa section. La poutre, modélisée par sa ligne moyenne OA, est encastree en O et soumise à une charge axiale de compression N, excentree d'une distance e par rapport au point A, suivant la direction y.



Sous l'effet de la charge axiale N , la poutre fléchit (fig.b) dans le plan perpendiculaire à la direction principale de plus faible moment quadratique de la section droite de la poutre, soit dans le plan (O,yz) perpendiculaire à (Gx) , avec $I_{\min} = I_{Gx}$ avec $I_{Gx} < I_{Gy}$ (fig.c).

La charge de flambement ou la charge critique d'Euler N_{cE} est donnée par :

$$N_{cE} = \frac{\pi^2 E I_{Gx}}{4L_0^2} = \frac{\pi^2 E I_{Gx}}{(2L_0)^2}$$

Dès que N_{cE} est atteinte, la poutre subit une grande déformation et se rompt ou se déforme de façon irréversible car les contraintes internes dépassent la limite élastique du matériau. La charge critique N_{cE} n'est pas fonction de e .

4) Remarque

Dans ce cas $2L_0$ est la longueur de flambement.

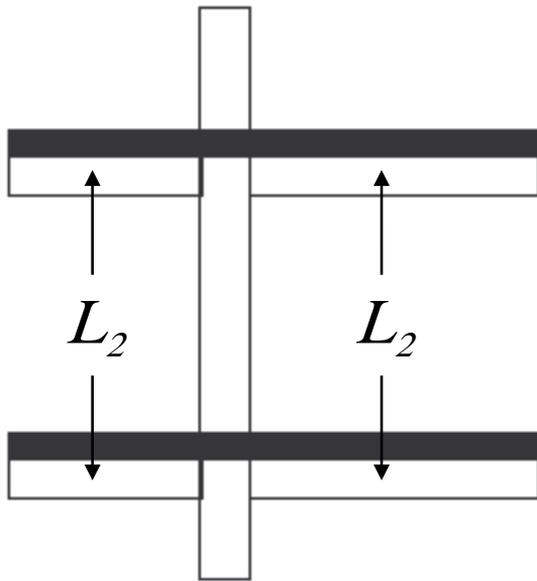
Suivant la géométrie du poteau et en fonction des liaisons avec son environnement nous aurons des longueurs et des charges de flambement différentes.

5) Longueur de flambement eurocode2

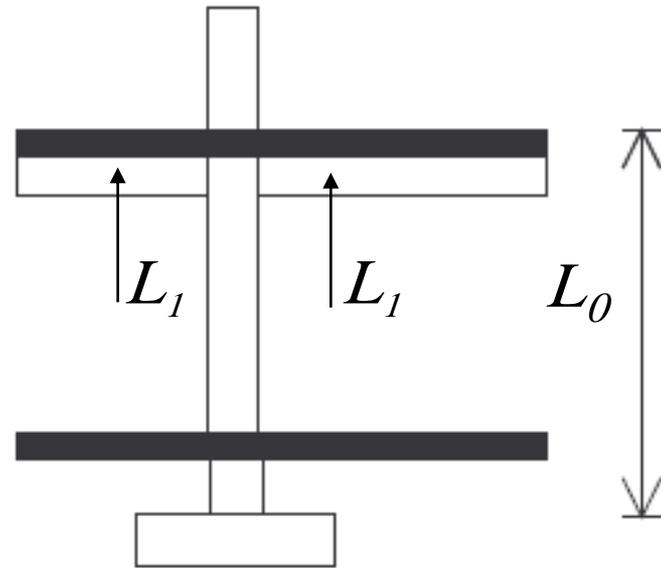
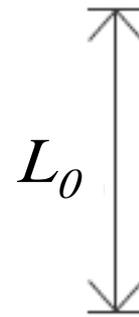
La longueur de flambement L_f dépend de la longueur libre L_0 et des liaisons avec l'extérieur.

Pour un bâtiment à étages, la longueur libre L_0 est comptée :

- ✿ entre faces supérieures de deux planchers consécutifs dans le cas d'un poteau d'étage courant ou multiples,
- ✿ entre la face supérieure du premier plancher et la jonction avec la fondation dans le cas du premier niveau.



Etage courant



premier niveau

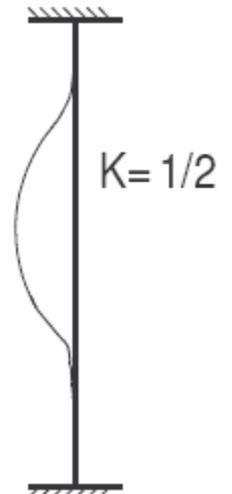
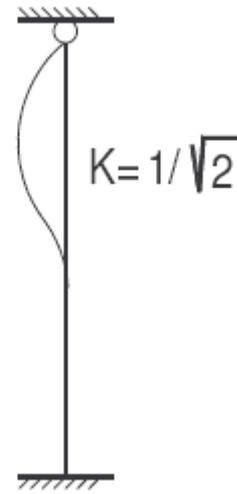
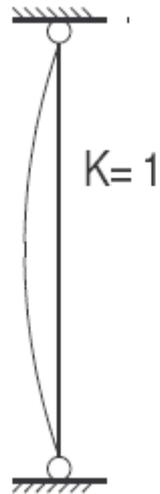
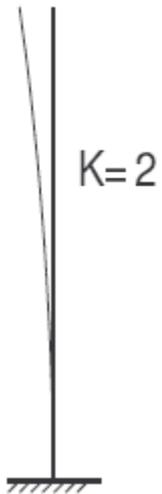
De façon générale :

$$L_f = K L_0$$

$$N_{cE} = \frac{\pi^2 E I_{Gx}}{(K L_0)^2} = \frac{\pi^2 E I_{Gx}}{(L_f)^2}$$

6) Valeurs de K pour des poteaux isolés Différentes conditions

✿ Eurocode



7) Valeurs de K pour des bâtiments

✿ Eurocode

$K = 0,7$ si le poteau est à ses extrémités :

➔ encastré dans un massif de fondation,

➔ assemblé à des poutres de plancher le traversant de part en part, et ayant au moins la même raideur que lui dans le sens considéré.

$K = 1$ dans tous les autres cas.

Cas pratiques dans le bâtiment :

Cas	$L_2 > L_0 ; L_1 > L_0$	Autres
L_f	$0,7 L_0$	L_0

8) Force critique

Euler détermina la charge critique N_{cE} pour différentes conditions aux appuis.

$$N_{cE} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L_f^2}$$

9) L'élancement

le flambement intervient lorsque des poutres élancées sont soumises à un effort de compression axial. Pour distinguer les situations où un calcul au flambement est nécessaire de celles où un calcul en compression suffit, on définit pour une poutre sans dimension, l'élancement λ :

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}}$$

L_f : longueur de flambement
 i_{\min} : rayon de giration mini de la section

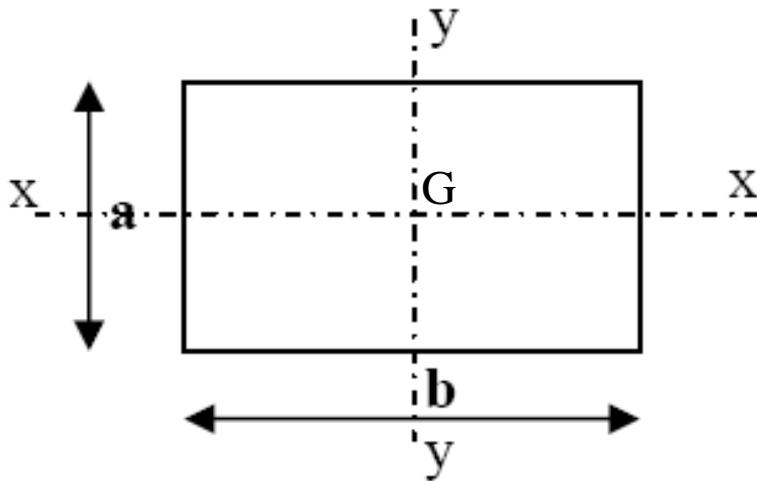
$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{B}}$$

I_{\min} : moment quadratique mini de la section
 B : aire de la section droite

N.B. : L'élancement permet de prendre en compte la section et l'inertie (moment quadratique) du poteau, et de comparer les poteaux entre eux

10) Rayon de giration et élancement

a - Section rectangulaire



$$I_{xx} = \frac{b \cdot a^3}{12} \quad ; \quad I_{yy} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$a < b \Rightarrow I_{xx} < I_{yy} \Rightarrow i_{xx} < i_{yy}$$

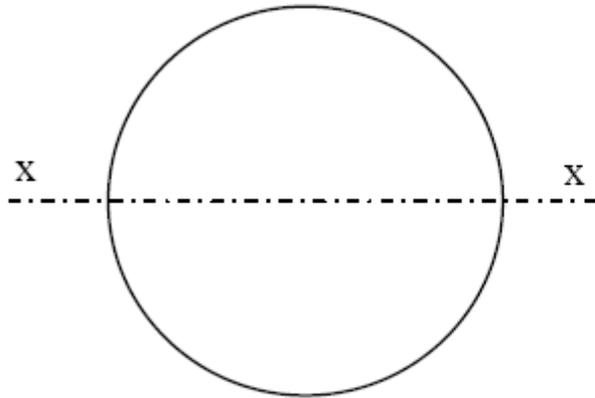
$$\text{d'où : } i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{B}}$$

$$i_{\min} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{3}L_f}{a}$$

$$\lambda < 50 \text{ si } \frac{L_f}{a} < 14,4$$

b - Section circulaire



$$I_{xx} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

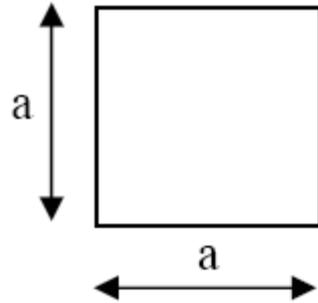
$$i_x = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}} = \sqrt{\frac{D^2}{16}} \text{ d'où : } i_x = \frac{D}{4}$$

$$i_{\min} = \frac{D}{4}$$

$$\lambda = \frac{4L_f}{D}$$

$$\lambda < 50 \text{ si } \frac{L_f}{D} < 12,5$$

c - Section carrée



$$i_{\min} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$i_{\min} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{3}L_f}{a}$$

$$\lambda < 50 \text{ si } \frac{L_f}{a} < 14,4$$

11) Élancement critique d'une poutre

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{B}}$$

et

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}}$$



$$I_{\min} = B i_{\min}^2 = B \frac{L_f^2}{\lambda^2}$$

sachant que

$$N_{cE} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L_f^2}$$

nous avons

$$N_{cE} = \frac{\pi^2 E B}{\lambda^2}$$

d'où

$$\sigma_e = \frac{N_{cE}}{B} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

avec σ_c contrainte limite élastique

finalement

$$\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_e}$$

a - Définition

L'élancement critique λ_c , est l'élancement à partir duquel la poutre doit être calculée au flambement.

b - Remarque

On constate que l'élancement critique ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau.

Les ordres de grandeur adoptés en général sont :

- $\lambda_c = 100$ pour les profilés en acier
- $\lambda_c = 60$ pour les poteaux en fonte
- $\lambda_c = 70$ pour les poteaux en bois
- $\lambda_c = 70$ pour les poteaux en Béton armé

V Calcul aux ELU

1) Principe

Pratiquement on doit vérifier que l'effort normal ultime agissant est inférieur à l'effort normal ultime résistant.

$$N_u \leq N_{u \text{ Limite}}$$

N. B. : Cette vérification ne tient pas compte d'un phénomène physique important : **LE FLAMBEMENT.**

2) Détermination de la capacité portante

A l'état limite ultime (ELU), on doit vérifier :

$$N_u \leq \alpha \left[\frac{B_r f_{c28}}{0,9\gamma_b} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s} \right]$$

α est un coefficient de sécurité qui compense le flambement

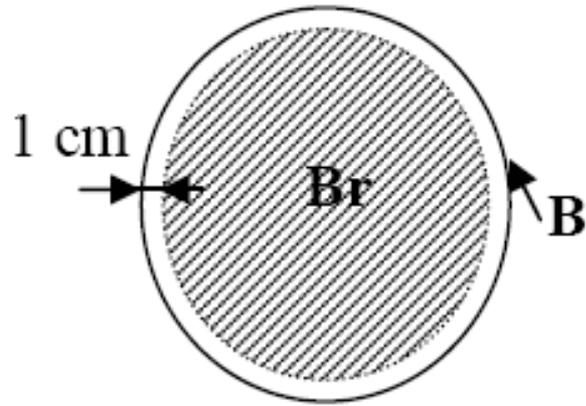
A_s est la section des armatures longitudinales prises en compte dans le calcul

$\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal et $1,15$ à l'ELU accidentel

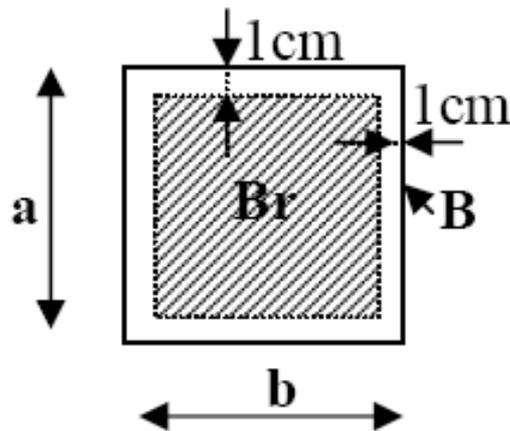
$\gamma_s = 1,15$ à l'ELU normal et 1 à l'ELU accidentel

B_r est la section réduite du poteau.

B_r , la section réduite du poteau est obtenue en déduisant 1cm aux dimensions réelles de la section sur sa périphérie.



$$Br = \frac{\pi \cdot (D - 0,02)^2}{4}$$



$$Br = (a - 0,02) \cdot (b - 0,02)$$

On compense le fait de négliger le flambement en minorant la valeur de l'effort normal résistant par un coefficient α dépendant de l'élançement.

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2} \quad \text{p o u r } \lambda \leq 50$$

$$\alpha = 0,6 \left(\frac{50}{\lambda} \right)^2 \quad \text{p o u r } 50 \leq \lambda \leq 70$$

α est divisé par 1,1 si la majeure partie des charges est appliquées avant 90 jours.

3) Détermination des armatures

a – Pourcentage d'armature

On doit respecter les règles suivantes :

- ✿ un élément insuffisamment armé est fragile
- ✿ un élément trop armé est irréalisable correctement

$$A_{s \min} \leq A_s \leq A_{s \max}$$

$$A_{s \min} \geq \max (4p ; 0,2\% B)$$

$$A_{s \max} = 5\% B$$

P : périmètre du poteau en mètre.
Le résultat en cm².

b – Armatures longitudinales

Données : λ , N_u , B , f_{c28} , f_e

Inconnue : A_s

$$A_s \geq \left[\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B_r f_{c28}}{0,9\gamma_b} \right] \frac{\gamma_s}{f_e}$$

- Si $\lambda \leq 35$: A_s représente l'aire de toute les armatures longitudinales à disposer sur tout le périmètre de la section considérée.
- Si $\lambda > 35$: A_s représente l'aire des armatures qui augmente efficacement la rigidité dans le sens ou le moment d'inertie est le plus faible.

c - Remarque

Pour les armatures longitudinales nous avons trois cas :

1- $A_{s \min} < A_s \text{ calculée} < A_{s \max} \Rightarrow$ On ferraille avec A_s calculée.

2- $A_s \text{ calculée} < A_{s \min}$ ou $< 0 \Rightarrow$ On ferraille avec $A_{s \min}$.

3- $A_s \text{ calculée} > A_{s \max} \Rightarrow$ On augmente la section du béton B et on recalcule de nouveau A_s .

d – Armatures transversales

Ces armatures ont principalement un rôle de maintien des armatures longitudinales. Elles évitent ainsi leur flambement. Le choix des armatures transversales se fait à partir de dispositions forfaitaires:

$$\Phi_t \geq \frac{\Phi_{1 \max}}{3}$$

V Dispositions constructives

1) Enrobage

C'est la distance minimale aux parements. Suivant le cas et pour assurer une bonne protection des armatures contre la corrosion, il faut que l'enrobage C soit au minimum de 5cm, 3cm ou 1cm.

2) Bétonnage correct

$C_l \geq \max(\text{enrobage} ; \Phi_l ; C_g)$.

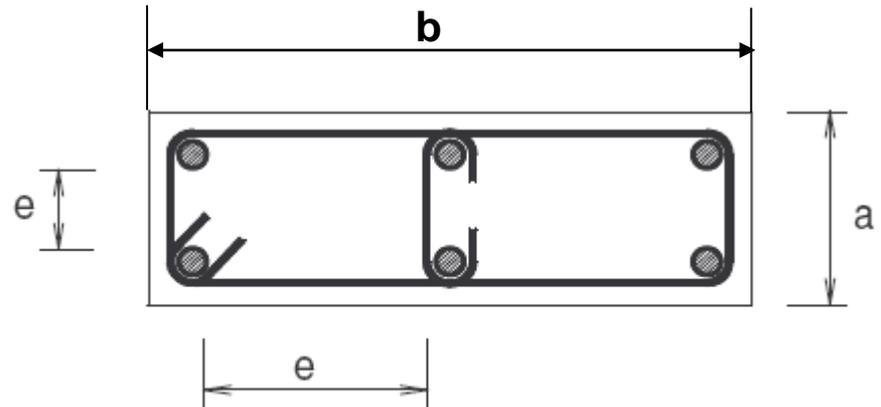
Φ_l : diamètre maximal des aciers longitudinaux.

C_g : dimension du plus gros granulat utilisé.

3) Armatures longitudinales

a – Section rectangulaire ou carré

La répartition est faite de manière à assurer au mieux la résistance au flambement de la pièce dans les directions les plus défavorables.



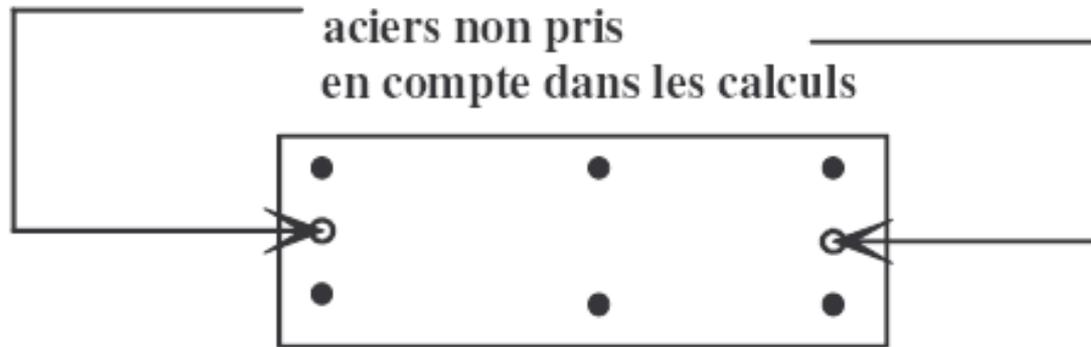
Section carrée : As à placer aux angles.

Section rectangulaire : As à placer le long de b.

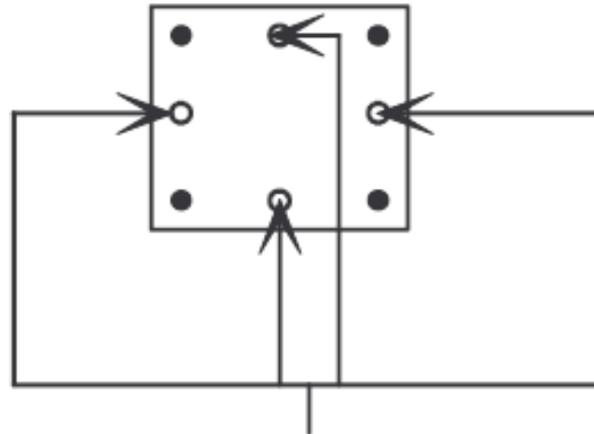
Dans une pièce rectangulaire la distance maximale entre deux armatures est :

$$e \leq \min \left[\begin{array}{l} a + 10\text{cm} \\ 40\text{cm} \end{array} \right]$$

Poteaux rectangulaires tels que $(a/b) \leq 0,9$



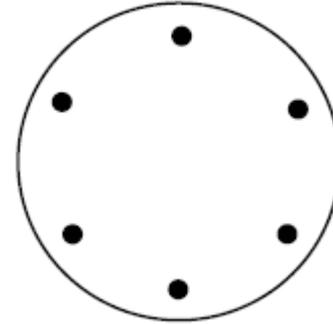
Poteaux carrés ou rectangulaires tels que $0,9 \leq (a/b) \leq 1,1$



aciers non pris
en compte dans les calculs

b – Section circulaire

Un minimum de 6 barres



c – Section polygonale

Une barre à chaque sommet



4) Armatures transversales

a – Espacement des armatures

L'espacement des différentes nappes est donné par :

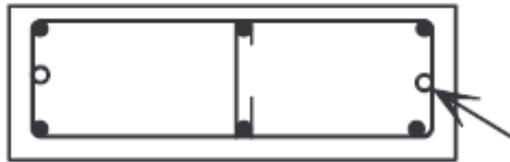
$$e_t \leq \min \begin{bmatrix} 15\Phi_{1 \min} \\ a + 10\text{cm} \\ 40\text{cm} \end{bmatrix}$$

Toutefois, en zone de recouvrement, le nombre d'armatures transversales doit être supérieur ou égal à 3. Dans la pratique, on assure un léger dépassement des extrémités des barres arrêtées, $2\phi_1$ environ, par rapport aux nappes extrêmes.

b – Répartition des armatures

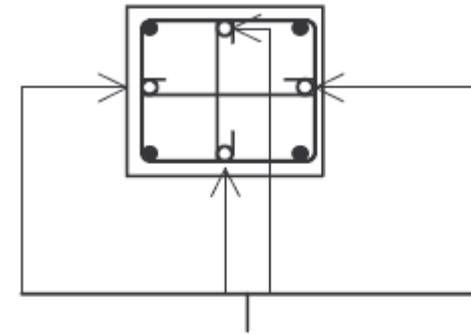
Les armatures transversales doivent former une ceinture continue sur le pourtour du poteau.

Il faut maintenir par des étriers et des épingles les aciers situés en dehors des angles si leur diamètre est supérieur à 20 mm ou s'ils ont été pris en compte dans les calculs.



non pris en compte dans les calculs

$\phi < 20$



aciers non pris
en compte dans les calculs

$\phi > 20$

5) Jonction par recouvrement

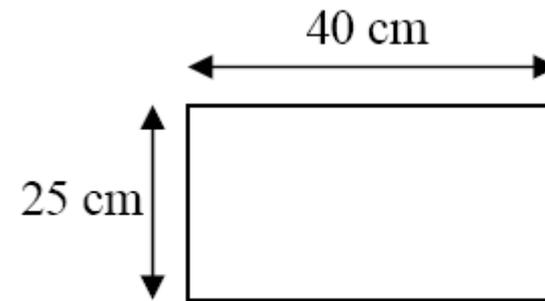
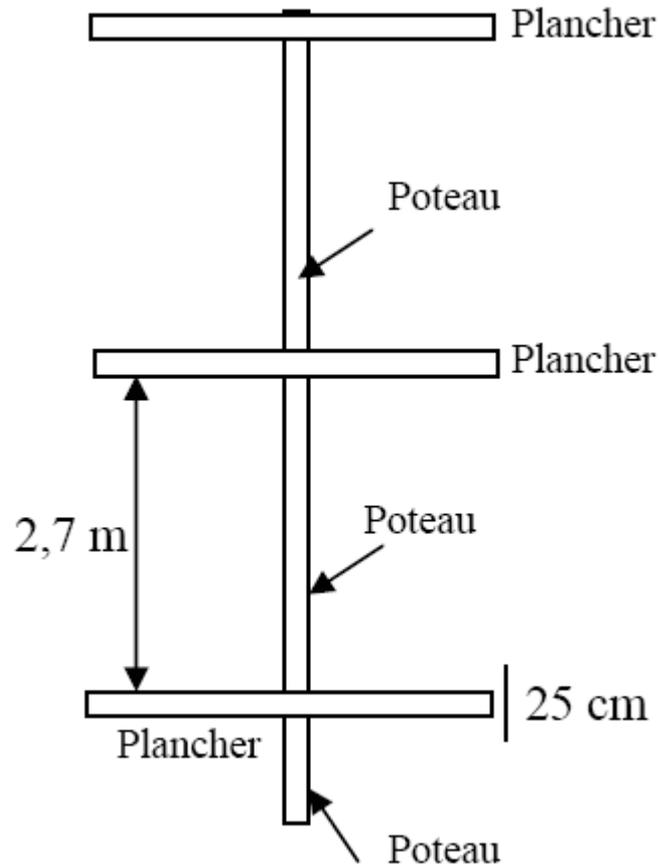
$L_r \geq 0,6L_s$. A défaut de calcul précis, on prend : $L_r \geq 24\Phi$.

Le nombre des cours transversaux réalisant le recouvrement est au minimum 3

Exercice 17 :

Déterminer la section des armatures longitudinales du poteau situé dans un lieu couvert.

Vérifier ou donner les dispositions constructives lorsque $C_g \text{ max} = 2 \text{ cm}$.



La section du poteau

$$N_g = 0,7 \text{ MN}$$

$$N_q = 0,35 \text{ MN}$$

$$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$$

$$\text{FeE400}$$

Exercice 18 :

Déterminer les armatures d'un poteau intérieur BA soumis à un effort normal de compression centré sur la section du béton.

Vérifier ou valider les dispositions constructives.

Données :

Effort normal à l'ELU : $N_u = 0,85 \text{ MN}$.

Section du poteau : $25\text{cm} \times 25 \text{ cm}$.

Longueur de flambement : $L_f = 320 \text{ cm}$.

Chargement supérieur à $N_u/2$, appliqué avant 90 jours.

Résistance caractéristique du béton $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$.

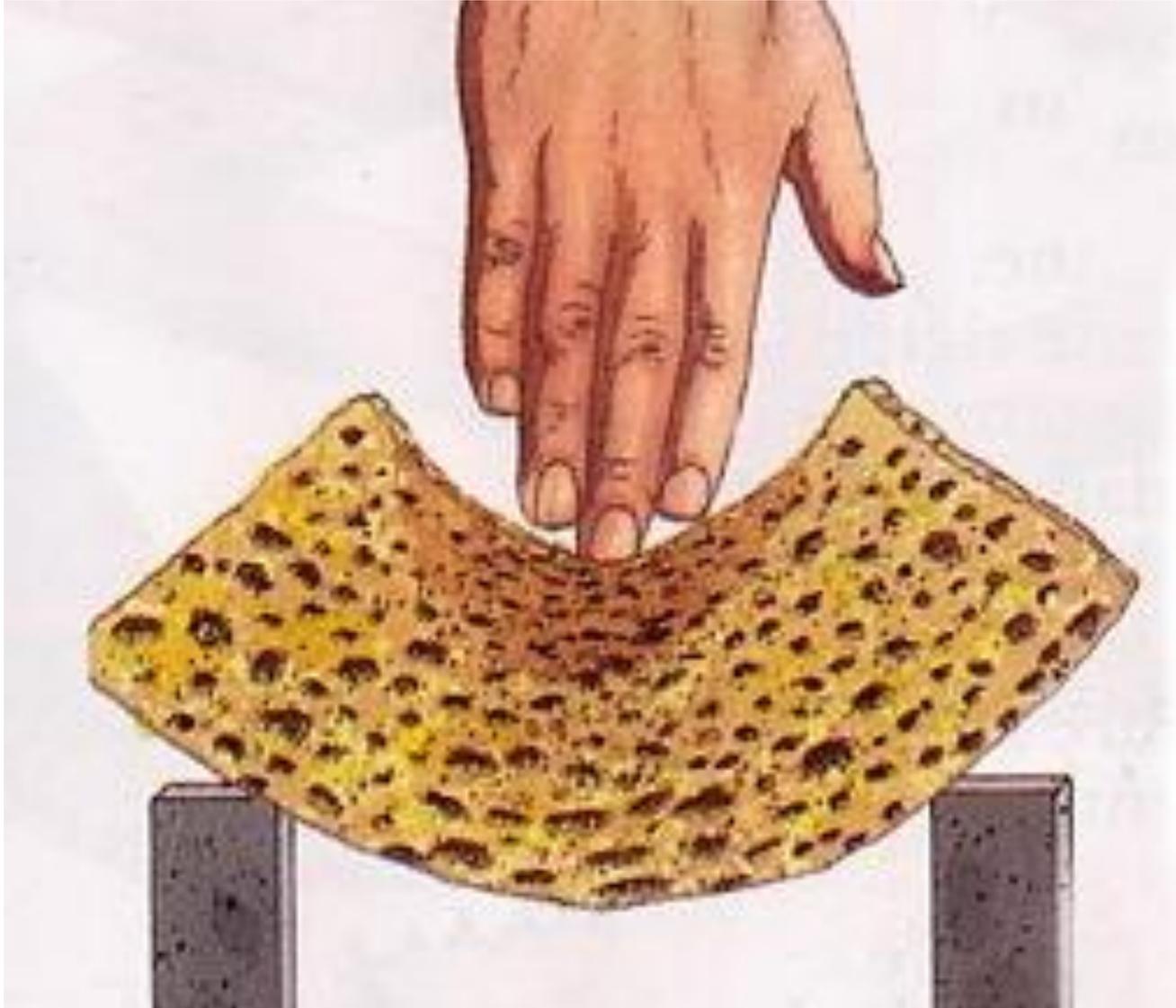
Les armatures longitudinales sont en acier HA :

$f_e = 400 \text{ MPa}$; $\gamma_s = 1,15$; maximum $C_g = 2\text{cm}$.

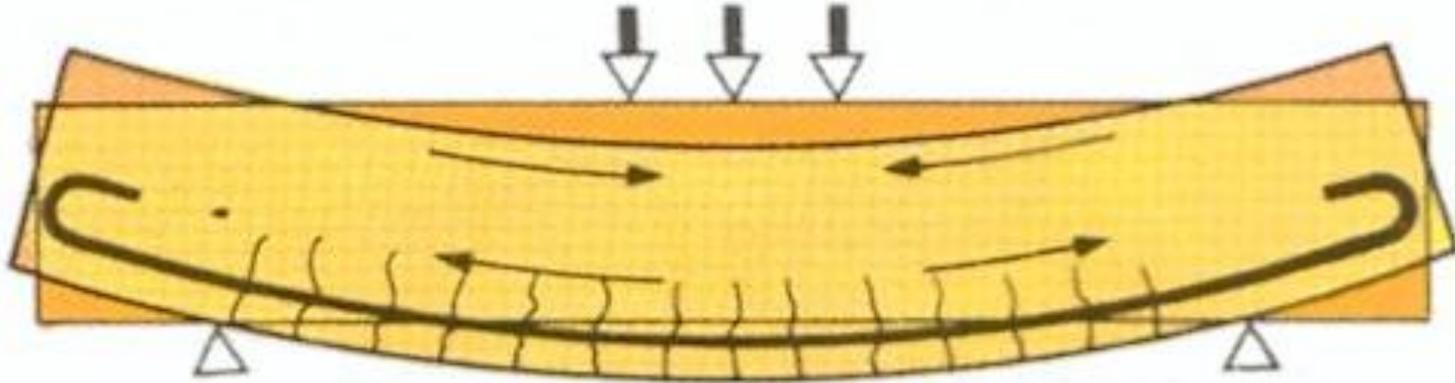
Chapitre VIII

LA FLEXION A L'ETAT LIMITE ULTIME

I Fonctionnement du béton armé en flexion



1) Le principe du béton armé en flexion

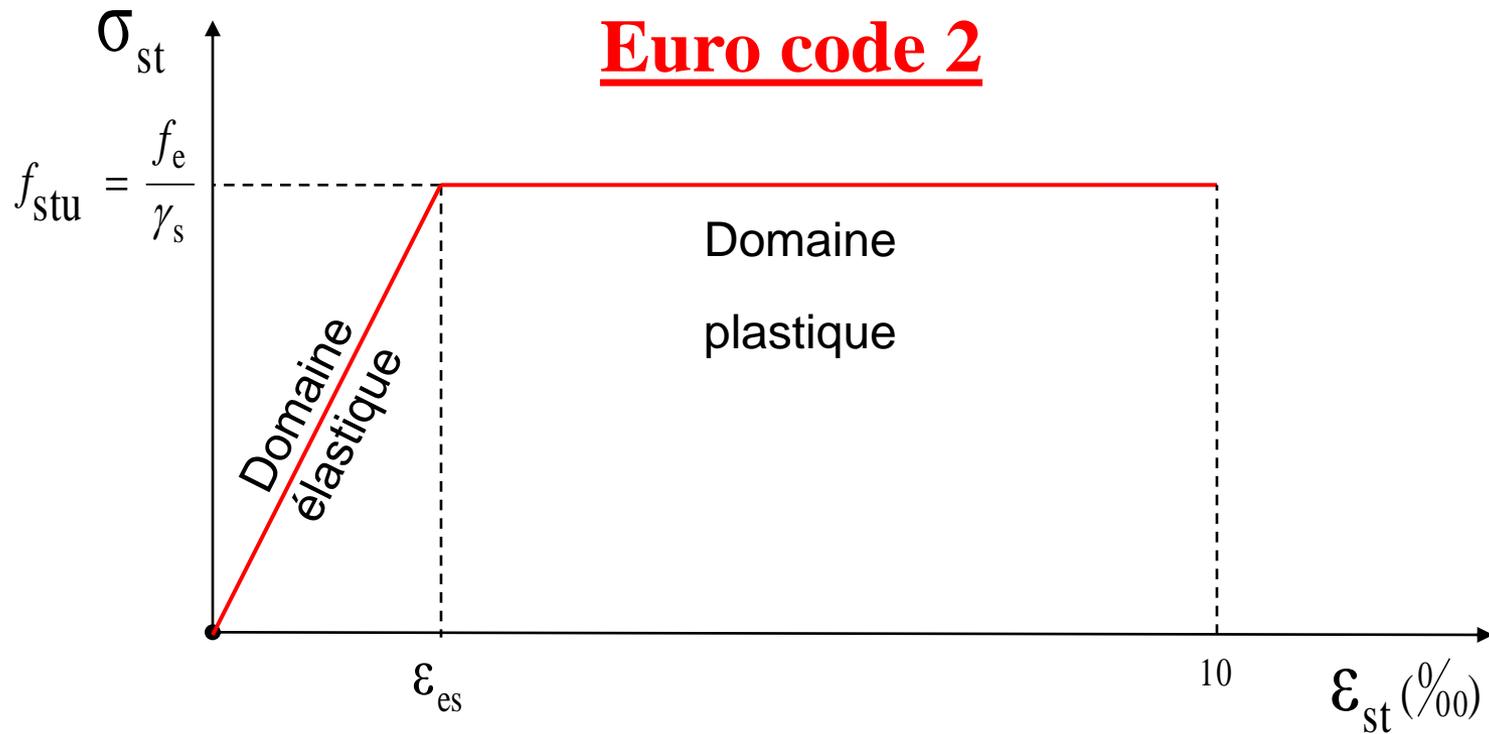


- ✓ le béton reprend les efforts de compression
- ✓ les aciers reprennent les efforts de traction.

2) Dimensionnement

Un élément en béton armé est **optimisé** lorsque les matériaux béton et acier travaillent au **maximum** de leurs possibilités.

3) Diagramme contrainte–déformation de l'acier



L'acier travaillera au maximum à partir d'une contrainte f_{stu} .
Il travaille au maximum pour un allongement unitaire comprise entre ϵ_{es} et 10 ‰.

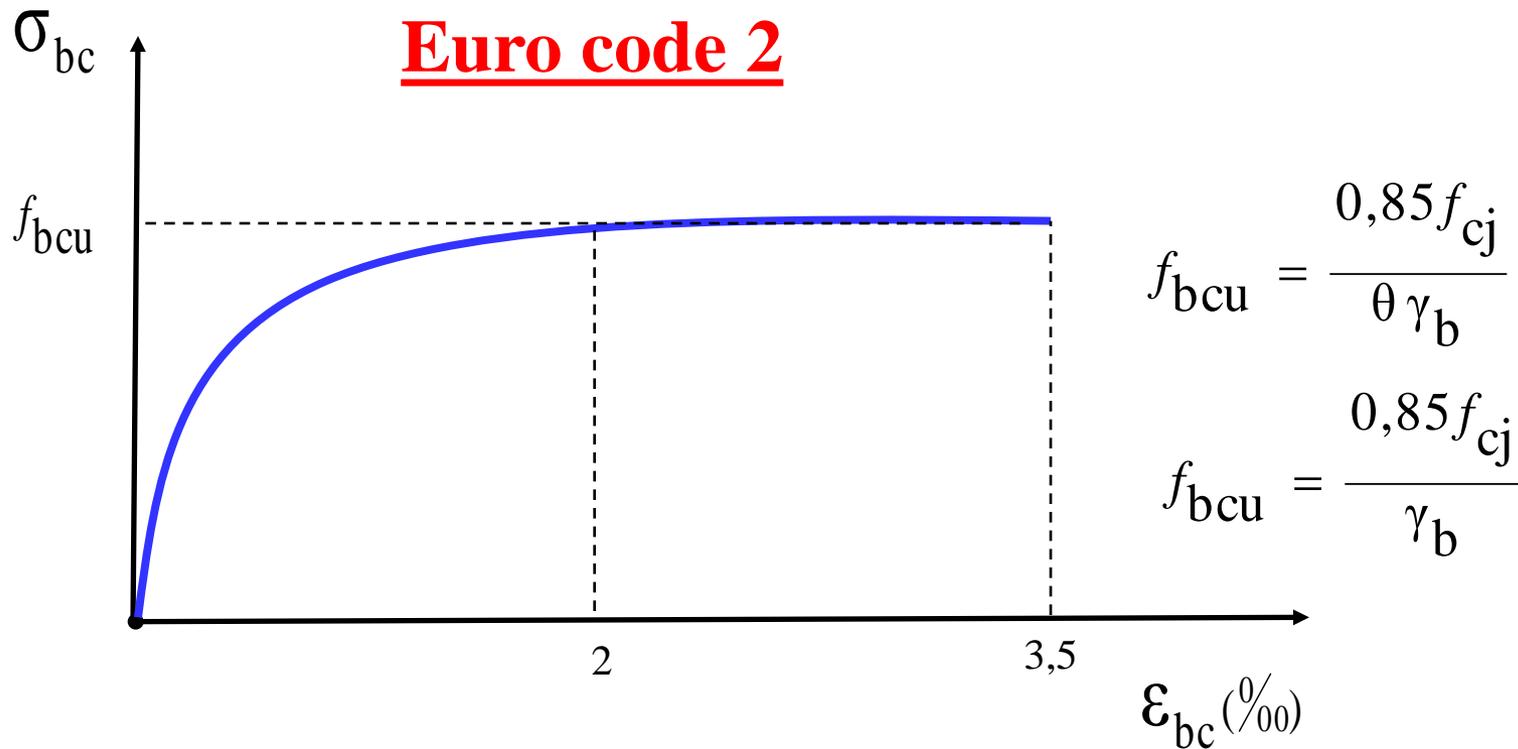
L'acier travaillera au **maximum** lorsque :

$$\varepsilon_{es} < \varepsilon_{st} < 10 \text{ ‰}$$

Nuance	f_e (MPa)	ε_{es} (‰)		f_r (MPa)
		$\gamma_s = 1$	$\gamma_s = 1,15$	
Fe E215	215	1,075	0,935	330-490
Fe E235	235	1,175	1,02	410-490
Fe E400	400	2	1,74	480
Fe E500	500	2,5	2,175	550

A l'ELU normal $\gamma_s = 1,15$ et à l'ELU accidentel $\gamma_s = 1$.
L'euro code limite d'allongement des aciers à la valeur de 10 ‰.

5) Diagramme contrainte–déformation du béton



Le béton travaillera au maximum pour une compression unitaire comprise entre 2 ‰ et 3,5 ‰.

A l'ÉLU normal $\gamma_b = 1,5$ et à l'ELU accidentel $\gamma_b = 1,15$.

L'euro code limite la compression du béton à la valeur de 3,5 ‰.

Le béton travaillera au **maximum** lorsque :

$$2 \text{ ‰} < \varepsilon_{bc} < 3,5 \text{ ‰}$$

6) Conclusion

Il faudra donc dimensionner les éléments de manière à respecter :

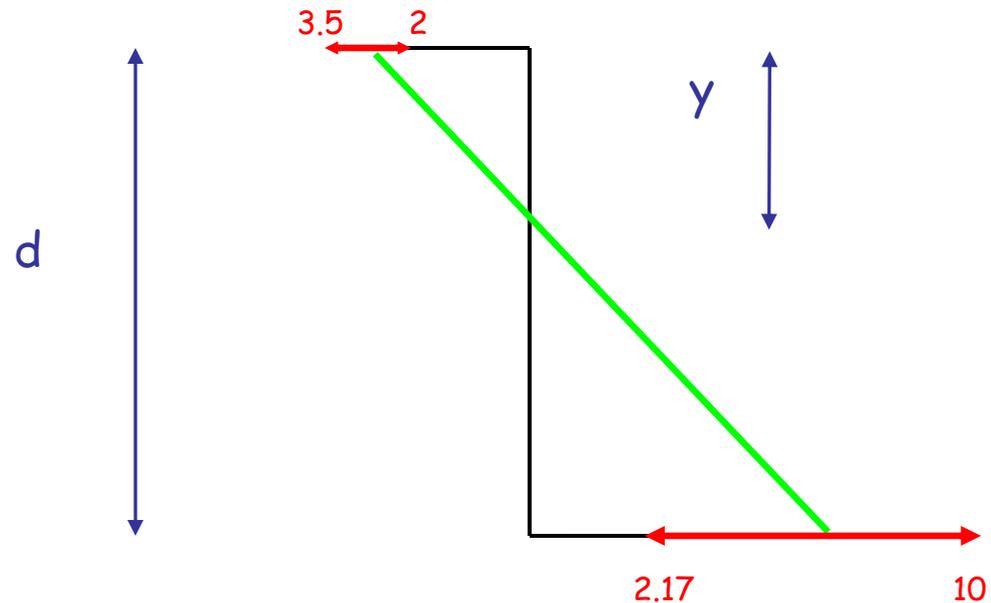
- le règlement;
- optimiser l'élément en béton armé.

7) Exemple

Prenons le cas d'une poutre classique soumise à la flexion.

Le diagramme déformation de la section a l'allure suivante :

Acier Fe 500



Dans cet exemple, la section est ici bien dimensionnée car les déformations de l'acier et du béton sont dans les intervalles énoncés précédemment. Les matériaux travaillent donc de manière efficace.

II Recherche du pivot

1) Moment de référence

a - Définition

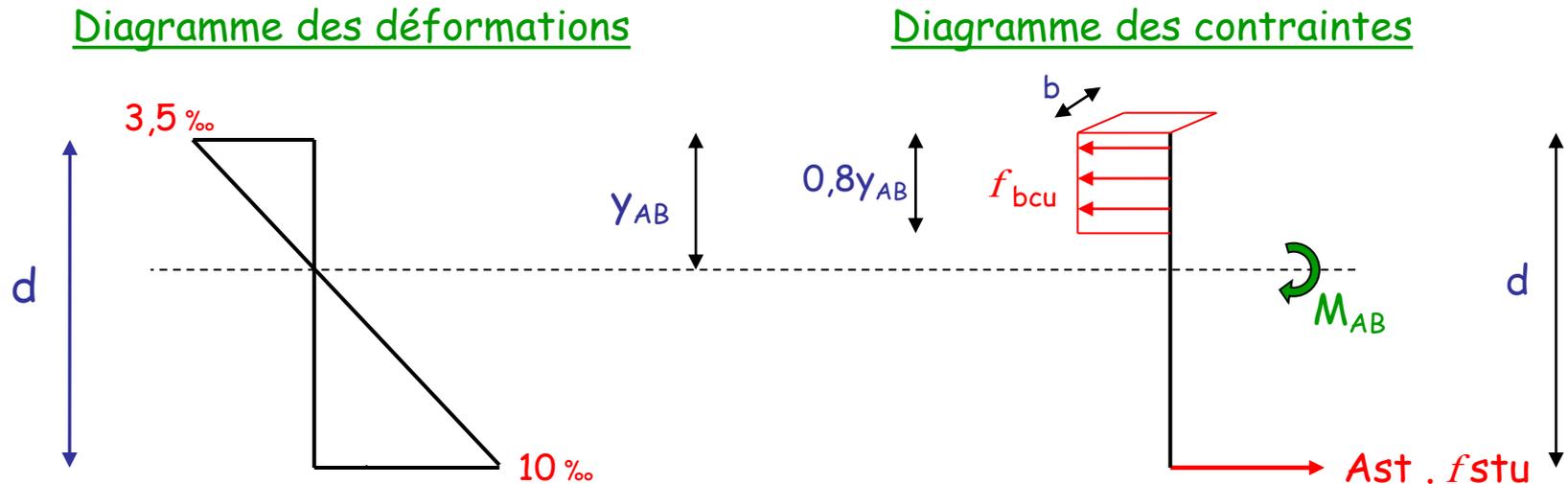
Le **moment de référence noté M_{AB}** est le moment sollicitant une section permettant d'atteindre simultanément **$\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$** et **$\epsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$** .

b - Remarque

Si « d » est inconnu; on prendra $d = 0,9h$.

c – Diagrammes des déformations et des contraintes

Les diagrammes sont les suivants :



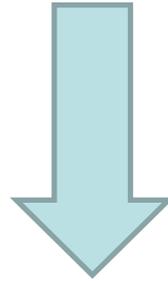
On obtient dans ce cas un axe neutre à une distance $y_{AB} = 0,259d$ de la fibre supérieure de la poutre.

Théorème de Thalès : $3,5 / y_{AB} = 10 / (d - y_{AB})$ d'où $y_{AB} = 0,259 d$

d – Calcul de M_{AB}

La section est en équilibre $\Rightarrow \Sigma M^t_{/aciers} = 0$

$$M_{AB} = 0,8 y_{AB} f_{bcu} b (d - 0,4 y_{AB}) \text{ avec } y_{AB} = 0,259 d$$



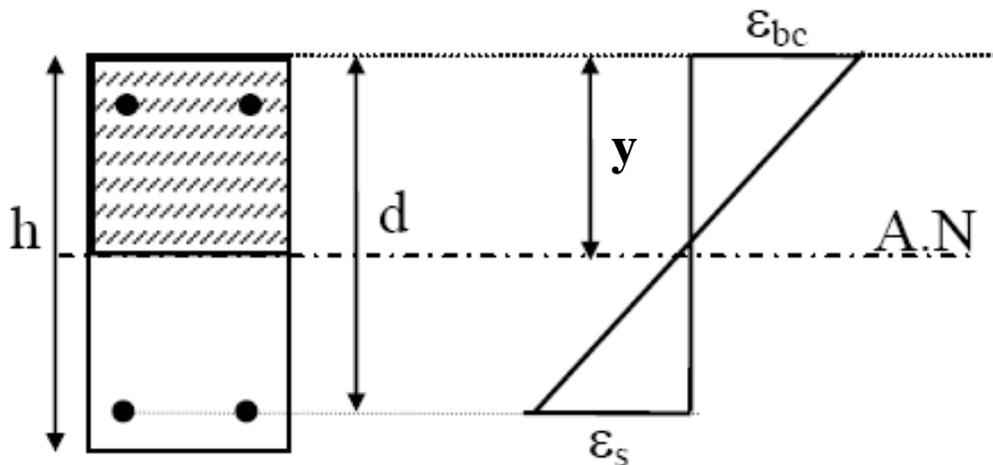
$$M_{AB} = 0,186 b d^2 f_{bcu} = \mu_{AB} b d^2 f_{bcu}$$

$\mu_{AB} = 0,186$ est le moment de référence réduit

2) Moment de flexion ultime (réel)

a - Définition

Le **moment réel noté M_u** est le moment sollicitant une section de telle manière à ce que l'axe neutre soit à une position y de la fibre la plus comprimée. Ce moment dépend du chargement.



$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_s}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \varepsilon_{bc}$$

$$\text{ou } \varepsilon_{bc} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \varepsilon_s$$

b – Diagrammes des déformations et des contraintes

Les diagrammes sont les suivants :

Diagramme des déformations

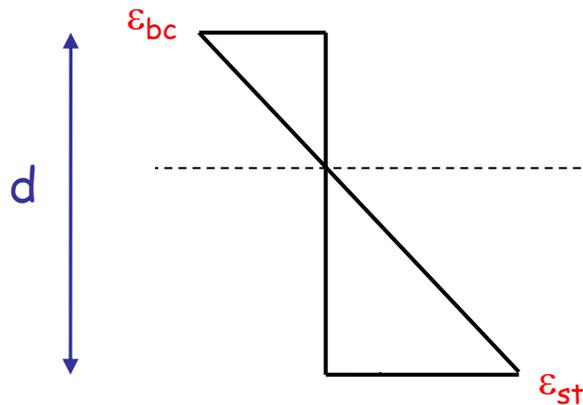
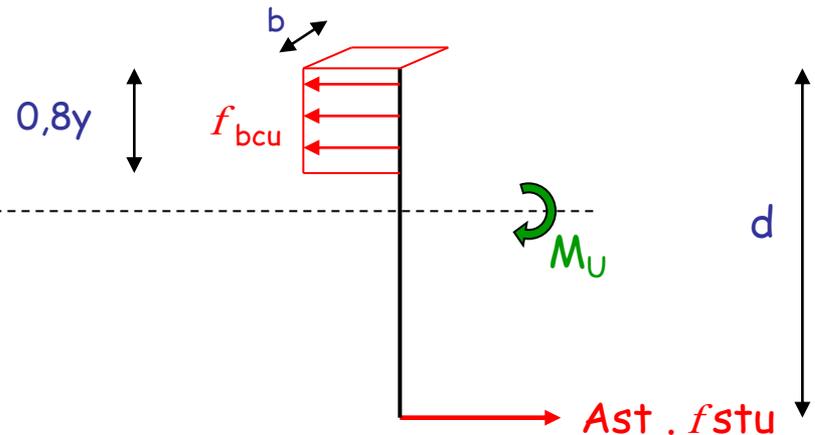


Diagramme des contraintes



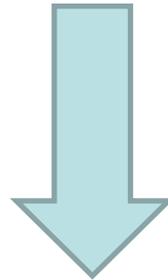
L'axe neutre se trouve à une distance $y = \alpha d$ de la fibre supérieure (la plus comprimée) de la poutre.

c – Calcul de M_U

La section est en équilibre \Rightarrow on pose $\sum M^t_{/aciers} = 0$

$$M_U = 0,8 y f_{bcu} b(d - 0,4 y) \text{ avec } y = \alpha d$$

$$M_U = 0,8 \alpha d f_{bcu} b(d - 0,4 \alpha d)$$



$$M_U = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha) b d^2 f_{bcu} = \mu_U b d^2 f_{bcu}$$

$\mu_U = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha)$ est le moment ultime réduit.

3) Comparaison de M_U et M_{AB}

a – Cas 1 : $M_U \leq M_{AB}$

$$\mu_u \leq 0,186$$

$$M_U \leq M_{AB} \Leftrightarrow 0,8\alpha(1-0,4\alpha) \leq 0,186$$

$$\text{C'est-à-dire : } -0,32\alpha^2 + 0,8\alpha - 0,186 \leq 0$$

La résolution de cette inéquation donne $0 < \alpha \leq 0,259$.

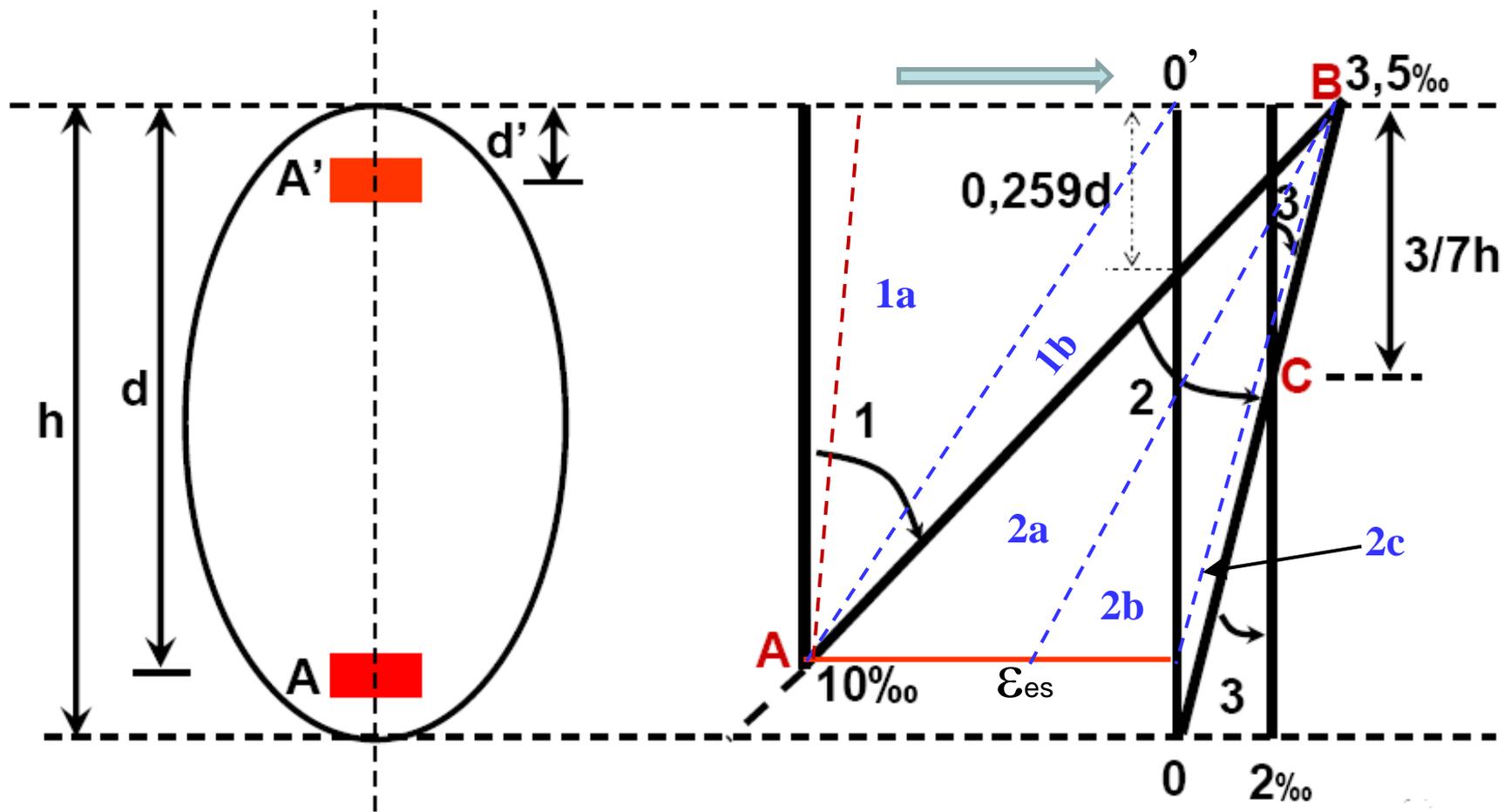
Donc **$0 < y \leq 0,259d$** .

Cette état limite sera caractérisé par les déformations suivantes :

$$\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$$

$$\epsilon_{bc} = 0 \text{ à } 3,5 \text{ ‰}$$

État limite ultime par
écoulement plastique des
aciers → PIVOT A



b – Cas 2 : $M_U > M_{AB}$

$$\mu_u > 0,186$$

$$M_U > M_{AB} \Leftrightarrow 0,8\alpha(1-0,4\alpha) > 0,186$$

$$\text{C'est-à-dire : } -0,32\alpha^2 + 0,8\alpha - 0,186 > 0$$

La résolution de cette inéquation donne $0,259 < \alpha \leq 1$.

Donc **$0,259d < y \leq d$** .

Cette état limite sera caractérisé par les déformations suivantes :

$$\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{st} = 0 \text{ à } 10 \text{ ‰}$$

État limite ultime par
écoulement du béton
→ **PIVOT B**

III Dimensionnement

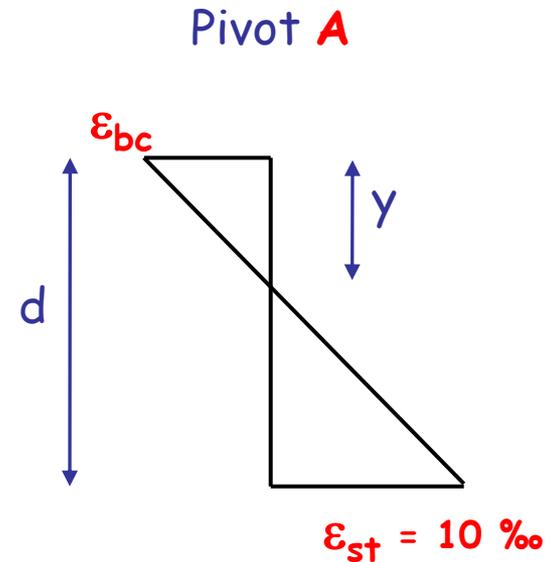
1) Cas 1 : $M_U \leq M_{AB}$: Pivot A

$$\mu_u \leq 0,186$$

a – Calcul de y et A_{st}

$M_u \leq M_{AB}$: pivot **A** ε_{st}
= 10 ‰ et $\varepsilon_{bc} \leq 3,5$ ‰.

Le « risque » est que le béton travaille mal (si $\varepsilon_{bc} \leq 2$ ‰).



Problème à deux inconnues :

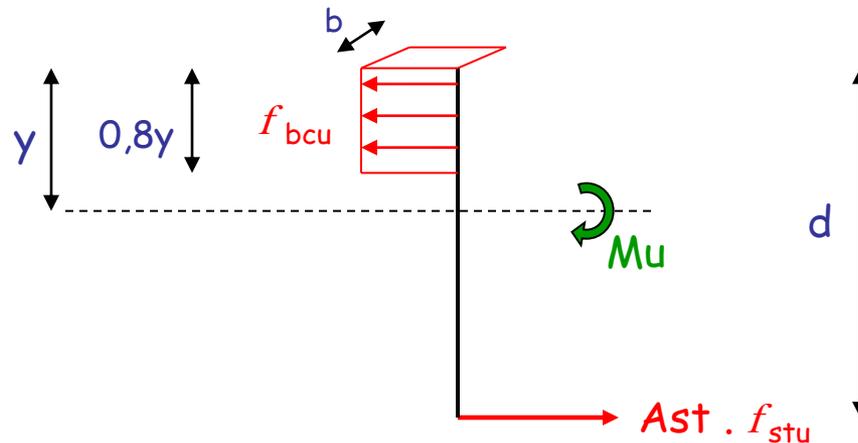
- ✓ La position de l'axe neutre : **y**
- ✓ La section des armature tendues : **A_{st}**

Deux inconnues \Rightarrow deux équations :

$$\Sigma F_{/x} = 0 \quad : \quad 0,8 y b f_{bcu} = f_{stu} A_{st} \quad (1)$$

$$\Sigma M_{/aciers}^t = 0 \quad : \quad Mu = 0,8 y b f_{bcu} (d - 0.4 y) \quad (2)$$

Diagramme des contraintes



- L'équation (2) donne y .
- L'équation (1) donnera ensuite A_{st} .

❖ La résolution de l'équation (2) donne :

$$y = 1,25d \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M_U}{b d^2 f_{bcu}}} \right]$$

ou

$$y = 1,25d(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$$

C'est la solution cohérente de l'équation.

Le calcul de A_{st} à l'aide de l'équation (1) donne :

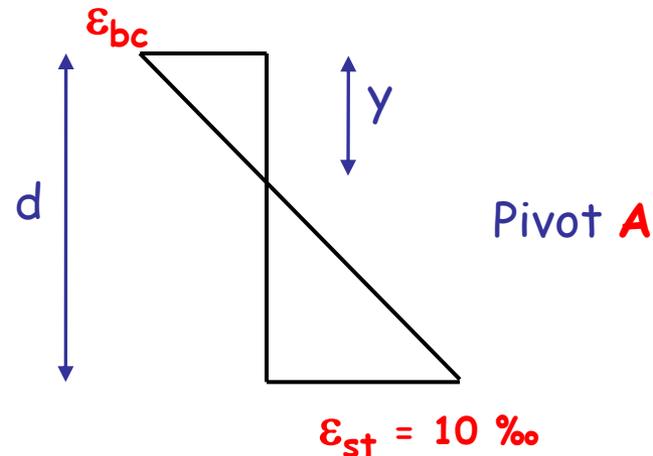
$$A_{st} = \frac{0,8y b f_{bcu}}{f_{stu}}$$

b – Le béton travaille-t-il bien?

$\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$ \Rightarrow les aciers travaille bien car $\epsilon_{st} > \epsilon_{es}$

$\epsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰}$ \Rightarrow Il faut calculer ϵ_{bc} car le béton travaille bien seulement si $\epsilon_{bc} > 2 \text{ ‰}$

Connaissant y , cela permet de calculer ϵ_{bc} grâce au diagramme des déformations :



Théorème de Thalès : $\epsilon_{bc} / y = 10 / (d-y)$ d'où $\epsilon_{bc} = 10y / (d-y)$

Théorème de Thalès : $\epsilon_{bc} / y = 10 / (d-y)$ d'où $\epsilon_{bc} = 10y / (d-y)$

Conclusion :

Si $\epsilon_{bc} > 2\text{‰}$ alors le béton travaille bien.

Si $\epsilon_{bc} \leq 2\text{‰}$ alors le béton travaille mal (la section est surdimensionnée)

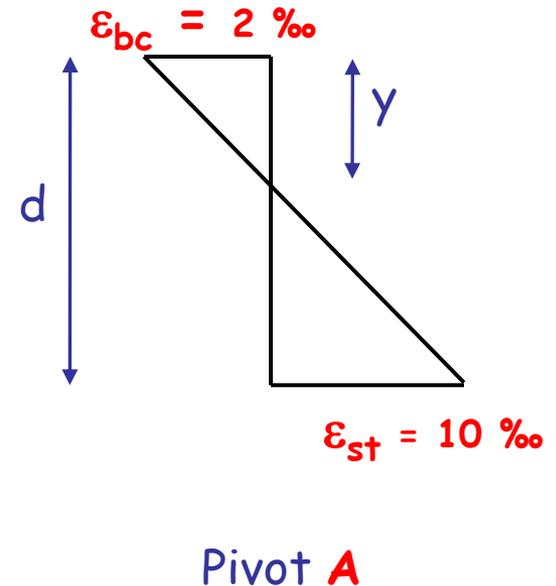
⇒ on redimensionne la section (ex : on diminue h)

c – Remarque (travail du béton)

Calculons y , pour $\epsilon_{bc} = 2\text{‰}$ et $\epsilon_{st} = 10\text{‰}$.

Théorème de Thalès : $2/y = 10/(d-y)$
d'où $y = 0,167d$

Comme $y = \alpha d$ alors $\alpha = 0,167$

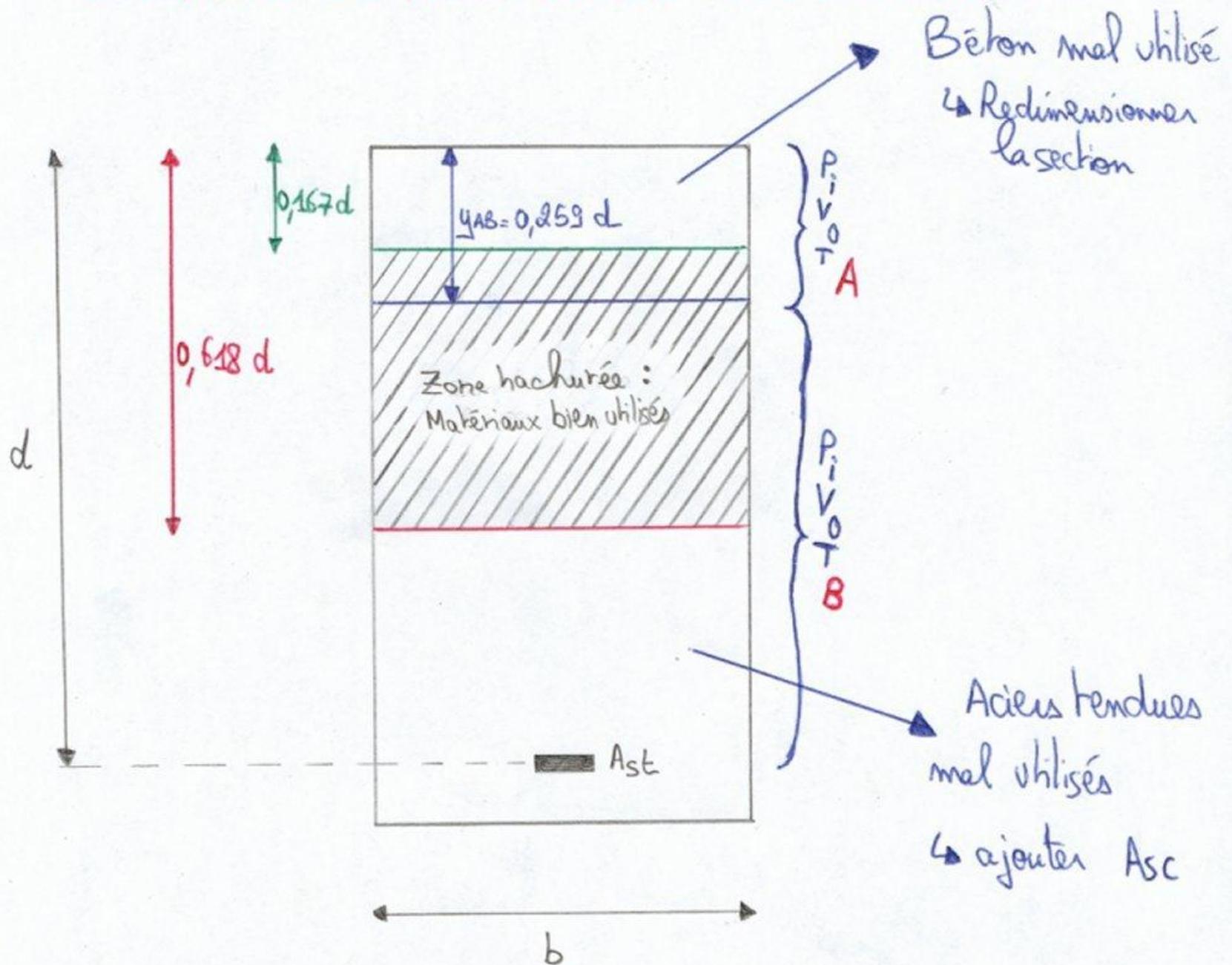


Au pivot A, $\epsilon_{bc} < 2\text{‰} \Leftrightarrow y < 0,167d$ ou $\alpha < 0,167$

Le béton travaille mal (la section est surdimensionnée)

\Rightarrow on redimensionne la section.

Conséquences de la position de l'axe neutre dans une section.



2) Cas 2 : $M_U > M_{AB}$: Pivot B

$$\mu_u > 0,186$$

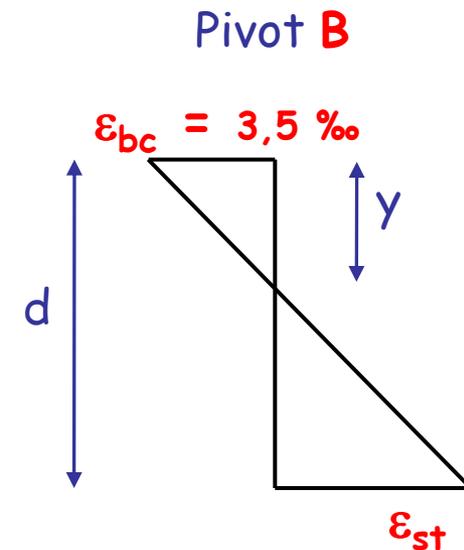
a – Position du problème

$M_u > M_{AB}$: pivot **B** $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_{st} \leq 10 \text{ ‰}$.

Le « risque » est que les aciers travaillent mal (si $\varepsilon_{st} \leq \varepsilon_{es}$).

Problème à deux ou trois inconnues :

- ✓ La position de l'axe neutre : y
- ✓ La section des armature tendue : A_{st}
- ✓ La section des armatures comprimées A_{sc} s'il y a lieu.



b – Moment de plastification ou résistant

Par définition, le **moment de plastification** M_I est le moment sollicitant une section permettant d'atteindre $\epsilon_{st} = \epsilon_{es}$ (limite de la zone élastique / plastique).

Diagramme des déformations

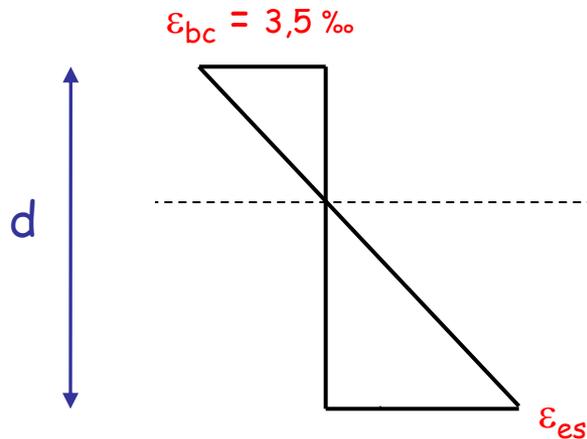
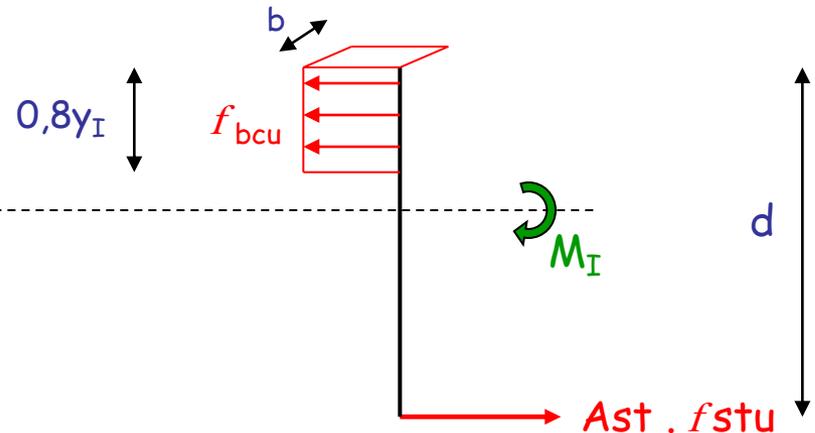


Diagramme des contraintes



On obtient dans ce cas un axe neutre à une distance $y_I = \alpha_I d$ de la fibre supérieure de la poutre (α_I dépend de ϵ_{es}).

Théorème de Thalès : $3,5/y_I = \varepsilon_{es}/(d-y_I)$

d'où $y_I = 3,5d / (3,5 + \varepsilon_{es})$ et $\alpha_I = 3,5 / (3,5 + \varepsilon_{es})$

Calcul de M_I

La section est en équilibre \Rightarrow on pose $\sum M^t_{/aciers} = 0$

$$M_I = 0,8 y_I f_{bcu} b (d - 0,4 y_I) \text{ avec } y_I = \alpha_I d$$

$$M_I = 0,8 \alpha_I d f_{bcu} b (d - 0,4 \alpha_I d)$$



$$M_I = 0,8 \alpha_I (1 - 0,4 \alpha_I) b d^2 f_{bcu} = \mu_I b d^2 f_{bcu}$$

$\mu_I = 0,8 \alpha_I (1 - 0,4 \alpha_I)$ est le moment de plastification réduit.

$$M_I = 0,8 \alpha_I (1 - 0,4 \alpha_I) b d^2 f_{bcu} = \mu_I b d^2 f_{bcu}$$

$$\mu_I = 0,8 \alpha_I (1 - 0,4 \alpha_I)$$

Nuance	f_e (MPa)	ε_{es} (‰) $\gamma_s = 1,15$	y_I	α_I	μ_I
Fe E215	215	0,935	0,789d	0,789	0,432
Fe E235	235	1,02	0,774d	0,774	0,427
Fe E400	400	1,74	0,668d	0,668	0,392
Fe E500	500	2,175	0,617d	0,617	0,372

c – Les aciers travaillent-t-ils bien?

$\epsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ \Rightarrow le béton travaille bien car $\epsilon_{bc} > 2 \text{ ‰}$

$\epsilon_{st} \leq 10 \text{ ‰}$ \Rightarrow Il faut calculer ϵ_{st} car l'acier travaille bien seulement si $\epsilon_{st} > \epsilon_{es}$

Pour répondre à cette question, il faut comparer M_u à M_l :
moment de plastification des aciers

$$M_U < M_I \Leftrightarrow \mu_u < \mu_I \Leftrightarrow 0,8\alpha(1-0,4\alpha) < 0,8 \alpha_I (1-0,4 \alpha_I)$$

On remplace α_I par la valeur correspondante du tableau.

La résolution de cette inéquation donne $\alpha < \alpha_I$ et $y < y_I$.

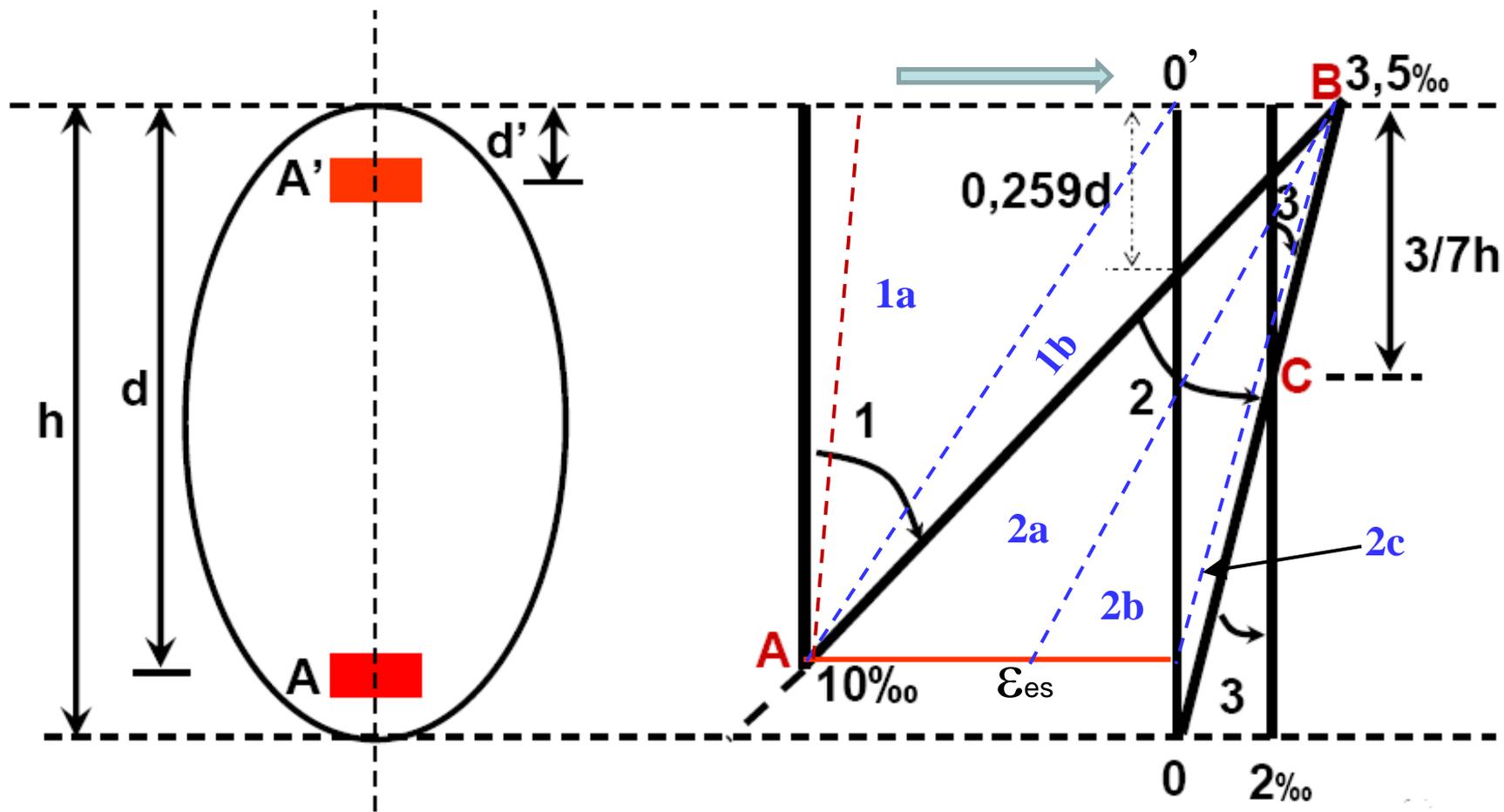
Donc $\varepsilon_{st} > \varepsilon_{es}$. Les aciers travaillent bien.

$$M_U > M_I \Leftrightarrow \mu_u > \mu_I \Leftrightarrow 0,8\alpha(1-0,4\alpha) > 0,8 \alpha_I (1-0,4 \alpha_I)$$

On remplace α_I par la valeur correspondante du tableau.

La résolution de cette inéquation donne $\alpha > \alpha_I$ et $y > y_I$.

Donc $\varepsilon_{st} < \varepsilon_{es}$. Les aciers travaillent mal.

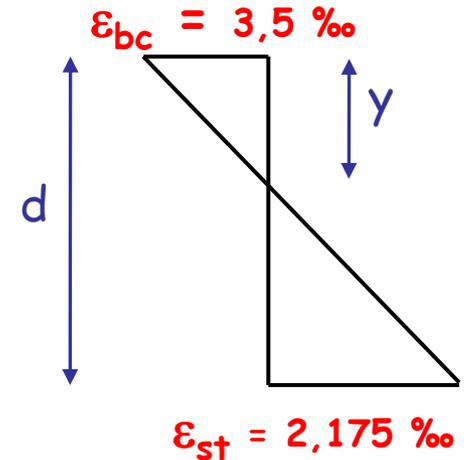


d – Exemple : acier Fe E500

Calculons y_I , pour $\varepsilon_{bc} = 3,5\%$
et $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{es} = 2,175\%$

Théorème de Thalès : $3,5/y_I = 2,175/(d-y_I)$
d'où $y_I = 0,617d$

Comme $x_I = \alpha_I d$ alors $\alpha_I = 0,617$



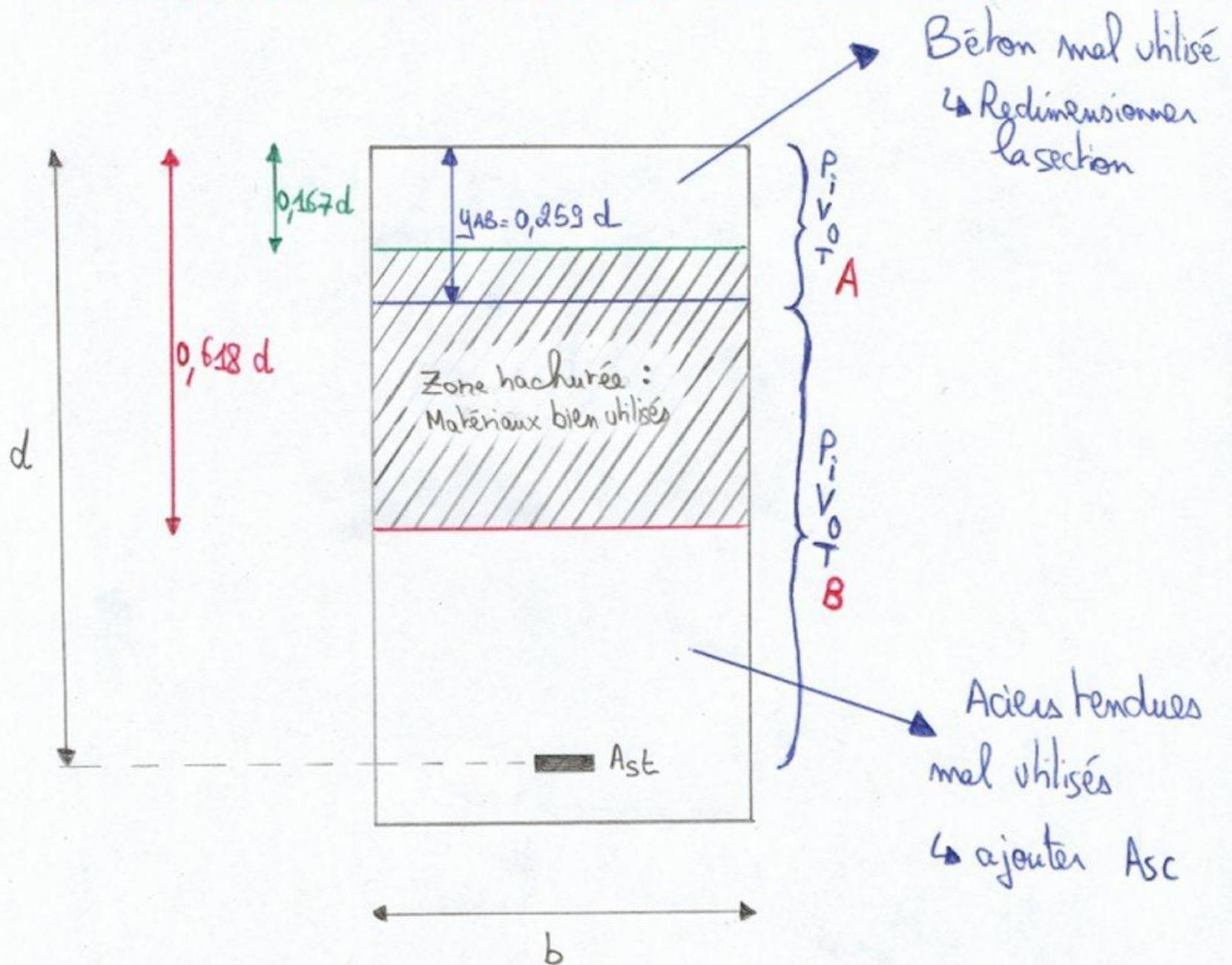
Pivot B

Au pivot B, $\varepsilon_{st} < \varepsilon_{es} = 2,175\%$ $\Leftrightarrow y > 0,617d$ ou $\alpha > 0,617$

Les aciers travaille mal

\Rightarrow voir plus loin pour les solutions.

Conséquences de la position de l'axe neutre dans une section.



e – $M_U < M_I$ avec $M_U > M_{AB}$ (Pivot B)

$$0,186 < \mu_u < \mu_I$$

$M_U < M_I \Leftrightarrow \epsilon_{st} > \epsilon_{es}$. Les aciers travaillent bien.

Calcul de y et A_{st}

Problème à deux inconnues :

- ✓ La position de l'axe neutre : y
- ✓ La section d'armature tendue : A_{st}

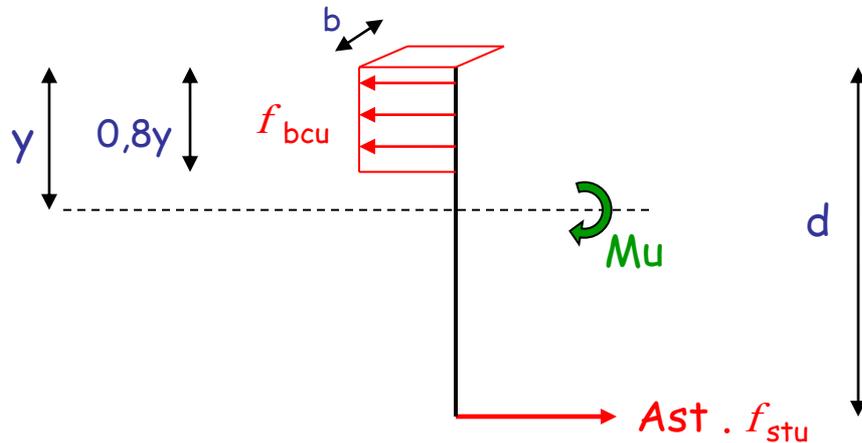
Le calcul est le même
qu'au pivot A

Deux inconnues \Rightarrow deux équations :

$$\Sigma F_{/x} = 0 \quad : \quad 0,8 \mathbf{y} \mathbf{b} f_{bcu} = f_{stu} \mathbf{A}_{st} \quad (1)$$

$$\Sigma M_{/aciers}^t = 0 \quad : \quad Mu = 0,8 \mathbf{y} \mathbf{b} f_{bcu} (d - 0,4 \mathbf{y}) \quad (2)$$

Diagramme des contraintes



- L'équation (2) donne \mathbf{y} .
- L'équation (1) donnera ensuite \mathbf{A}_{st} .

❖ La résolution de l'équation (2) donne :

$$y = 1,25d \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M_U}{b d^2 f_{bcu}}} \right]$$

ou

$$y = 1,25d(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$$

C'est la solution cohérente de l'équation.

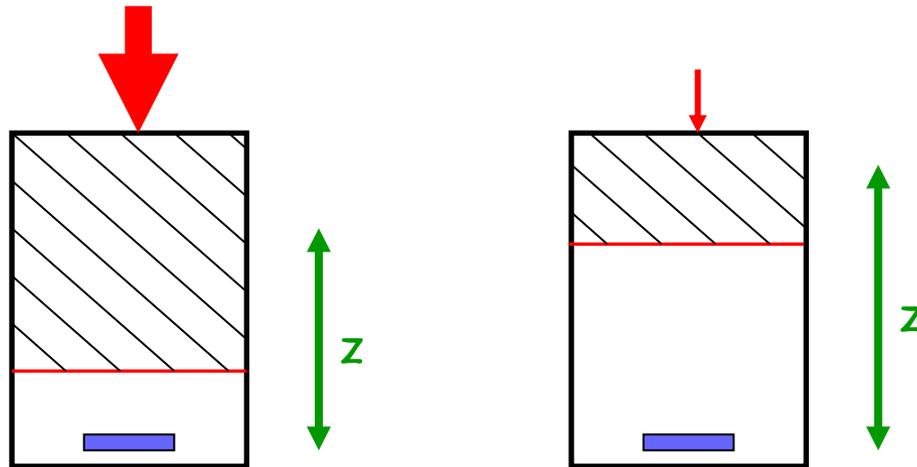
Le calcul de A_{st} à l'aide de l'équation (1) donne :

$$A_{st} = \frac{0,8y b f_{bcu}}{f_{stu}}$$

f – $\underline{M_U} > \underline{M_I}$ avec $\underline{M_U} > \underline{M_{AB}}$ (Pivot B)

$$\mu_u > \mu_I$$

$M_U > M_I \Leftrightarrow \varepsilon_{st} < \varepsilon_{es}$. Les aciers travaillent mal.



Les charges sont trop importantes par rapport à la poutre.

Les charges sont trop importantes par rapport à la poutre

- ⇒ l'axe neutre descend;
- ⇒ besoin de plus de béton comprimé pour résister;
- ⇒ la partie comprimée de la poutre supporte plus de charge, donc travaille plus;
- ⇒ les aciers travaillent dans de mauvaises conditions ($\epsilon_{st} \leq \epsilon_{es}$), car ils supportent moins de charge

Solutions pour optimiser dans la cas ou $M_u > M_1$

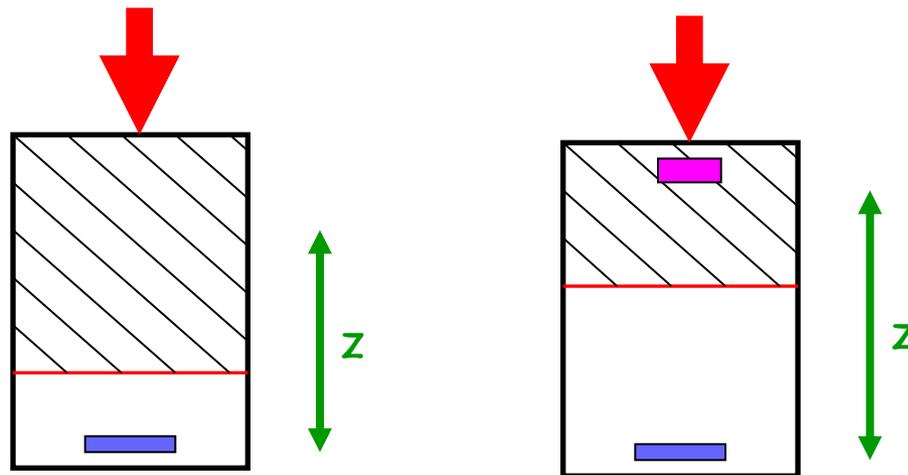
On voudrait avoir $M_u < M_1$ sachant que $M_1 = \mu_I b d^2 f_{bcu}$

➤ f_{cj} ou f_{c28} $\Rightarrow f_{bcu}$ $\Rightarrow M_1$

➤ b ou d $\Rightarrow M_1$

➤ Ajout A_{sc}

- ⇒ Les aciers comprimés « aident » le béton comprimé
- ⇒ réduit la zone de béton comprimé
- ⇒ monte ainsi l'axe neutre
- ⇒ augmente le bras de levier y
- ⇒ permet aux aciers de bien travailler



On ajoute juste assez d'aciers comprimés pour remonter l'axe neutre de y à y_1 . On aura ainsi $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{es}$.

Diagramme des déformations

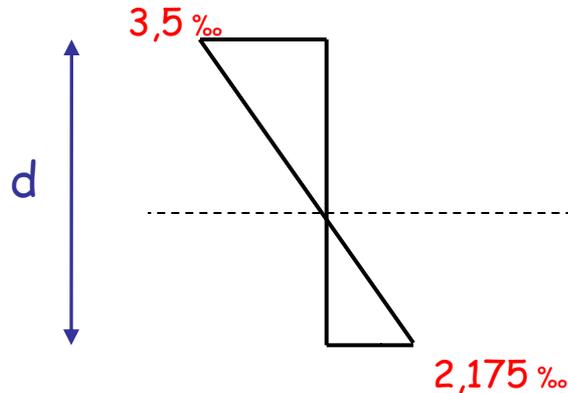
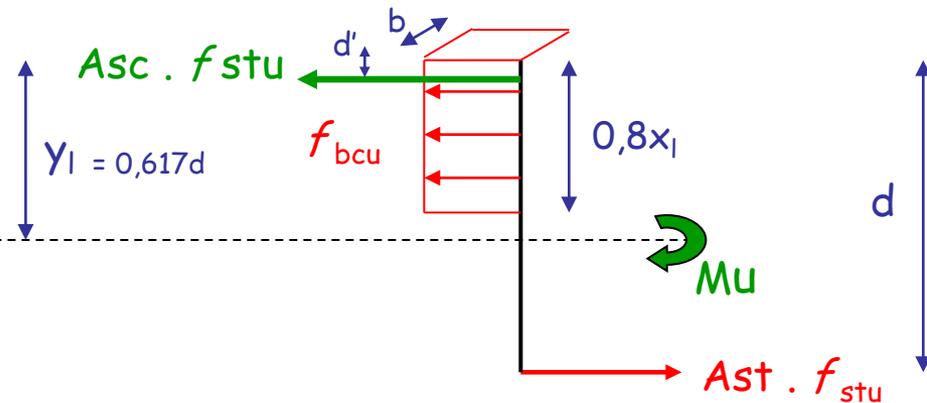


Diagramme des contraintes



Il y a 2 inconnues **Ast** et **Asc** (y est connu : $y = y_1$).
Par exemple pour Fe E 500 : **$y_1 = 0,617d$** .

$$\Sigma F_{/x} = 0 \quad : \quad A_{sc} \cdot f_{stu} + 0,8 y_I b f_{bcu} = f_{stu} A_{st} \quad (1)$$

$$\Sigma M^t_{/aciers} = 0 \quad : \quad M_u = \underbrace{0,8 y_I b f_{bcu} (d - 0,4 y_I)} + A_{sc} \cdot f_{stu} (d - d') \quad (2)$$

$$M_I = 0,8 \alpha_I (1 - 0,4 \alpha_I) b d^2 f_{bcu} = \mu_I b d^2 f_{bcu}$$

L'équation (2) donne :

$$A_{sc} = \frac{M_U - M_I}{f_{stu} (d - d')}$$

L'équation (1) donne :

$$A_{st} = A_{sc} + \frac{0,8 y_I b f_{bcu}}{f_{stu}}$$

y_I est fonction du type d'acier (voir le tableau).

f – Remarques

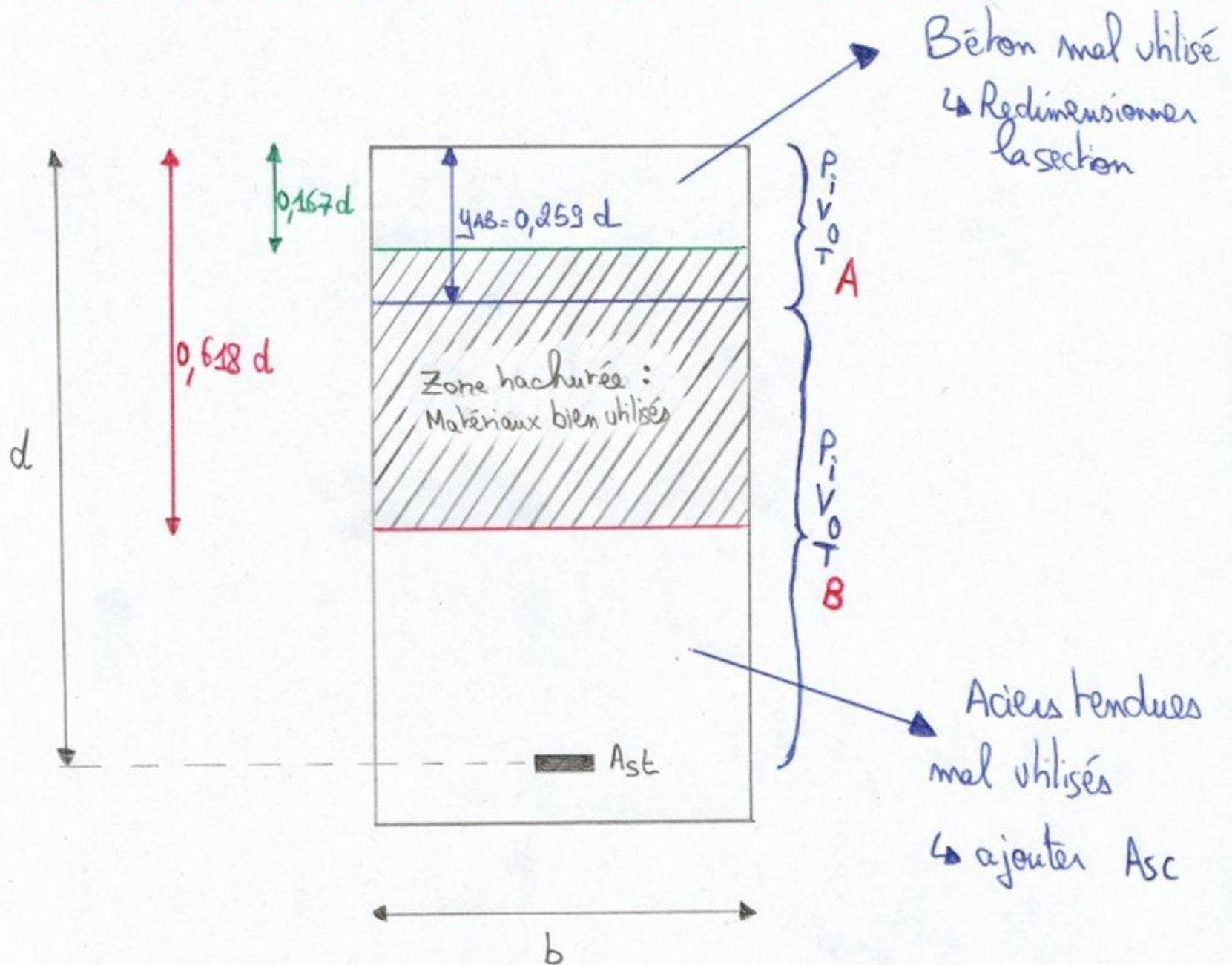
❖ Le règlement impose que la part des efforts repris par les aciers comprimés ne dépasse pas 40 % de l'effort total, c'est à dire :

Il faut : $M_u - M_1 < 0,4 M_u$ (sinon, on redimensionne la poutre)

❖ En présence de A_{sc} , il faut mettre des cadres tous les $12 \emptyset$ des A_{sc} (pour éviter le **flambement** des aciers comprimés).

Exemple : si les aciers comprimés sont en $\emptyset 12$, alors les cadres sont espacés de 14 cm.

Conséquences de la position de l'axe neutre dans une section.



N.B. : concernant les unités.

Le plus simple est de respecter les unités suivantes :

- ✓ Les longueurs (b , h , d , y) sont en mètres (**m**)
- ✓ f_{cj} , f_{bcu} , f_e , f_{stu} sont en **MPa**, M_u en **MN**
(Les « Mégas » s'annuleront entre eux)
- ✓ Les sections d'aciers A_{st} et A_{sc} sont en **m²**
(multiplier ensuite par 10^4 , si on veut des cm²)

Exercice 19 : section à armatures simple

Soit une section (25×50) cm² sollicité par un moment de flexion $M_u = 0,153$ MNm.

Les matériaux sont :

l'acier HA FeE400 et le béton $f_c28 = 25$ MPa.

Calculez la section du ferrailage à l'E.L.U.?

Exercice 20 : section à armatures double

Soit une section (25×50) cm² sollicité par un moment de flexion $M_u = 0,315$ MNm.

Les matériaux sont :

l'acier HA FeE400 et le béton $f_{c28} = 25$ MPa.

On donne $d' = 5$ cm.

Calculez la section du ferrailage à l'E.L.U.?